О ПОСТРОЕНИИ ЛИНЕЙНЫХ СИНГУЛЯРНЫХ СИСТЕМ С МАЛЫМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ, ИЗМЕНЯЮЩИМИ СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ НА ЗАДАННОМ ОТРЕЗКЕ

С.Г.Красовский (г. Минск, Беларусь)

Рассмотрим исходную сингулярную линейную систему

$$\varepsilon\dot{x} = A(t)x, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad t \geq 0, \qquad (1_{A/\varepsilon})$$

с ограниченной непрерывной матрицей $A(t)$ и малым положительным параметром ε при производной, а также возмущенную сингулярную систему $(1_{(A+Q)/\varepsilon})$ с кусочно-непрерывным возмущением $Q(\cdot)$, $\|Q(t)\| \leq \delta$ при $t \geq 0$.

В случае невыполнения условий, содержащихся в работе [1] и налагаемых на коэффициенты матрицы $A(t)$, в работе [2] описан конструктивный способ построения двумерных систем $(1_{A/\varepsilon})$, все решения $x(t, x_0, \varepsilon)$ которых стремятся к нулю при $\varepsilon \to +0$ во всех точках $t \in (0, T]$, и указано такое кусочно-непрерывное возмущение $Q(\cdot)$, которое может быть как угодно малым по норме, что сразу все нетривиальные решения $y(t, y_0, \varepsilon)$ системы $(1_{(A+Q)/\varepsilon})$ неограниченно растут по норме при $\varepsilon \to +0$ в каждой точке некоторого определенного отрезка, содержащегося в $(0, T]$.

Теорема 1 [2]. *Для произвольных чисел $M > 0$ и $T > 0$ существует двумерная сингулярная система $(1_{A/\varepsilon})$ с непрерывной на $[0, T]$ и бесконечно дифференцируемой на $(0, T)$ матрицей коэффициентов $A(\cdot)$, $\|A(\cdot)\| \leq M$, для всех решений $x(t, x_0, \varepsilon)$ которой выполнено стремление $\lim\limits_{\varepsilon\to+0} x(t, x_0, \varepsilon) = 0$ $\forall t \in (0, T]$, и для как угодно малого $\delta > 0$ существует такое удовлетворяющее условию $\|Q(t)\| \leq \delta$, $t \in [0, T]$, кусочно-непрерывное возмущение $Q(\cdot)$, что для всех нетривиальных решений $y(t, y_0, \varepsilon)$ сингулярной возмущенной системы $(1_{(A+Q)/\varepsilon})$ имеет место равенство*

$$\varlimsup_{\varepsilon\to+0} \|y(t, y_0, \varepsilon)\| = +\infty$$

во всех точках t некоторого отрезка $[T^*, T] \subset (0, T]$.

В работе [3] получен аналогичный результат для трехмерных систем.

Теорема 2 [3]. *Для произвольных чисел $M > 0$, $T > 0$ существует трехмерная сингулярная система $(1_{A/\varepsilon})$ с ограниченной кусочно-непрерывной на $[0, T]$ матрицей коэффициентов $A(\cdot)$,*

$\|A(\cdot)\| \le M$, *для всех решений* $x(t, x_0, \varepsilon)$ *которой выполнено равенство* $\lim\limits_{\varepsilon\to+0} x(t, x_0, \varepsilon) = 0 \ \forall\ t \in (0, T]$, *равномерное относительно* $t \in [t_0, T] \subset (0, T]$ *и относительно векторов* x_0, $\|x_0\| \le C$ — fix, *и для произвольного как угодно малого* $\delta > 0$ *существует такое удовлетворяющее условию* $\|Q(t)\| \le \delta$, $t \in [0, T]$, *кусочно-непрерывное возмущение* $Q(\cdot)$, *что для всех нетривиальных решений* $y(t, y_0, \varepsilon)$ *сингулярной возмущенной системы* $(1_{(A+Q)/\varepsilon})$ *имеет место равенство*

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to+0}} \|y(t, y_0, \varepsilon)\| = +\infty$$

во всех точках t некоторого отрезка $[T^*, T] \subset (0, T]$.

Следующая теорема обобщает результаты теорем 1, 2 на случай систем произвольной размерности $n \ge 2$. Заметим, что в предложенном способе построения отрезок $[T^*, T]$ неограниченного роста решений можно задавать заранее.

Теорема 3. *Для произвольных положительных чисел* M, T, T^* *таких, что* $T > T^* > 0$, *и произвольного натурального числа* $n \in \mathbb{N}$ *существует* n*-мерная сингулярная система* $(1_{A/\varepsilon})$ *с кусочно-непрерывной на* $[0, T]$ *матрицей коэффициентов* $A(\cdot)$, $\|A(\cdot)\| \le M$, *для всех решений* $x(t, x_0, \varepsilon)$ *которой выполнено стремление* $\lim\limits_{\varepsilon\to+0} x(t, x_0, \varepsilon) = 0$, $t \in (0, T]$, *и для как угодно малого* $\delta > 0$ *существует такое удовлетворяющее условию* $\|Q(t)\| \le \delta$, $t \in [0, T]$, *кусочно-непрерывное возмущение* $Q(\cdot)$, *что для всех нетривиальных решений* $y(t, y_0, \varepsilon)$ *сингулярной возмущенной системы* $(1_{(A+Q)/\varepsilon})$ *имеет место равенство*

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to+0}} \|y(t, y_0, \varepsilon)\| = +\infty$$

во всех точках t заданного отрезка $[T^*, T]$.

Следствие. *Стремление* $\|x(t, y_0, \varepsilon)\| \to 0$ *при* $\varepsilon \to +0$, *указанное в теоремах* 1–3, *будет равномерным относительно* $t \in [t_0, T] \subset (0, T]$ *и относительно векторов* x_0, $\|x_0\| \le S$ — fix.

Замечание. Указанный в теореме 3 способ построения кусочно-непрерывных систем можно применить и для более узкого класса систем $(1_{A/\varepsilon})$ с ограниченными на $[0, T]$ и бесконечно дифференцируемыми на $(0, T)$ коэффициентами.

Литература. 1. Красовский С.Г. // Дифференц.уравнения. 1996. Т. 32, № 2. С. 277 – 279. **2.** Красовский С.Г. // Дифференц.уравнения. 2005. Т.41, № 2. С. 202-207. **3.** Красовский С.Г. // Тез. докл. Междунар. математ. конф. "Еругинские чтения – X". Могилев, 2005. С. 34 – 35.