ЗАДАЧА ТИПА КОШИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ АДАМАРА

Килбас А. А., Титюра А. А. (г. Минск, Беларусь)

Пусть $\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}$ — дробная производная Адамара порядка $\alpha \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(\alpha) > 0$, на конечном отрезке $[a,b]$ $(0 < a < b < \infty)$, определяемая формулой [1]:

$$(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}\, g)(x) = \delta^n(\mathcal{J}_{a+}^{n-\alpha}\, g)(x), \quad \delta = x\frac{d}{dx}, \ (n = -[-\mathrm{Re}(\alpha)]),$$

где $\mathcal{J}_{a+}^{\alpha}$ — дробный интеграл Адамара вида:

$$(\mathcal{J}_{a+}^{\alpha}\, g)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \left(\ln\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} g(t)\frac{dt}{t} \quad (\mathrm{Re}(\alpha) > 0;\ x > a).$$

Рассматривается задача типа Коши для дифференциального уравнения с дробной производной Адамара

$$(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha}y)(x) = f[x, y(x), (\mathcal{D}_{a+}^{\alpha_1}y)(x), \ldots, (\mathcal{D}_{a+}^{\alpha_l}y)(x)], \tag{1}$$

$$(\mathcal{D}_{a+}^{\alpha-k}y)(a+) = b_k, \quad b_k \in \mathbb{C} \ (k = 1, 2, \ldots, n,\ n = -[-\mathrm{Re}(\alpha)]), \tag{2}$$

в пространстве $\mathbf{L}_{\delta}^{\alpha}(a,b) = \left\{y \in L(a,b) : \mathcal{D}_{a+}^{\alpha}y \in L(a,b)\right\}$.

Теорема 1. *Пусть* $\alpha \in \mathbb{C}$ $(n-1 < \mathrm{Re}(\alpha) < n,\ n = -[-\mathrm{Re}(\alpha)])$ *или* $\alpha \in \mathbb{N}$. *Пусть* $l \in \mathbb{N}$ $(l \geq 1)$ *и* $\alpha_i \in \mathbb{C}$ $(i = 1, \ldots, l)$ *такие, что*

$$0 = \alpha_0 < \mathrm{Re}(\alpha_1) < \ldots < \mathrm{Re}(\alpha_l) < \mathrm{Re}(\alpha). \tag{3}$$

Пусть $\mathbf{G}$ *— открытое множество в* $\mathbb{C}^{l+1}$ *и пусть функция* $f : (a,b] \times \mathbf{G} \to \mathbb{C}$ *такая, что* $f[x, y, y_1, \ldots, y_l] \in L(a,b)$ *для любого* $(y, y_1, \ldots, y_l) \in \mathbf{G}$.

Для того, чтобы функция $y(x) \in L(a,b)$ *была почти всюду решением краевой задачи типа Коши (1)–(2), необходимо и достаточно, чтобы она почти всюду удовлетворяла интегральному уравнению*

$$y(x) = \sum_{j=1}^{n}\frac{b_j}{\Gamma(\alpha-j+1)}\left(\ln\frac{x}{t}\right)^{\alpha-j} +$$

$$+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x\left(\ln\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} f\left[t, y(t), (\mathcal{D}_{a+}^{\alpha_1}y)(t), \cdots, (\mathcal{D}_{a+}^{\alpha_l}y)(t)\right]\frac{dt}{t} \ (x > a).$$

В частности, если $\mathrm{Re}(\alpha) < 1$, *то* $y(x)$ *удовлетворяет почти всюду отношениям*

$$(\mathcal{D}^{\alpha}_{a+}y)(x) = f\left[x, y(x), (\mathcal{D}^{\alpha_1}_{a+}y)(x), \ldots, (\mathcal{D}^{\alpha_l}_{a+}y)(x)\right], (\mathcal{J}^{1-\alpha}_{a+}y)(a+) = b_0 \in \mathbb{C}$$

тогда и только тогда, когда $y(x)$ *удовлетворяют почти всюду интегральному уравнению*

$$y(x) = \frac{b_0}{\Gamma(\alpha+1)}\left(\log\frac{x}{a}\right)^{\alpha-1} +$$

$$+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x \left(\ln\frac{x}{t}\right)^{\alpha-1} f\left[t, y(t), (\mathcal{D}^{\alpha_1}_{a+}y)(t), \ldots, (\mathcal{D}^{\alpha_l}_{a+}y)(t)\right]\frac{dt}{t} \;\; (x > a).$$

Литература. 1. A.A. Kilbas. Hadamard-type fractional calculus, *J. Korean Math. Soc.* **38** (2001), no. 6, 1191-1204.