О СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ИЕРАРХИИ K_2

В. И. Громак (г. Минск, Беларусь)

В настоящее время существуют различные подходы к построению дифференциальных уравнений со свойством Пенлеве. Это прежде всего метод изомонодромной деформации линейных систем, метод аффинных симметрий, непосредственное построение аналогов уравнений Пенлеве из гамильтоновых систем. В настоящей работе рассматриваются некоторые аналитические свойства решений уравнения

$$w^{(4)} = -5w'w'' + 5w^2w'' + 5w(w')^2 - w^5 + (\lambda z + \alpha)w + \gamma, \qquad (1)$$

которое является автомодельной редукцией из уравнения Каупа - Купершмидта (иерархия K_2). Уравнения (1) может рассматриваться как высший аналог уравнений Пенлеве, так как оно не имеет полиномиальных первых интегралов и удовлетворяет необходимым условия теста Пенлеве для семейств решений с положительными индексами Фукса [1] — [4].

Пусть $z = z_0$ — подвижный полюс решения уравнения (1), т.е. в окрестности $z = z_0$ решение имеет вид $w(z) \sim c_0(z - z_0)^{-p}$, $p \in \mathbb{N}$, где p — порядок полюса. Для уравнения (1) пара (p, c_0) принимает соответственно значения (1, -3), (1, -2), (1, 1), (1, 4).

Теорема 1. *Пусть $\forall z_0 \in \mathbb{C}$. Уравнение (1) имеет трехпараметрическое семейство полярных решений в случаях $c_0 = 1$ и $c_0 = -2$ и двухпараметрическое семейство полярных решений в случаях $c_0 = 4$ и $c_0 = -3$.*

Уравнение (1) можно записать в виде эквивалентной гамильтоновой системы $q_j' = H'_{p_j}$, $p_j' = -H'_{q_j}$ с полиномиальным гамильтонианом ($\epsilon^2 = 1$)

$$H = H(z, q_1, q_2, p_1, p_2, \epsilon) = \frac{1}{2}p_2^2 + \frac{7 - 9\epsilon}{12}q_2^3 + p_1 q_2 - \frac{1 + 3\epsilon}{4}p_1 q_1^2 +$$

$$+\frac{3\epsilon - 1}{4}q_2(\lambda z + \alpha) + (\gamma + \frac{3\epsilon - 1}{2}\lambda)q_1.$$

Заметим, что уравнение (1) аналогично автомодельным уравнениям иерархии уравнения Кортевега-Де Фриза [5] допускает группу преобразований Беклунда с образующим преобразованием

$$T: w \to \widetilde{w} = w - \frac{2\gamma+\lambda}{2D_1(w)} - \frac{4(\gamma+2\lambda)D_1(w)}{2D_{-1}(w)D_1(w) - 3(2\gamma+\lambda)(w''+2ww')},$$

$$\widetilde{\lambda} = \lambda,\ \widetilde{\alpha} = \alpha,\ \widetilde{\gamma} = \gamma + 3\lambda,$$

где

$$D_\epsilon(q_1) := -q_1^{(3)} - \frac{3\epsilon+1}{2}q_1q_1'' + \frac{3\epsilon-9}{4}(q_1')^2 + \frac{5-3\epsilon}{2}q_1^2q_1' +$$

$$+\frac{3\epsilon-1}{4}q_1^4 + \frac{1-3\epsilon}{4}(\lambda z+\alpha) = 0.$$

В случае $\gamma = \lambda$ уравнение (1) имеет также трехпараметрическое семейство решений, определяемое общим решением уравнения $D_{-1}(w) = 0$, которое редуцирует трехпараметрическое семейство решений для всех $\gamma = (3n+1)\lambda,\ n \in \mathbb{Z}$.

Преобразования T, T^{-1} позволяют выделить фундаментальную область в пространстве параметра γ/λ : $\mathrm{Re}[\gamma/\lambda] \in [-1,2)$. Заметим, что эти преобразования могут быть применены для расширения случаев интегрируемости уравнения (1). Группа преобразований Беклунда также может быть применена для построения рациональных решений.

Теорема 2. *Для существования рациональных решений уравнения (1) необходимо и достаточно, чтобы либо $\gamma/\lambda = 3k-1$, либо $\gamma/\lambda = 3k,\ k \in \mathbb{Z}$. При каждом таком γ/λ уравнение (3) имеет единственное рациональное решение.*

Литература. **1.** Н.А. Кудряшов // ТМФ. 2000. Т. 122, С. 72-87. **2.** N.A.Kudryashov // ANZIAM J 2002. V. 44 P. 149–160. **3.** Andrew N.W.Hone // Physica D. 1998. V. 118. P. 1–16. **4.** C.M.Cosgrove // Stud. Appl. Math. 2000. V. 104. P. 1–65. **5.** Gromak V. I., Laine I., Shimomura S. Painlevé Differential Equations in the Complex Plane, De Gruyter Studies in Mathematics 28, Berlin — New-York, 2002.