ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ПРОГРАММНОГО ДВИЖЕНИЯ ДВУСТОРОННИХ МАТРИЧНЫХ УРАВНЕНИЙ

Патрушева М.В. (Россия, Санкт-Петербург)

Рассмотрим управляемое двустороннее матричное уравнение

$$\dot{\Theta} = P\Theta + \Theta Q + Bu, \tag{1}$$

где матрица Θ — квадратная матрица порядка n. Элементы квадратных матриц P и Q являются вещественными непрерывными функциями, заданными при $t \in (-\infty, +\infty)$. Будем считать матрицу B зависящей лишь от переменной t, причем ее элементы вещественны, непрерывны и заданы при $t \in (-\infty, +\infty)$. u представляет собой скалярную величину (управление), подлежащую определению.

Предположим, что заданы две матрицы $\Theta(t_0)$ и $\Theta(t_1)$. Требуется найти управление $u = u(t)$ так, чтобы матричное уравнение (1) имело решение $\Theta = \Theta(t)$, принимающее значения $\Theta = \Theta(t_0)$ при $t = t_0$ и $\Theta = \Theta(t_1)$ при $t = t_1$. Такое управление будем называть программным управлением, а соответствующее ему матричное решение — программным решением или программным движением.

Для представления программного решения используем формулу решения неоднородных матричных уравнений

$$\Theta = Y(t,t_0)\Theta(t_0)Z(t,t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} Y(t,\bar{t})B(\bar{t})Z(t,\bar{t})u(\bar{t})\,d\bar{t}. \tag{2}$$

Предположим, что существует такое программное управление $u = u(t)$, при котором правая часть формулы (2) будет обращаться в заданную матрицу $\Theta = \Theta(t_1)$ при $t = t_1$. Тогда из формулы (2) будем иметь интегральные уравнения для получение функции программного управления

$$\Theta(t_1) = Y(t_1,t_0)\Theta(t_0)Z(t_1,t_0) + \int\limits_{t_0}^{t} Y(t_1,\bar{t})B(\bar{t})Z(t_1,\bar{t})u(\bar{t})\,d\bar{t}. \tag{3}$$

Обозначим через b_{ij} элемент $b_{ij}(\bar{t})$ — элемент матрицы, стоящий под интегралом в формуле (3) и положим в формуле (3)

$$u(\bar{t}) = \sum_{i,j=1}^{n} C_{ij}B_{ij}, \tag{4}$$

где C_{ij} — константы, подлежащие определению.

Подставим формулу (4) в формулу (3), тогда в результате этой подстановки интегральный член примет вид $\sum\limits_{i,j=1}^{n} C_{ij}A_{ij}$, и система (3) превратится в систему линейных алгебраических неоднородных уравнений.

Теорема. *Программное управление $u = u(t)$ и программное движение $\Theta = \Theta(t)$ при любом выборе начальных и конечных матриц Θ_0 и Θ_1 существуют тогда и только тогда, когда матрица линейной системы, получающейся при подстановке формулы (4) в формулу (3), будет неособой.*