ПРОБЛЕМА ЦЕНТРА В ОДНОМ ЧАСТНОМ СЛУЧАЕ СИСТЕМЫ С НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ ТРЕТЬЕЙ СТЕПЕНИ

Руденок А.Е. (Беларусь, Минск)

Рассмотрим систему

$$\frac{dx}{dt} = -y + P_2(x,y) + P_3(x,y),\ \frac{dy}{dt} = x + Q_2(x,y) + Q_3(x,y), \qquad (1)$$

где $P_i(x,y)$, $Q_i(x,y)$ - однородные многочлены степени i. Рассмотрим частный случай, когда

$$xQ_3(x,y) - yP_3(x,y) = 0,\ P_3(x,y) \neq 0. \qquad (2)$$

Тогда в полярных координатах система (1) эквивалентна уравнению

$$\frac{dr}{d\varphi} = (r^2 p_2(\varphi) + r^3 p_3(\varphi))/(1 + r g_2(\varphi)),$$

где $p_2(\varphi) = \alpha\cos\varphi + \cos(3\varphi - \varphi_3)$, $g_2(\varphi) = \beta\cos(\varphi - \varphi_1) - \sin(3\varphi - \varphi_3)$, $p_3(\varphi) = \frac{1}{2}\alpha\beta\cos\varphi_1 + \gamma\cos(2\varphi - \varphi_2)$.

Теорема. *Если $\varphi_1 = \pi/2$, $\gamma \neq 0$, то необходимыми и достаточными условиями наличия особой точки типа "центр" в $O(0,0)$ системы (1) являются:*

1) $\alpha = \beta$;

2) $\alpha = 4\cos(\varphi_2 - \varphi_3)\sec\varphi_2, \quad \beta = \dfrac{4}{3}\cos(\varphi_2 - \varphi_3)\sec\varphi_2,$

$\gamma = \dfrac{10}{3}\cos(\varphi_2 - \varphi_3)\sec^2\varphi_2 \sin\varphi_3$;

3) $7 - 9\cos 2\varphi_2 + 16\cos(2\varphi_2 - 2\varphi_3) = 0, \quad \alpha = \dfrac{2}{3}\cos(\varphi_2 - \varphi_3)\sec\varphi_2,$

$\beta = -2\cos(\varphi_2 - \varphi_3)\sec\varphi_2,$

$\gamma = -\dfrac{35}{36}(1 - 3\cos 2\varphi_2 + 4\cos(2\varphi_2 - 2\varphi_3)\cos(\varphi_2 - \varphi_3)\mathrm{cosec}(2\varphi_2 - \varphi_3)\sec^2\varphi_2$;

4) $\beta = \dfrac{1}{3}(-\alpha\cos\varphi_2 + 8\cos(\varphi_2 - \varphi_3))\sec\varphi_2,$

$\gamma = \dfrac{2}{3}(\alpha\cos\varphi_2 + \cos(\varphi_2 - \varphi_3))\sin\varphi_3 \sec^2\varphi_2$;

5) $\varphi_2 = \dfrac{\pi}{2}, \varphi_3 = 0.$

Для каждого случая 1) - 5) построен интегрирующий множитель типа Дарбу системы (1).

Система (1) при условии (2) рассматривалась в [1] при условии функциональной независимости радиальных α, β, γ и угловых $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ величин. Здесь это условие убрано.

Литература. 1. Руденок А. Е. // VIII Белорусская математическая конференция. Тезисы докладов, Ч. 1. Минск, 2000. С. 151