

**К ПРОБЛЕМЕ АНАЛИТИЧЕСКОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ
РЕШЕНИЙ СИНГУЛЯРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
СИСТЕМ**

Размыслович Г.П. (Беларусь, Минск)

Рассмотрим не разрешенную относительно производной систему уравнений вида

$$A\dot{x}(t) = f(t), t \geq 0, \quad (1)$$

$$x(t) = x_0, \quad (2)$$

где $x \in R^n$; A — постоянная $n \times n$ -матрица; $f(t)$ — кусочно-непрерывная n -вектор-функция; x_0 — заданный n -вектор. Считаем, что $A \neq 0$ и $\det A = 0$. Требуется в аналитической форме записать решение системы (1), (2). В отличие от многих других работ, посвященных так или иначе решению этой проблемы никаких дополнительных ограничений на параметры системы (1), (2) не накладывается.

Функцию $f(t)$, $t \geq 0$, назовем допустимой для системы (1), если система (1) для заданной $f(t)$ имеет хотя бы одно решение $x(t)$, $t \geq 0$, такое, что $x(0) = x_0$. Систему (1), (2) назовем совместной, если для каждой допустимой функции $f(t)$, $t \geq 0$ она имеет в точности одно решение.

Пусть P — некоторое числовое поле и $A \in P_{n,n}$. Матрицу $X \in P_{n,n}$ назовем полуобратной для матрицы $A \in P_{n,n}$ и обозначим её через A^- , если она удовлетворяет матричному уравнению $AXA = A$. Известно, что для любой матрицы A матричное уравнение $AXA = A$ разрешимо относительно X и это решение определяется неоднозначным образом. Если матрица A является невырожденной, то $A^- = A^{-1}$.

Теорема 1. Кусочно-непрерывная функция $f(t)$, $t \geq 0$, является допустимой для системы (1) тогда и только тогда, когда для любого t , $t \geq 0$, выполняется равенство

$$(E_n - AA^-)f(t) = 0, \quad (3)$$

где E_n — единичная $n \times n$ -матрица.

Теорема 2. Если функция $f(t)$, $t \geq 0$, является допустимой, то общее решение задачи (1), (2) описывается формулой

$$x(t) = x_0 + \int_0^t A^- f(\tau) d\tau + \int_0^t (E_n - A^- A) u(\tau) d\tau, \quad (4)$$

где $u(t)$, $t \geq 0$ — произвольная интегрируемая на промежутке $[0, +\infty)$ n -вектор-функция.

Замечания.

1. Если матрица A является невырожденной, то любая кусочно-непрерывная n -вектор-функция $f(t)$, $t \geq 0$, является допустимой и решение системы (1), (2) описывается известной формулой

$$x(t) = x_0 + \int_0^t A^{-1} f(\tau) d\tau.$$

2. В общем случае результаты теорем 1, 2 не зависят от выбора полуобратной матрицы A^- и задача Коши (1), (2) имеет неединственное решение.