ЯВНАЯ ФОРМА АВТОПРЕОБРАЗОВАНИЙ БЕКЛУНДА ДЛЯ РЕШЕНИЙ ПЯТОГО УРАВНЕНИЯ ПЕНЛЕВЕ

Филипук Г.В. (Беларусь, Минск)

Для пятого уравнения Пенлеве

$$w'' = \frac{3w-1}{2w(w-1)}w'^2 - \frac{w'}{z} + \frac{(w-1)^2}{z^2}\left(\alpha w + \frac{\beta}{w}\right) + \gamma\frac{w}{z} + \frac{\delta w(w+1)}{w-1} \quad (\mathrm{P}_5)$$

в случае $\delta \neq 0$ известны [1] преобразования Беклунда, связывающие решения при различных значениях параметров

$$F_{s_1,s_2,s_3} : w(z,\alpha,\beta,\gamma,\delta) \to \tilde{w}(z,\tilde{\alpha},\tilde{\beta},\tilde{\gamma},\tilde{\delta}) = 1 - 2\varepsilon_3 kzwF_1^{-1}(w), \qquad (1)$$

$$\left(F_{s_1,s_2,s_3}\right)^{-1} : \tilde{w}(z,\tilde{\alpha},\tilde{\beta},\tilde{\gamma},\tilde{\delta}) \to w(z,\alpha,\beta,\gamma,\delta) = 1 - 8\delta z\tilde{w}F_2^{-1}(\tilde{w}), \qquad (2)$$

где

$$F_1(w) = zw' - \varepsilon_1 cw^2 + (\varepsilon_1 c - \varepsilon_2 a + \varepsilon_3 kz)w + \varepsilon_2 a,$$

$$F_2(\tilde{w}) = (1 - \varepsilon_2 a - \varepsilon_1 c)\varepsilon_3 k - \gamma + (2\gamma + 4z\delta)\tilde{w} + \\ + ((-1 + \varepsilon_2 a + \varepsilon_1 c)\varepsilon_3 k - \gamma)\tilde{w}^2 + 2\varepsilon_3 kz\tilde{w}',$$

$$\tilde{\alpha} = -(\gamma + \varepsilon_3 k(1 - \varepsilon_2 a - \varepsilon_1 c))^2/16\delta,\ \tilde{\beta} = (\gamma - \varepsilon_3 k(1 - \varepsilon_2 a - \varepsilon_1 c))^2/16\delta,$$

$$\tilde{\gamma} = \varepsilon_3 k(\varepsilon_2 a - \varepsilon_1 c),\ \tilde{\delta} = \delta,\ \varepsilon_i^2 = 1,\ i \in \{1,2,3\},$$

а также автопреобразование Беклунда

$$S : w(z,\alpha,-\alpha,0,\delta) \to \tilde{w} = w^{-1}(z,\alpha,-\alpha,0,\delta), \qquad (3)$$

связывающее различные решения при одинаковых значениях параметров.

В настоящей работе выпишем в явной форме автопреобразование $F_{s_1,s_2,s_3} \circ S \circ (F_{s_1,s_2,s_3})^{-1}$. Пусть

$$w = w(z,\alpha,-\alpha,0,\delta),\ w_1 = F_{1,1,s_3}w,\ w_2 = F_{1,-1,s_3}w,$$

$$w_3 = F_{-1,1,s_3}w,\ w_4 = F_{-1,-1,s_3}w,\ \tilde{w}_1 = F_{1,1,s_3}(Sw), \qquad (4)$$

$$\tilde{w}_2 = F_{1,-1,s_3}(Sw),\ \tilde{w}_3 = F_{-1,1,s_3}(Sw),\ \tilde{w}_4 = F_{-1,-1,s_3}(Sw)$$

есть нерациональные решения уравнения (P5), полученные при помощи преобразований (1) – (3). Заметим, что решения пятого уравнения Пенлеве $\tilde{w}_i$ являются функциями w_i и w_i', $i \in \{1,2,3,4\}$. Однако, в силу (1), можно найти алгебраические соотношения между решениями $w, w_i, \tilde{w}_i$. Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Нерациональные решения пятого уравнения Пенлеве (4) связаны следующими функциональными соотношениями:*

$$\tilde{w}_1 = \frac{1}{w_1},\ \tilde{w}_4 = \frac{1}{w_4},$$
$$\tilde{w}_2 = \frac{2\delta zw + \varepsilon_3 kc(w-1)^2(w_2-1)}{2\delta zww_2 + \varepsilon_3 kc(w-1)^2(w_2-1)},$$
$$\tilde{w}_3 = \frac{-2\delta zw + \varepsilon_3 kc(w-1)^2(w_3-1)}{-2\delta zww_3 + \varepsilon_3 kc(w-1)^2(w_3-1)}.$$

Литература. 1. Громак В.И., Лукашевич Н.А. Аналитические свойства решений уравнений Пенлеве. Мн., 1990.