УДК 517.5

В.Н. РУСАК, И.В. РЫБАЧЕНКО

О НАИЛУЧШИХ РАЦИОНАЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ ОДНОГО КЛАССА ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

2π-periodic functions, representable in the form of the generalised convolution of function from L_p and a special kernel in the form of series on orthogonal system are considered. Rate estimations for the best uniform rational approximations with the fixed poles are received.

Ортонормированные системы рациональных функций на единичной окружности были построены в [1, 2]. В применении к аналитическим функциям частные суммы ортогональных рядов по таким системам используются Дж. Уолшем [3]. В пространстве непрерывных 2π-периодических функций приближение частными суммами рядов Фурье по рациональным функциям с фиксированными полюсами рассматривалось в ряде работ М.М. Джрбашяна (см., например, [4]). Для исследования наилучших рациональных приближений со свободными полюсами аналитических и 2π-периодических функций рациональные операторы типа Фурье применялись в [5–7].

В данной работе рассматривается класс 2π-периодических функций $f(x)$, представимых в виде обобщенной свертки функции $h(t) \in L_p[0, 2\pi]$ и специального ядра $K_r(x,t)$ в форме ряда по ортогональной системе рациональных функций, и найдены порядковые оценки для наилучших равномерных рациональных приближений с фиксированными полюсами для функций из названного класса.

Пусть $\{\alpha_k\}_{k=0}^{\infty}$ – заданная последовательность комплексных чисел, причем $|\alpha_k|<1,$ если $1\le k\le n,$ и $\alpha_k=0,$ если $k=0$ или $k\ge n+1.$ Система рациональных функций

$$\rho_0(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \rho_m(z)=\sqrt{\frac{1-|\alpha_m|^2}{2\pi}}\frac{1}{1-\overline{\alpha_m}z}\prod_{k=0}^{m-1}\frac{z-\alpha_k}{1-\overline{\alpha_k}z},\ m\in N, \tag{1}$$

является ортонормированной на единичной окружности в том смысле, что [4]

$$\int_{|\xi|=1}\rho_j(\xi)\overline{\rho_m(\xi)}\,|d\xi|=\delta_{jm}. \tag{2}$$

Заметим, что одновременно с (2) выполняются и равенства

$$\int_{|\xi|=1}\rho_j(\xi)\rho_m(\xi)\,|d\xi|=0,\ j\in N,\ m\in N_0. \tag{3}$$

В свою очередь, система тригонометрических рациональных функций

$$\varphi_0(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \varphi_m(t)=\sqrt{2}\,\mathrm{Re}\,\rho_m\left(e^{it}\right),\ \psi_m(t)=\sqrt{2}\,\mathrm{Im}\,\rho_m\left(e^{it}\right),\ m\in N, \tag{4}$$

будет ортонормированной на $[0,2\pi].$ Действительно, если $m, j\in N,$ с учетом (1) и (4) имеем

$$\int_0^{2\pi}\varphi_m(t)\varphi_j(t)dt=2\int_0^{2\pi}\frac{\rho_m\left(e^{it}\right)+\overline{\rho_m\left(e^{it}\right)}}{2}\frac{\rho_j\left(e^{it}\right)+\overline{\rho_j\left(e^{it}\right)}}{2}dt=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{|\xi|=1}\rho_m(\xi)\rho_j(\xi)\,|d\xi|+\frac{1}{2}\int_{|\xi|=1}\overline{\rho_m(\xi)}\,\overline{\rho_j(\xi)}\,|d\xi|+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{|\xi|=1}\rho_m(\xi)\overline{\rho_j(\xi)}\,|d\xi|+\frac{1}{2}\int_{|\xi|=1}\overline{\rho_m(\xi)}\rho_j(\xi)\,|d\xi|. \tag{5}$$

Если $m\ne j,$ то в силу (2) и (3) каждый из интегралов, стоящих в правой части (5), равен нулю, и, следовательно,

$$\int_0^{2\pi}\varphi_m(t)\varphi_j(t)dt=0,\ m,j\in N,\ m\ne j.$$

Если же $m=j,$ то из (5) следует $\int_0^{2\pi}\varphi_j^2(t)dt=1.$

Аналогичным образом устанавливается, что

$$\int_0^{2\pi}\varphi_m(t)\varphi_0(t)dt=\delta_{m0},\ \int_0^{2\pi}\varphi_m(t)\psi_j(t)dt=0,\ m\in N_0,\ j\in N,$$

$$\int_0^{2\pi}\psi_m(t)\psi_j(t)dt=\delta_{mj},\ m\in N,\ j\in N.$$

Таким образом, доказано, что система тригонометрических рациональных функций (4) является ортонормированной на отрезке $[0,2\pi].$ Очевидно, что все функции этой системы будут 2π-периодическими.

Через $L_p=L_p[0,2\pi],\ p\ge 1,$ обозначаем пространство Лебега измеримых 2π-периодических функций $h(t)$ с обычной нормой

$$\|h(t)\|_{L_p}=\left\{\int_0^{2\pi}|h(t)|^p\,dt\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Введем ядро

$$K_r(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k(x)\varphi_k(t)+\psi_k(x)\psi_k(t)}{k^r},\ r>0, \tag{6}$$

и рассмотрим класс 2π-периодических функций, представимых в виде свертки

$$f(x)=a_0+\int_0^{2\pi}h(t)K_r(x,t)dt,\ h(t)\in L_p,\ r>\frac{1}{p}. \tag{7}$$

Как обычно, через $C_{2\pi}=\{f(x)\}$ обозначаем пространство непрерывных 2π-периодических функций с чебышевской нормой

$$\|f(x)\|_{C_{2\pi}}=\sup_{x\in R}|f(x)|.$$

Определим наконец равномерное наилучшее рациональное приближение для функции $f(x)\in C_{2\pi}$, полагая

$$R_n^T(f)=R_n^T(f;\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)=$$
$$=\inf_{a_k,b_k}\left\|f(x)-\sum_{k=0}^{n}a_k\varphi_k(x)-\sum_{k=1}^{n}b_k\psi_k(x)\right\|_{C_{2\pi}}. \tag{8}$$

Теорема 1. *Если* $h(t)\in L_p[0,2\pi]$, $1\le p<\infty$, *то функция вида* (7) *при* $r>\frac{1}{p}$ *будет принадлежать пространству* $C_{2\pi}$ *и для ее наилучших рациональных приближений выполняется неравенство*

$$R_n^T(f)\le C_1\left(\frac{1}{n}\right)^{r-\frac{1}{p}}. \tag{9}$$

Доказательство. Полагая в (4) $m=n+j$, представим ортогональные функции в виде

$$\varphi_m(t)=\sqrt{2}\,\mathrm{Re}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\prod_{k=0}^{m-1}\frac{e^{it}-\alpha_k}{1-\overline{\alpha_k}e^{it}}\right)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{Re}\left(\prod_{k=1}^{n}\frac{e^{it}-\alpha_k}{1-\overline{\alpha_k}e^{it}}e^{ijt}\right)\overset{\text{def}}{=}$$
$$\overset{\text{def}}{=}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(\Phi_n(t)+jt),\ j=\overline{1,\infty}; \tag{10}$$

$$\psi_m(t)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(\Phi_n(t)+jt),\ j=1,\infty;\ \ \Phi_n(t)=\int_0^t\sum_{k=1}^{n}\frac{1-|\alpha_k|^2}{1-2|\alpha_k|\cos(\theta-\arg\alpha_k)+|\alpha_k|^2}d\theta.$$

Пусть $1<p<\infty$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$. Тогда с учетом (10) и неравенства Минковского при любом ν, $\nu\in N$, имеем

$$\left(\int_0^{2\pi}\left|\sum_{m=n+\nu}^{\infty}\frac{\varphi_m(x)\varphi_m(t)+\psi_m(x)\psi_m(t)}{m^r}\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}=$$
$$=\frac{1}{\pi}\left(\int_0^{2\pi}\left|\sum_{j=\nu}^{\infty}\frac{\cos(\Phi_n(x)-\Phi_n(t)+j(x-t))}{(n+j)^r}\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\le$$
$$\le\frac{1}{\pi}\left(\int_0^{2\pi}\left|\sum_{j=\nu}^{\infty}\frac{\cos j(x-t)}{(n+j)^r}\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}+\frac{1}{\pi}\left(\int_0^{2\pi}\left|\sum_{j=\nu}^{\infty}\frac{\sin j(x-t)}{(n+j)^r}\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}=$$
$$=J_1+J_2, \tag{11}$$

причем J_1 и J_2 не зависят от x.

Возьмем ядро Дирихле $D_j(t)=\frac{\sin\frac{2j+1}{2}t}{2\sin\frac{t}{2}}$, тогда $\cos jt=D_j(t)-D_{j-1}(t)$, и, применив преобразование Абеля, найдем

$$\sum_{j=\nu}^{\infty}\frac{\cos jt}{(n+j)^r}=-\frac{D_{\nu-1}(t)}{(n+\nu)^r}+\sum_{j=\nu}^{\infty}D_j(t)\left(\frac{1}{(n+j)^r}-\frac{1}{(n+j+1)^r}\right). \tag{12}$$

Для L_q – нормы ядра Дирихле имеем

$$\|D_j(t)\|_{L_q[0,2\pi]}=\left(2\int_0^{\pi}\left|\frac{\sin\frac{2j+1}{2}t}{2\sin\frac{t}{2}}\right|^q dt\right)^{\frac{1}{q}}\le$$
$$\le\frac{\pi}{2}\left(2\int_0^{\pi}\frac{\left|\sin\frac{2j+1}{2}t\right|^q}{t^q}dt\right)^{\frac{1}{q}}=$$

$$=\pi 2^{\frac{1}{q}-1}\left(j+\frac{1}{2}\right)^{\frac{q-1}{q}}\left(\int_0^{\left(j+\frac{1}{2}\right)\pi}\left|\frac{\sin u}{u}\right|^q du\right)^{\frac{1}{q}} \le C_2 j^{\frac{1}{p}}. \tag{13}$$

Из соотношений (11–13) вытекает с учетом неравенства Минковского

$$J_1=\frac{1}{\pi}\left\|\int_0^{2\pi}\sum_{j=\nu}^{\infty}\frac{\cos jt}{(n+j)^r}\right\|_{L_q[0,2\pi]}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left\|-\frac{D_{\nu-1}(t)}{(n+\nu)^r}+\sum_{j=\nu}^{\infty}D_j(t)\left(\frac{1}{(n+j)^r}-\frac{1}{(n+j+1)^r}\right)\right\|_{L_q[0,2\pi]}\le$$

$$\le\frac{1}{\pi}\left(\frac{\|D_{\nu-1}(t)\|_{L_q[0,2\pi]}}{(n+\nu)^r}+\sum_{j=\nu}^{\infty}\|D_j(t)\|_{L_q[0,2\pi]}\left(\frac{1}{(n+j)^r}-\frac{1}{(n+j+1)^r}\right)\right)\le$$

$$\le C_3\left(\frac{(\nu-1)^{\frac{1}{p}}}{(n+\nu)^r}+\sum_{j=\nu}^{\infty}j^{\frac{1}{p}}\left(\frac{1}{(n+j)^r}-\frac{1}{(n+j+1)^r}\right)\right)\le$$

$$\le C_3\left(\frac{1}{(n+\nu)^{r-\frac{1}{p}}}+r\sum_{j=\nu}^{\infty}\frac{1}{(n+j)^{r+1-\frac{1}{p}}}\right)\le C_4\left(\frac{1}{n+\nu}\right)^{r-\frac{1}{p}}. \tag{14}$$

Аналогичным образом с применением сопряженных ядер Дирихле устанавливается оценка

$$J_2\le C_5\left(\frac{1}{n+\nu}\right)^{r-\frac{1}{p}}. \tag{15}$$

Подставляя (14) и (15) в (11), придем к неравенству

$$\left\|\sum_{m=n+\nu}^{\infty}\frac{\varphi_m(x)\varphi_m(t)+\psi_m(x)\psi_m(t)}{m^r}\right\|_{L_q[0,2\pi]}\le C_6\left(\frac{1}{n+\nu}\right)^{r-\frac{1}{p}}, \tag{16}$$

где C_6 – абсолютная константа.

Неравенство (16) означает, что L_q – норма остатка ядра (6) сколь угодно мала равномерно относительно x, поэтому из (7) и неравенства

$$|f(x')-f(x'')|\le\int_0^{2\pi}|h(t)|\cdot|K_r(x',t)-K_r(x'',t)|\,dt\le$$

$$\le\|h(t)\|_{L_p[0,2\pi]}\|K_r(x'',t)-K_r(x',t)\|_{L_q[0,2\pi]}$$

вытекает, что $f(x)\in C_{2\pi}$.

Учитывая определение наилучшего приближения (8) и пользуясь неравенством Гельдера и неравенством (16), найдем

$$R_n^T(f)\le\left\|\int_0^{2\pi}h(t)\sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{\varphi_m(x)\varphi_m(t)+\psi_m(x)\psi_m(t)}{m^r}dt\right\|_{C_{2\pi}}\le$$

$$\le\|h(t)\|_{L_p[0,2\pi]}C_6\left(\frac{1}{n+1}\right)^{r-\frac{1}{p}}\le C_7\left(\frac{1}{n}\right)^{r-\frac{1}{p}}, \tag{17}$$

и доказательство теоремы 1 закончено, если $1<p<\infty$.

Очевидно, что в случае $p=1$, соответственно $r>1$ и $q=\infty$, неравенство (16) запишется в форме

$$\left\|\sum_{m=n+\nu}^{\infty}\frac{\varphi_m(x)\varphi_m(t)+\psi(x)\psi(t)}{m^r}\right\|_{C_{2\pi}}\le C_7\left(\frac{1}{n+\nu}\right)^{r-1},$$

поэтому и неравенство (17) будет выполнено.

Заметим в заключение, что порядковая оценка (9) для наилучших тригонометрических рациональных приближений при $r>\frac{1}{p}$, $1\le p<\infty$, достигается на уклонениях частных сумм ряда Фурье функции $f(x)$. В частном случае, когда все $\alpha_k = 0,$ из теоремы 1 вытекает известная оценка для наилучших полиномиальных приближений функций, имеющих производную в смысле Вейля (см., например, [8]).

Аналогичными рассуждениями доказывается и следующая

Теорема 2. *Если* $h(t) \in C_{2\pi},$ *то функция вида* (7) *при* $r > 0$ *также принадлежит* $C_{2\pi}$ *и для ее наилучших рациональных приближений выполнено неравенство*

$$R_n^T(f) \le C_8 \frac{\ln n}{n^r}.$$

Замечание. Наряду с ортогональными системами рациональных функций важную роль играют произведения Бляшке

$$\pi_k(z) = \prod_{j=1}^{k} \frac{z - \alpha_j}{1 - \overline{\alpha_j} z}, \, |\, \alpha_j \,| < 1,$$

и ряды по этим произведениям

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \pi_k(z). \tag{18}$$

Пользуясь неравенством [5] $\int\limits_{|z|=1} |\, \pi'_k(z) \,|\, |\, dz \,| \le 2\pi k,$ нетрудно установить, что функция (18) принадлежит классу Харди $H_1^1,$ если сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} k \,|\, c_k \,|.$ Действительно

$$\int\limits_{|z|=1} |\, f'(z) \,|\, |\, dz \,| \le \sum_{k=1}^{\infty} |\, c_k \,| \int\limits_{|z|=1} |\, \pi'_k(z) \,|\, |\, dz \,| \le \sum_{k=1}^{\infty} k \,|\, c_k \,|.$$

1. Takenaka C. // Japanese Journal of Mathematics. 1925. № 2. P. 129.
2. Malmqwist F. // Comptes rendus du sixiene congres des mathematiciens scandinares. Kopenhagen, 1925. P. 253.
3. Уолш Дж. Интерполяция и аппроксимация рациональными функциями в комплексной области. М., 1961.
4. Джрбашян М. М. // Изв. АН Арм. ССР. Сер. физ.-мат. наук. 1956. Т. 9. № 7. С. 3.
5. Русак В. Н. Рациональные функции как аппарат приближения. Мн., 1979.
6. Русак В. Н. // Мат. сб. 1985. Т. 128. № 4. С. 492.
7. Ровба Е. А. Интерполяция и ряды Фурье в рациональной аппроксимации. Гродно, 2001.
8. Тихомиров В. М. Некоторые вопросы теории приближений. М., 1976.

Поступила в редакцию 19.11.09.

Валентин Николаевич Русак – доктор физико-математических наук, профессор кафедры высшей математики и математической физики.

Игорь Васильевич Рыбаченко – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры высшей математики и математической физики.