КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ С ЗАДАННЫМИ СИСТЕМАМИ КВАЗИПЕРЕСТАНОВОЧНЫХ ПОДГРУПП

В. А. КОВАЛЕВА, **А. Н. СКИБА**

Let A be a subgroup of a group G, K ≤ H ≤ G. Then we say that A covers or avoids the pair (K, H) if either AH = AK or A ∩ H = A ∩ K. The pair (K, H) is called a maximal pair of G if K is a maximal subgroup of H. We say that: (1) A is quasipermutable in G if A either covers or avoids every maximal pair (K, H) of G; (2) A is weakly quasipermutable in G if

G has a subgroup T and a quasipermutable subgroup C such that G = AT and T ∩ A ≤ C ≤ A. Based on these concepts new characterizations of finite groups are obtained

Ключевые слова: (слабо) квазиперестановочная подгруппа

Все рассматриваемые нами группы предполагаются конечными.

Пусть A – подгруппа группы G, K ≤ H ≤ G. Тогда мы говорим, что: (1) A покрывает пару (K, H), если AH = AK; (2) A изолирует пару (K, H), если A ∩ K = A ∩ H. Пара (K, H) называется максимальной в G, если K – максимальная подгруппа группы H.

Определение. Пусть A – подгруппа группы G. Тогда мы говорим, что: (1) A является квазиперестановочной в G, если A покрывает или изолирует каждую максимальную пару (K, H) из G; (2) A является слабо квазиперестановочной в G, если в G существует такая подгруппа T и такая квазиперестановочная подгруппа C, что G = AT и T ∩ A ≤ C ≤ A.

Целью данной работы является изучение групп, выделенные системы подгрупп которых являются (слабо) квазиперестановочными. В частности, нами доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. Пусть G – группа. Тогда справедливы следующие утверждения:

(1) Если каждая минимальная подгруппа нечетного порядка группы G слабо квазиперестановочна в G, то G является 2'-сверхразрешимой.

(2) Если группа G разрешима и каждая подгруппа порядка 2 группы G дополняема в G, то G 2-нильпотентна.

Теорема 2. Пусть G – группа и p – такой простой делитель порядка группы G, что (|G|, p-1) = 1. Группа G p-нильпотентна тогда и только тогда, когда для силовской p-подгруппы P из G каждая ее максимальная подгруппа или каждая ее циклическая подгруппа простого порядка и порядка 4 (если P – неабелева 2-группа) слабо квазиперестановочна в G.

Теорема 3. Пусть E – нормальная подгруппа группы G. Предположим, что для любой силовской подгруппы P из E каждая ее циклическая подгруппа простого порядка и порядка 4 является слабо квазиперестановочной в G. Тогда каждый главный фактор группы G ниже E является циклическим.

Произведение всех нормальных подгрупп группы G, чьи нефраттиньевы G-главные факторы являются циклическими, называется **UΦ**-гиперцентром группы G [1] и обозначается $Z_{\mathbf{U\Phi}}(G)$.

Теорема 4. Пусть E – нормальная подгруппа группы G. Предположим, что для любой силовской подгруппы P из E каждая ее максимальная подгруппа или каждая ее циклическая подгруппа простого порядка и порядка 4 является слабо квазиперестановочной в G. Тогда $E \le Z_{\mathbf{U\Phi}}(G)$.

Теорема 5. Разрешимая группа G сверхразрешима тогда и только тогда, когда каждая ее субнормальная подгруппа является квазиперестановочной в G.

Теорема 6. Пусть G – группа. Следующие утверждения эквивалентны:

(1) G сверхразрешима.

(2) Каждая подгруппа из F*(G) квазиперестановочна в G.

(3) Каждая циклическая подгруппа простого порядка и порядка 4 из F*(G) слабо квазиперестановочна в G.

В данной теореме символ F*(G) обозначает обобщенную подгруппу Фиттинга группы G.

Литература

1. *Shemetkov, L.A.* On the XΦ-hypercentre of finite groups / L.A. Shemetkov, A.N. Skiba // J. Algebra. – 2009. – № 322. – P. 106-2117.