Міністэрства адукацыі Рэспублікі Беларусь
Беларускі дзяржаўны універсітэт

А. А. Ягораў, І. В. Рыбачэнка

ПРАКТЫКУМ ПА МЕТАДАХ МАТЭМАТЫЧНАЙ ФІЗІКІ

ЧАСТКА 1

Мінск
2013

ПРАДМОВА

Дадзены дапаможнік напісаны на аснове досведу правядзення практычных заняткаў па метадах матэматычнай фізікі на факультэце радыёфізікі і кампутарных тэхналогій Беларускага дзяржаўнага універсітэту. Ён складаецца з дзвюх частак. Першая частка, выкладзеная ў гэтым дапаможніку, змяшчае тры тэмы: “Шэрагі і пераўтварэнні Фур’е”, “Аперацыйнае злічэнне” і “Раўнанні гіпербалічнага тыпу”. Прапанаваны матэрыял дадаткова размеркаваны па занятках згодна з дзеючай навучальнай праграмай “Метады матэматычнай фізікі”. Па кожнай тэме даюцца сціслыя тэарэтычныя звесткі, прыводзяцца развязанні тыповых задач і прапаноўваюцца задачы для самастойнай работы. Падбіраючы задачы для дапаможніку аўтары абапіраліся на літаратуру, пералічаную ў бібліяграфіі.

Дапаможнік прызначаны для студэнтаў факультэту радыёфізікі і кампутарных тэхналогій БДУ. Ён можа быць карысным для студэнтаў матэматычных і фізічных факультэтаў вну, у навучальных праграмах якіх прадугледжаны дадзеныя тэмы.

ТЭМА I. ШЭРАГІ І ПЕРАЎТВАРЭННІ ФУР'Е

1. Шэрагі Фур'е.

Будзем разглядаць трыганаметрычную сістэму функцый

$$1,\ \cos\frac{\pi x}{l},\ \sin\frac{\pi x}{l},\ \ldots,\ \cos\frac{k\pi x}{l},\ \sin\frac{k\pi x}{l},\ \ldots \tag{1}$$

Усе функцыі сістэмы (1) непарыўныя на $\mathbb{R}$ і перыядычныя з перыядам $2l$. Трыганаметрычная сістэма функцый з'яўляецца ***артаганальнай*** на адрэзку $[-l,l]$, г. зн. інтэграл па x ад 0 да l ад здабытку любых дзвюх розных функцый гэтай сістэмы роўны нулю.

Азначэнне 1. ***Трыганаметрычным шэрагам*** *называецца функцыйны шэраг выгляду*

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\Big(a_k\cos\frac{k\pi x}{l}+b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\Big). \tag{2}$$

Рэчаісныя лікі a_0, a_k, b_k, $k=1,2,\ldots,$ *называюцца* ***каэфіцыентамі трыганаметрычнага шэрагу****.*

Калі функцыя $f(x)$ кавалкава-непарыўная на адрэзку $[-l,l]$, то існуюць лікі

$$a_0=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}f(x)\,dx,\quad a_k=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx,\quad k=1,2,\ldots, \tag{3}$$

$$b_k=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx,\quad k=1,2,\ldots, \tag{4}$$

якія называюцца ***каэфіцыентамі Фур'е*** функцыі $f(x)$. Трыганаметрычны шэраг (2), каэфіцыенты якога вызначаюцца па формулах (3), (4), называецца ***шэрагам Фур'е*** функцыі $f(x)$.

Азначэнне 2. *Функцыя $f(x)$ называецца* ***кавалкава-гладкай на адрэзку*** *$[a, b]$, калі гэты адрэзак можна разбіць канцоўным лікам пунктаў $x_0 = a, x_1, \ldots, x_{m-1}, x_m = b$ так, што на кожным частковым адрэзку $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{m-1}, x_m]$ функцыі $f(x)$ і $f'(x)$ будуць непарыўнымі пасля адпаведнага даазначэння на канцах адрэзкаў.*

Тэарэма 1. *Няхай $f(x)$ — кавалкава-гладкая на адрэзку $[-l, l]$ функцыя. Тады яе шэраг Фур'е збягаецца і яго сума роўная:*

1) *$f(x)$ у пунктах непарыўнасці;*

2) $\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ *у пунктах разрыву;*

3) $\dfrac{f(-l+0)+f(l-0)}{2}$, *калі $x = \pm l$.*

Тэарэма 2. *Няхай $f(x)$ — $2l$-перыядычная на ўсёй рэчаіснай восі і кавалкава-гладкая на адрэзку $[-l, l]$ функцыя. Тады яе шэраг Фур'е збягаецца ў кожным пункце $x \in \mathbb{R}$, прычым яго сума роўная $f(x)$ у пунктах непарыўнасці функцыі і $\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ у пунктах разрыву.*

Заўвага 1. *Для $2l$-перыядычнай функцыі $f(x)$ інтэграл ад яе па кожным адрэзку даўжыні $2l$ мае адно і тое ж значэнне. Такім чынам, каэфіцыенты Фур'е можна вылічаць па формулах (3), (4), інтэгруючы па кожным такім адрэзку.*

Калі функцыя $f(x)$ цотная, то ўсе каэфіцыенты $b_k = 0$ і яе шэраг Фур'е мае выгляд

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{k\pi x}{l}, \tag{5}$$

$$a_k = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx, \quad k = 0, 1, \ldots \tag{6}$$

Калі ж функцыя $f(x)$ няцотная, то ўсе каэфіцыенты $a_k = 0$ і шэраг Фур'е $f(x)$ набывае выгляд

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin \frac{k\pi x}{l}, \tag{7}$$

$$b_k = \frac{2}{l} \int\limits_0^l f(x) \sin \frac{k\pi x}{l}\, dx, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{8}$$

Няхай $f(x)$ — кавалкава-гладкая на адрэзку $[0, l]$ функцыя. Тады на гэтым адрэзку яе можна раскласці як у шэраг Фур'е (5), які змяшчае толькі косінусы, так і ў шэраг Фур'е (7), які змяшчае толькі сінусы. У першым выпадку функцыю $f(x)$ неабходна працягнуць цотным чынам на адрэзак $[-l, 0]$, пры гэтым каэфіцыенты Фур'е будуць вылічацца па формулах (6). У другім выпадку функцыю $f(x)$ неабходна працягнуць няцотным чынам на адрэзак $[-l, 0]$, пры гэтым каэфіцыенты Фур'е будуць вылічацца па формулах (8).

Тэарэма 3. *Няхай функцыя $f(x)$ непарыўная, кавалкава-гладкая на адрэзку $[-l, l]$ і задавальняе ўмову $f(-l) = f(l)$. Тады яе шэраг Фур'е збягаецца раўнамерна да $f(x)$:*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \Bigl(a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l} \Bigr) = f(x).$$

Азначэнне 3. *Сістэма функцый $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_k(x), \ldots$, называецца артаганальнай з вагой $\rho(x)$ на адрэзку $[a, b]$, калі*

$$\int\limits_a^b \rho(x)\varphi_n(x)\varphi_m(x)\, dx = 0, \quad n \neq m.$$

Азначэнне 4. *Артаганальная з вагой $\rho(x)$ на адрэзку $[a, b]$ сістэма кавалкава-непарыўных функцый $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_k(x), \ldots$, называецца* ***замкнёнай****, калі*

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \|\varphi_k\|^2 = \int\limits_a^b \rho(x) f^2(x)\, dx,$$

дзе $f(x)$ — *кавалкава-непарыўная функцыя,* c_k — *яе каэфіцыенты Фур'е, якія вызначаюцца па формулах*

$$c_k = \frac{1}{\|\varphi_k\|^2} \int\limits_a^b \rho(x) f(x) \varphi_k(x)\, dx, \quad \|\varphi_k\|^2 = \int\limits_a^b \rho(x) \varphi_k^2(x)\, dx.$$

Тэарэма 4. *Трыганаметрычная сістэма (1) з'яўляецца замкнёнай, г. зн. мае месца* ***роўнасць Парсэваля***

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{l} \int\limits_{-l}^{l} f^2(x)\, dx. \tag{9}$$

2. Інтэгральная формула Фур'е.

Азначэнне 5. *Функцыя* $f(x)$ *называецца* ***абсалютна інтэгравальнай*** *на ўсёй лікавай прамой, калі збягаецца інтэграл*

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \big|f(x)\big| dx.$$

Тэарэма 5. *Няхай* $f(x)$ — *абсалютна інтэгравальная на рэчаіснай восі і кавалкава-гладкая на кожным канцоўным адрэзку функцыя. Тады мае месца роўнасць*

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\infty} d\lambda \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \lambda (t - x)\, dt = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}. \tag{10}$$

Заўважым, што ў пунктах непарыўнасці правая частка суадносіны (10) роўная $f(x)$.

Будзем абазначаць

$$a(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \lambda t\, dt, \quad b(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \lambda t\, dt. \tag{11}$$

Тады роўнасць (10) у пунктах непарыўнасці функцыі $f(x)$ можна перапісаць у выглядзе, аналагічным шэрагу Фур'е:

$$f(x) = \int\limits_0^{\infty} \big[a(\lambda) \cos \lambda x + b(\lambda) \sin \lambda x\big] d\lambda. \tag{12}$$

Формула (12) з каэфіцыентамі, якія вызначаюцца паводле (11), называецца ***інтэгральнай формулай Фур'е***, а сам інтэграл у правай частцы (12) — ***інтэгралам Фур'е***.

Для цотнай функцыі $f(x)$ інтэгральная формула Фур'е (12) спрашчаецца і набывае выгляд

$$f(x) = \int\limits_0^\infty a(\lambda)\cos\lambda x\, d\lambda, \quad a(\lambda) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty f(t)\cos\lambda t\, dt. \tag{13}$$

Аналагічна для няцотнай функцыі $f(x)$ атрымаем

$$f(x) = \int\limits_0^\infty b(\lambda)\sin\lambda x\, d\lambda, \quad b(\lambda) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty f(t)\sin\lambda t\, dt. \tag{14}$$

Калі кавалкава-гладкая на кожным канцоўным адрэзку функцыя $f(x)$ вызначаная і абсалютна інтэгравальная толькі на інтэрвале $(0,\infty)$, то яе можна працягнуць на прамежак $(-\infty,0)$ цотным або няцотным чынам. Тады $f(x)$ выяўляецца ў дадзеным інтэрвале або формулай (13) (цотны працяг), або формулай (14) (няцотны працяг).

Суадносіна выгляду

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^\infty d\lambda \int\limits_{-\infty}^\infty f(t)e^{-i\lambda(t-x)}dt \tag{15}$$

называецца ***інтэгральнай формулай Фур'е ў камплекснай форме***. Відавочна, што формулу (15) можна запісаць у выглядзе дзвюх сіметрычных роўнасцяў:

$$\Phi(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^\infty f(t)e^{-i\lambda t}dt, \tag{16}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^\infty \Phi(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda. \tag{17}$$

Функцыя $\Phi(\lambda)$, якая азначаецца роўнасцю (16), называецца ***пераўтварэннем Фур'е*** выходнай функцыі $f(x)$. Формула (17), якая выяўляе функцыю $f(x)$ праз яе пераўтварэнне Фур'е, называецца ***формулой звароту.*** Інтэграл у (17) трэба разумець у сэнсе галоўнага значэння па Кашы, г. зн.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda = \lim_{M\to\infty} \int_{-M}^{M} \Phi(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda.$$

Занятак 1

Задача 1. Раскласці ў шэраг Фур'е функцыю

$$f(x) = \begin{cases} A, & 0 \leqslant x \leqslant l, \\ 0, & l < x \leqslant 2l, \end{cases}$$

дзе A — канстанта, на адрэзку $[0, 2l]$. Пабудаваць графікі функцыі $f(x)$ і сумы $S(x)$ яе шэрагу Фур'е.

Развязанне. Для вылічэння каэфіцыентаў a_k і b_k выкарыстаем формулы (3), (4), выбіраючы ў якасці прамежку інтэгравання адрэзак $[0, 2l]$. Маем

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_0^{2l} f(x)\, dx = \frac{1}{l} \int_0^{l} A\, dx = A, \quad a_k = \frac{1}{l} \int_0^{l} A \cos \frac{k\pi x}{l}\, dx =$$

$$= \frac{A}{k\pi} \sin \frac{k\pi x}{l}\bigg|_0^l = 0, \quad b_k = \frac{1}{l} \int_0^{l} A \sin \frac{k\pi x}{l}\, dx =$$

$$= \frac{A}{k\pi}\Big(-\cos\frac{k\pi x}{l}\Big)\bigg|_0^l = \frac{A}{k\pi}\big[1 - (-1)^k\big] = \begin{cases} 0, & k = 2n, \\ \dfrac{2A}{\pi(2n+1)}, & k = 2n+1. \end{cases}$$

Такім чынам, трыганаметрычны шэраг Фур'е функцыі $f(x)$ мае выгляд

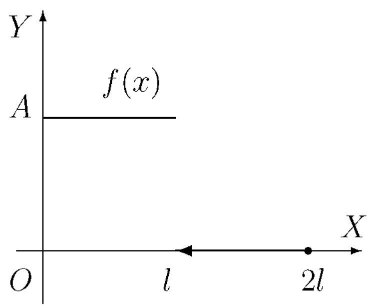
$$f(x) = \frac{A}{2} + \frac{2A}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{l}.$$

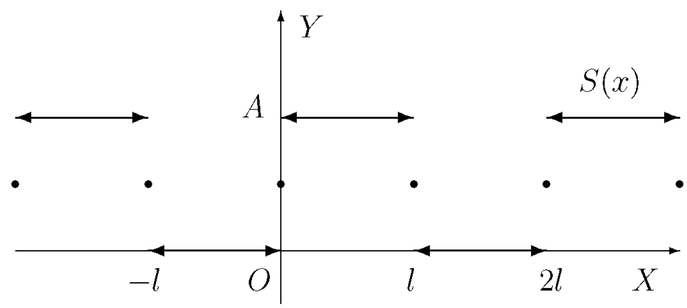
Паводле тэарэмы 1, для сумы шэрагу Фур'е $S(x)$ на канцах адрэзку і ў пункце разрыву маем

$$S(0) = S(2l) = \frac{f(2l-0)+f(0+0)}{2} = \frac{0+A}{2} = \frac{A}{2},$$
$$S(l) = \frac{f(l-0)+f(l+0)}{2} = \frac{A+0}{2} = \frac{A}{2}.$$

Па-за адрэзкам $[0,2l]$ $S(x)$ мае $2l$-перыядычны працяг.

Пабудуем графікі $f(x)$ і $S(x)$.





Задача 2. Раскласці ў шэраг Фур'е функцыю $f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}$ на адрэзку $[0,2\pi]$. Пабудаваць графікі функцыі $f(x)$ і сумы $S(x)$ яе шэрагу Фур'е.

Развязанне. Ізноў для вылічэння каэфіцыентаў a_k і b_k выкарыстаем формулы (3), (4), лічачы $l = \pi$ і інтэгруючы па адрэзку $[0,2\pi]$:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2}\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}x - \frac{x^2}{4}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 0,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2}\cos kx\,dx = \frac{1}{2\pi k}\int\limits_0^{2\pi}(\pi - x)\,d(\sin kx) = 0,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2}\sin kx\,dx = -\frac{1}{2\pi k}\int\limits_0^{2\pi}(\pi - x)\,d(\cos kx) = \frac{1}{k}.$$

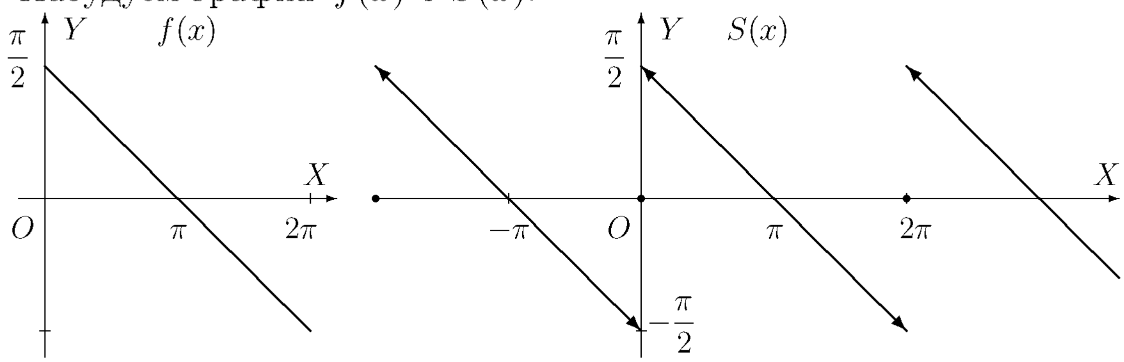
Такім чынам, на адрэзку $[0,2\pi]$ мае месца расклад

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}.$$

Сума шэрагу Фур'е на канцах адрэзку будзе роўная

$$S(0) = S(2\pi) = \frac{f(0+0) + f(2\pi - 0)}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

Пабудуем графікі $f(x)$ і $S(x)$.



Задача 3. Раскласці ў шэраг Фур'е функцыю $f(x) = |x|$ на адрэзку $[-l, l]$. Пабудаваць графікі функцыі $f(x)$ і сумы $S(x)$ яе шэрагу Фур'е.

Развязанне. $f(x) = |x|$ цотная, непарыўная на адрэзку $[-l, l]$ функцыя, прычым $f(-l) = f(l)$. На падставе тэарэмы 1 сума шэрагу Фур'е на канцах адрэзку будзе роўная $S(\pm\, l) = f(-l) = f(l)$. Каэфіцыенты Фур'е будзем вылічаць па формулах (6). Атрымаем

$$b_k = 0, \quad a_0 = \frac{2}{l}\int\limits_0^l x\,dx = \frac{2}{l}\cdot\frac{x^2}{2}\bigg|_0^l = l,$$

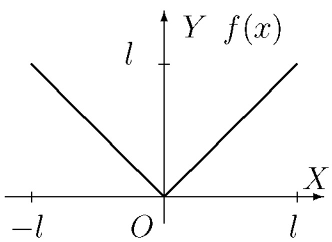
$$a_k = \frac{2}{l}\int\limits_0^l x\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx = \frac{2}{k\pi}\int\limits_0^l xd\left(\sin\frac{k\pi x}{l}\right) =$$

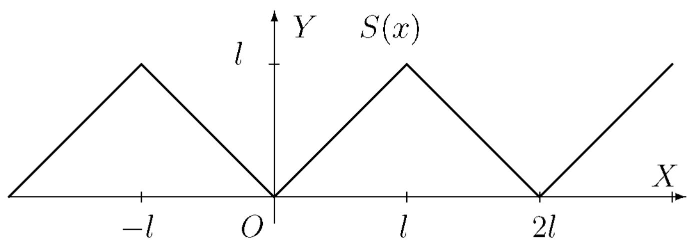
$$= \frac{2l}{k^2\pi^2}\left(\cos k\pi - 1\right) = \begin{cases} 0, & k = 2n, \\ -\dfrac{4l}{(2n+1)^2\pi^2}, & k = 2n+1. \end{cases}$$

Паводле формулы (5), на адрэзку $[-l, l]$ праўдзіцца роўнасць

$$|x| = \frac{l}{2} - \frac{4l}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\cos\frac{(2n+1)\pi x}{l}.$$

Пабудуем графікі $f(x)$ і $S(x)$.





Задача 4. Раскласці ў шэраг Фур'е функцыю $f(x) = x\cos x$ на адрэзку $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Пабудаваць графікі функцыі $f(x)$ і сумы $S(x)$ яе шэрагу Фур'е.

Развязанне. Функцыя $f(x) = x\cos x$ на адрэзку $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ непарыўная і задавальняе ўмовы $f\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$, таму сума яе шэрагу Фур'е на зададзеным адрэзку супадае з самой функцыяй. З прычыны няцотнасці каэфіцыенты Фур'е будзем вылічаць па формулах (8), лічачы $l = \dfrac{\pi}{2}$. Маем $a_k = 0$,

$$b_k = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x \sin 2kx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\big[\sin(2k+1)x + \sin(2k-1)x\big]dx =$$

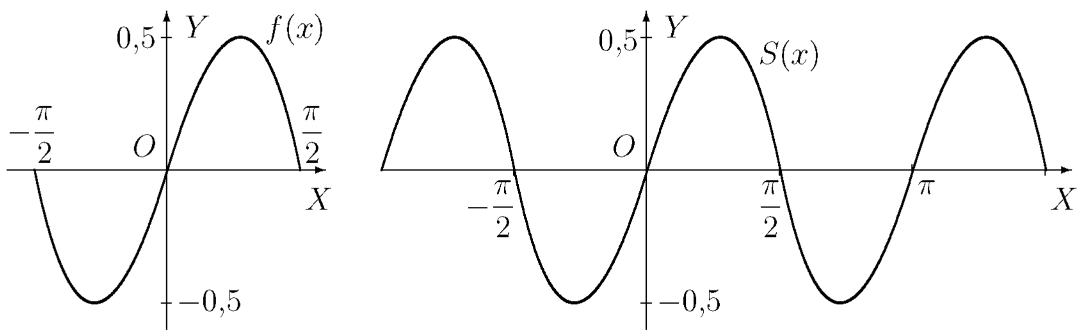
$$= -\frac{2}{\pi(2k+1)}\int_0^{\frac{\pi}{2}} xd\big[\cos(2k+1)x\big] - \frac{2}{\pi(2k-1)}\int_0^{\frac{\pi}{2}} xd\big[\cos(2k-1)x\big] =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\pi k\right)}{(2k+1)^2} + \frac{\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}+\pi k\right)}{(2k-1)^2}\right] = \frac{16k(-1)^{k+1}}{\pi(4k^2-1)^2}.$$

Такім чынам, паводле (7), расклад ў шэраг Фур'е мае выгляд

$$x\cos x = \frac{16}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k(-1)^{k+1}}{(4k^2-1)^2}\sin 2kx.$$

Пабудуем графікі $f(x)$ і $S(x)$.



Раскласці функцыю $f(x)$ у шэраг Фур'е на зададзеным адрэзку.

5. $f(x) = \operatorname{sgn} x$ на $[-l, l]$.

6. $f(x) = x$ на $[-\pi, \pi]$.

7. $f(x) = x$ на $[a, a + 2l]$.

8. $f(x) = x^2$ на $[-1, 1]$.

9. $f(x) = l^2 - x^2$ на $[-l, l]$.

10. $f(x) = \begin{cases} ax, & -\pi \leqslant x \leqslant 0, \\ bx, & 0 < x \leqslant \pi, \end{cases}$ $a, b = \text{const}$, на $[-\pi, \pi]$.

11. $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}, \\ \pi - x, & \dfrac{\pi}{2} < x \leqslant \pi, \end{cases}$ на $[0, \pi]$.

12. $f(x) = \begin{cases} 1, & -\pi \leqslant x \leqslant 0, \\ 1 - x, & 0 < x \leqslant \pi, \end{cases}$ на $[-\pi, \pi]$.

13. $f(x) = \begin{cases} x, & -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ x + 1, & 0 < x \leqslant 1, \end{cases}$ на $[-1, 1]$.

14. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leqslant x \leqslant 0, \\ x^2, & 0 < x \leqslant \pi, \end{cases}$ на $[-\pi, \pi]$.

15. $f(x) = \begin{cases} 0, & -\pi \leqslant x \leqslant 0, \\ \sin x, & 0 < x \leqslant \pi, \end{cases}$ на $[-\pi, \pi]$.

16. $f(x) = \begin{cases} 0, & \dfrac{\pi}{2} \leqslant |x| \leqslant \pi, \\ \cos x, & |x| < \dfrac{\pi}{2}, \end{cases}$ на $[-\pi, \pi]$.

17. $f(x) = \begin{cases} -1, & -l \leqslant x \leqslant 0, \\ 1, & 0 < x \leqslant l, \end{cases}$ на $[-l, l]$.

18. $f(x) = \begin{cases} 0, & -l \leqslant x \leqslant 0, \\ 1, & 0 < x \leqslant l, \end{cases}$ на $[-l, l]$.

19. $f(x) = \begin{cases} x, & -l \leqslant x \leqslant 0, \\ 0, & 0 < x \leqslant l, \end{cases}$ на $[-l, l]$.

20. $f(x) = \cos ax$, $a \neq \dfrac{k\pi}{l}$, на $[-l, l]$.

21. $f(x) = \sin ax$, $a \neq \dfrac{k\pi}{l}$, на $[-l, l]$.

22. $f(x) = x \sin x$ на $[-\pi, \pi]$.

23. $f(x) = e^{ax}$, $a \neq 0$, на $[-\pi, \pi]$.

Занятак 2

Задача 24. Раскласці ў шэраг Фур'е функцыю $f(x) = \operatorname{sgn}(\cos x)$.

Развязанне. Функцыя $f(x)$ з'яўляецца кавалкава-сталай, перыядычнай з перыядам 2π і цотнай. Возьмем у якасці асноўнага адрэзак $[-\pi, \pi]$ і выкарыстаем формулы (6):

$$b_k = 0, \quad a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \operatorname{sgn}(\cos x)\, dx = \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} dx \right) = 0,$$

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \operatorname{sgn}(\cos x) \cos kx\, dx = \frac{2}{\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos kx\, dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos kx\, dx \right) =$$

$$= \frac{4}{k\pi} \sin \frac{k\pi}{2} = \begin{cases} 0, & k = 2n, \\ \dfrac{4(-1)^n}{\pi(2n+1)}, & k = 2n+1. \end{cases}$$

У пунктах разрыву $x = \dfrac{\pi}{2} + m\pi$, $m \in \mathbb{Z}$, сума шэрагу роўная 0. Такім чынам, праўдзіцца роўнасць

$$\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}\cos(2n+1)x = \begin{cases}\operatorname{sgn}(\cos x), & x \neq \dfrac{\pi}{2} + m\pi,\\ 0, & x = \dfrac{\pi}{2} + m\pi, \quad m \in \mathbb{Z}.\end{cases}$$

Задача 25. Раскласці ў шэраг Фур'е перыядычную функцыю $f(x) = \arcsin(\sin x)$.

Развязанне. Функцыя $f(x)$ перыядычная з перыядам 2π, непарыўная і кавалкава-гладкая на адрэзку $[-\pi, \pi]$. Пры гэтым

$$f(-x) = \arcsin\bigl[\sin(-x)\bigr] = \arcsin(-\sin x) = -\arcsin(\sin x).$$

Такім чынам, $f(x)$ няцотная функцыя. Вылучым у якасці асноўнага адрэзак $[-\pi, \pi]$ і ўлічым, што

$$f(x) = \begin{cases}\arcsin(\sin x) = x, & 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2},\\ \arcsin\bigl[\sin(\pi - x)\bigr] = \pi - x, & \dfrac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi.\end{cases}$$

Выкарыстоўваючы формулы (8), атрымаем

$$a_k = 0, \quad b_k = \frac{2}{\pi}\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin kx\,dx + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(\pi - x)\sin kx\,dx\right) =$$

$$= -\frac{2}{k\pi}\left(x\cos kx\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos kx\,dx + (\pi - x)\cos kx\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\cos kx\,dx\right) =$$

$$= -\frac{2}{k\pi}\left(\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi k}{2} - \frac{1}{k}\sin kx\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi k}{2} + \frac{1}{k}\sin kx\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\right) =$$

$$= \frac{4}{k^2\pi}\sin\frac{k\pi}{2} = \begin{cases}0, & k = 2n,\\ \dfrac{4(-1)^n}{\pi(2n+1)^2}, & k = 2n+1.\end{cases}$$

Такім чынам, на ўсёй лікавай восі маем расклад ў шэраг

$$\arcsin(\sin x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\sin(2n+1)x.$$

Задача 26. Раскласці ў шэраг Фур'е функцыю $f(x) = |\sin x|$.

Развязанне. Функцыя $f(x)$ з'яўляецца непарыўнай на рэчаіснай восі і кавалкава-гладкай на кожным канцоўным адрэзку. Акрамя таго, яна цотная і перыядычная з перыядам π. Выбіраючы ў якасці асноўнага адрэзак $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, атрымаем

$$b_k = 0, \quad a_0 = \frac{2}{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx = \frac{4}{\pi}(-\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{\pi},$$

$$a_k = \frac{2}{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\cos 2kx\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\big[\sin(1+2k)x + \sin(1-2k)x\big]dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{\cos(1+2k)x}{1+2k}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{\cos(1-2k)x}{1-2k}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\right] = -\frac{4}{\pi(4k^2-1)}.$$

Такім чынам, расклад ў шэраг Фур'е мае выгляд

$$|\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}\cos 2kx.$$

Задача 27. Раскласці ў шэраг Фур'е функцыю $f(x) = x - [x]$, дзе $[x]$ — цэлая частка ліку x.

Развязанне. Разгледзім $f(x)$ на трох суседніх прамежках:

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & -1 \leqslant x < 0, \\ x, & 0 \leqslant x < 1, \\ x-1, & 1 \leqslant x < 2. \end{cases}$$

Відавочна, што функцыя $f(x)$ з'яўляецца кавалкава-гладкай на $\mathbb{R}$ і перыядычнай з перыядам 1. Выбіраючы ў якасці асноўнага адрэзак

$[0,1]$ і лічачы $l = \dfrac{1}{2}$, атрымаем

$$a_0 = \frac{1}{\frac{1}{2}} \int_0^1 x\,dx = 2 \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = 1, \quad a_k = \frac{1}{\frac{1}{2}} \int_0^1 x \cos 2k\pi x\,dx =$$

$$= \frac{1}{k\pi}\left(x \sin 2k\pi x\Big|_0^1 - \int_0^1 \sin 2k\pi x\,dx \right) = \frac{1}{2(k\pi)^2} \cos 2k\pi x\Big|_0^1 = 0,$$

$$b_k = \frac{1}{\frac{1}{2}} \int_0^1 x \sin 2k\pi x\,dx = -\frac{1}{k\pi}\, x \cos 2k\pi x\Big|_0^1 = -\frac{1}{k\pi}.$$

Паводле тэарэмы 2, у пунктах разрыву $x = m$, $m \in \mathbb{Z}$, сума шэрагу роўная $\dfrac{1}{2}$. Канчаткова прыходзім да роўнасці

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin 2k\pi x = \begin{cases} x - [x], & x \neq m, \\ \dfrac{1}{2}, & x = m, \quad m \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

28. Высветліць, якім будзе шэраг Фур'е для трыганаметрычнага мнагаскладу

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \big(\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx\big).$$

Раскласці перыядычныя функцыі у шэраг Фур'е.

29. $f(x) = \cos^4 x$.

30. $f(x) = \sin^5 x$.

31. $f(x) = \arcsin(\cos x)$.

32. $f(x) = |\cos x|$.

33. $f(x) = \operatorname{sgn}(\sin x)$.

34. $f(x) = (x)$ — адлегласць да бліжэйшага цэлага ліку.

35. $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n \frac{\sin nx}{\sin x}, \quad |\alpha| < 1.$

Занятак 3

Задача 36. Функцыю $f(x) = x^2$ раскласці ў шэраг Фур'е:
1) па косінусах у інтэрвале $(0, \pi)$;
2) па сінусах у інтэрвале $(0, \pi)$;
3) у інтэрвале $(0, 2\pi)$.
Выкарыстоўваючы гэтыя расклады, знайсці сумы лікавых шэрагаў:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}. \tag{18}$$

Развязанне. Працягваючы функцыю $f(x)$ цотным чынам на інтэрвал $(-\pi, 0)$ і ўжываючы формулы (6), атрымаем

$$b_k = 0, \quad a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{x^3}{3}\bigg|_0^{\pi} = \frac{2\pi^2}{3},$$

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos kx \, dx = \frac{2}{k\pi}\left(x^2 \sin kx \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2x \sin kx \, dx \right) =$$

$$= \frac{4}{k^2\pi}\left(x \cos kx \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \cos kx \, dx \right) = \frac{4}{k^2\pi} \pi \cos k\pi = \frac{4(-1)^k}{k^2}.$$

Такім чынам, шэраг Фур'е мае выгляд

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos kx, \quad -\pi \leqslant x \leqslant \pi. \tag{19}$$

Адзначым, што з прычыны цотнасці функцыі $f(x) = x^2$ расклад (19) мае месца не толькі ў інтэрвале $(0, \pi)$, але і на ўсім адрэзку $[-\pi, \pi]$. Па-за прамежкам $[-\pi, \pi]$ сума шэрагу Фур'е дае функцыю, якая атрымоўваецца перыядычным працягам $f(x)$.

Далей працягнем функцыю $f(x)$ няцотным чынам на інтэрвал $(-\pi, 0)$ і выкарыстаем формулы (8). Маем $a_k = 0$,

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \sin kx \, dx = -\frac{2}{k\pi}\left(x^2 \cos kx \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} 2x \cos kx \, dx \right) =$$

$$= \frac{2\pi(-1)^{k+1}}{k} + \frac{4}{k^2\pi}\left(x\sin kx\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \sin kx\,dx\right) = \frac{2\pi(-1)^{k+1}}{k} +$$

$$+ \frac{4}{k^3\pi}\cos kx\Big|_0^\pi = \frac{2\pi(-1)^{k+1}}{k} - \frac{4}{k^3\pi}\left[1-(-1)^k\right].$$

У выніку атрымаем расклад $f(x) = x^2$ толькі для $x \in (0,\pi)$:

$$x^2 = 2\pi\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\sin kx - \frac{8}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{(2n+1)^3}, \quad 0 < x < \pi. \quad (20)$$

У інтэрвале $(-\pi, 0)$ сума шэрагу з правай часткі (20) супадае з функцыяй $(-x^2)$, а па-за інтэрвалам $(-\pi,\pi)$ дае функцыю, якая атрымоўваецца перыядычным працягам $\widetilde{f}(x) = \begin{cases} -x^2, & -\pi < x \leqslant 0, \\ x^2, & 0 \leqslant x < \pi. \end{cases}$

Раскладзем функцыю $f(x)$ у шэраг Фур'е ў інтэрвале $(0, 2\pi)$. Вылічым каэфіцыенты a_k, b_k, інтэгруючы па гэтым прамежку:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2 dx = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^{2\pi} = \frac{8\pi^2}{3},$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\cos kx\,dx = \frac{1}{k\pi}\left(x^2\sin kx\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} 2x\sin kx\,dx\right) = \frac{4}{k^2},$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x^2\sin kx\,dx = -\frac{1}{k\pi}\left(x^2\cos kx\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} 2x\cos kx\,dx\right) = -\frac{4\pi}{k}.$$

Такім чынам, мае месца расклад

$$x^2 = \frac{4\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k^2} - 4\pi\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k}, \quad 0 < x < 2\pi. \quad (21)$$

Па-за прамежкам $(0, 2\pi)$ сума шэрагу Фур'е (21) дае функцыю, якая атрымоўваецца 2π-перыядычным працягам $f(x)$.

Для знаходжання сумаў лікавых шэрагаў выкарыстаем формулу (19), паслядоўна падстаўляючы $x = \pi$ і $x = 0$. Маем

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

$$0 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2} \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Тым самым знойдзены сумы першых двух з лікавых шэрагаў (18). Складваючы зараз атрыманыя роўнасці, знаходзім

$$\frac{\pi^2}{6} + \frac{\pi^2}{12} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}+1}{k^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{(2n+1)^2},$$

адкуль

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8},$$

г. зн. знойдзена сума апошняга з лікавых шэрагаў (18).

Задача 37. З дапамогай роўнасці Парсэваля вылічыць інтэграл $\int\limits_{-\pi}^{\pi}\big(\cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx\big)^2 dx.$

Развязанне. Разгледзім трыганаметрычны мнагасклад $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n}\cos kx$ і запішам для яго роўнасць Парсэваля (9):

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Big(\sum_{k=1}^{n}\cos kx\Big)^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2).$$

Так як шэраг Фур'е функцыі $f(x)$ супадае з самой функцыяй $f(x)$, то $a_0 = 0$, $a_k = 1$, $k = 1, 2, \ldots, n$, $a_k = 0$, $k = n+1, n+2, \ldots$; $b_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots$ Такім чынам,

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}\big(\cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx\big)^2 dx = \pi n.$$

Задача 38. Раскласці ў шэраг Фур'е перыядычную функцыю
$$f(x) = \frac{1 - a\cos x}{1 - 2a\cos x + a^2}, \quad |a| < 1.$$

Развязанне. Функцыя $f(x)$ з'яўляецца гладкай, перыядычнай з перыядам 2π і цотнай. Аднак вылічэнне каэфіцыентаў Фур'е па формулах (5) тут неэфектыўнае. Скарыстаемся вядомым з камплекснага аналізу раскладам у ступеневы шэраг $(|a| < 1)$
$$\frac{1}{1 - ae^{ix}} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k e^{ikx}. \tag{22}$$
Памножым у левай частцы суадносіны (22) лічнік і назоўнік на спалучаны выраз $\left(1 - ae^{-ix}\right)$:
$$\frac{1 - ae^{-ix}}{1 - 2a\cos x + a^2} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k(\cos kx + i\sin kx).$$
Аддзяляючы ў гэтай роўнасці рэчаісныя часткі, атрымаем
$$\frac{1 - a\cos x}{1 - 2a\cos x + a^2} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \cos kx.$$

Задача 39. Высветліць, як трэба працягнуць непарыўную функцыю $f(x)$ з інтэрвалу $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ на $(-\pi, \pi)$, каб яе расклад ў шэраг Фур'е меў выгляд
$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(2k+1)x.$$

Развязанне. Паколькі функцыя $f(x)$ раскладваецца ў шэраг па косінусах, відавочна, што $f(-x) = f(x)$. Для $x \in \left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$ маем
$$f(\pi - x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos\big[(2k+1)(\pi - x)\big] =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos\big[\pi - (2k+1)x\big] = -\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos(2k+1)x = -f(x).$$

Такім чынам, функцыю $f(x)$ трэба працягнуць па формулах

$$f(-x) = f(x), \quad f(\pi - x) = -f(x).$$

40. Зыходзячы з раскладу

$$x = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin kx, \quad -\pi < x < \pi,$$

пакладовым інтэграваннем атрымаць расклады ў шэраг Фур'е на інтэрвале $(-\pi, \pi)$ функцый: а) $x^2 + 2x$; б) $x^3 + x^2$; у) x^4.

41. Выкарыстоўваючы расклад ў шэраг Фур'е функцыі $f(x) = \operatorname{sgn} x$, $-\pi < x < \pi$, знайсці суму шэрагу $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$.

42. Запісаць роўнасць Парсэваля для функцыі

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < \alpha, \\ 0, & \alpha < |x| < \pi. \end{cases}$$

Зыходзячы з роўнасці Парсэваля, знайсці сумы шэрагаў

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2 k\alpha}{k^2}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos^2 k\alpha}{k^2}.$$

Раскласці ў шэраг Фур'е перыядычныя функцыі.

43. $f(x) = \dfrac{a \sin x}{1 - 2a\cos x + a^2}, \quad |a| < 1.$

44. $f(x) = \dfrac{1 - a^2}{1 - 2a\cos x + a^2}, \quad |a| < 1.$

45. $f(x) = \ln(1 - 2a\cos x + a^2), \quad |a| < 1.$

Даказаць роўнасці.

46. $\ln\left|\sin\dfrac{x}{2}\right| = -\ln 2 - \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\cos kx.$

47. $\ln\left|\cos\dfrac{x}{2}\right| = -\ln 2 + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\cos kx.$

48. Высветліць, як трэба працягнуць непарыўную функцыю $f(x)$ з інтэрвалу $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ на інтэрвал $(-\pi, \pi)$, каб яе расклад ў шэраг Фур'е меў выгляд

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \sin(2k+1)x.$$

49. Высветліць, якой асаблівасцю валодае шэраг Фур'е функцыі $f(x)$ у інтэрвале $(-\pi, \pi)$, калі $f(x+\pi) = f(x)$.

Заняткі 4–5

Задача 50. Выявіць інтэгралам Фур'е функцыю

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leqslant 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$$

Развязанне. Функцыя $f(x)$ з'яўляецца абсалютна інтэгравальнай на ўсёй лікавай прамой, кавалкава-гладкай і цотнай. Таму ў адпаведнасці з (13)

$$b(\lambda) = 0, \quad a(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \cos \lambda x \, dx = \frac{2 \sin \lambda}{\pi \lambda},$$

і інтэграл Фур'е мае выгляд

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \lambda}{\lambda} \cos \lambda x \, d\lambda.$$

Паводле тэарэмы 5, у пунктах разрыву $x = \pm 1$ інтэграл Фур'е роўны $\dfrac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \dfrac{1}{2}$. Канчаткова атрымаем

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \lambda}{\lambda} \cos \lambda x \, d\lambda = \begin{cases} f(x), & |x| \neq 1, \\ \dfrac{1}{2}, & |x| = 1. \end{cases}$$

Задача 51. Выявіць інтэгралам Фур'е функцыю

$$f(x) = \frac{x}{a^2 + x^2}, \quad a > 0.$$

Развязанне. Функцыя $f(x)$ дыферэнцавальная на ўсёй лікавай прамой, але не з'яўляецца абсалютна інтэгравальнай. Аднак яна інтэгравальная на інтэрвале $(-\infty, \infty)$ у сэнсе галоўнага значэння па Кашы і можа быць пададзеная інтэгралам Фур'е. Акрамя таго, функцыя $f(x)$ няцотная, такім чынам, $a(\lambda) = 0$. Выкарыстоўваючы (14) і формулу для вылічэння інтэгралаў выгляду $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} R(x)$, калі $\lambda > 0$, дзе $R(x) = \dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ — правільны рацыянальны дроб $\big(P_m(x)$ і $Q_n(x)$ — мнагасклады ступеняў m і n адпаведна, прычым $n > m\big)$, атрымаем

$$b(\lambda) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\infty} \frac{t \sin \lambda t}{a^2 + t^2}\, dt = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{t \sin \lambda t}{a^2 + t^2}\, dt = \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{t e^{i\lambda t}}{a^2 + t^2}\, dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \operatorname{Im}\Big(2\pi i \operatorname*{res}_{t=ai} \frac{t e^{i\lambda t}}{a^2 + t^2}\Big) = 2 \operatorname{Im}\Big(i \, \frac{t e^{i\lambda t}}{t + ai}\Big|_{t=ai}\Big) = \operatorname{Im}\big(i e^{-a\lambda}\big) = e^{-a\lambda}.$$

Такім чынам, шуканае выяўленне мае выгляд

$$f(x) = \int\limits_0^{\infty} e^{-a\lambda} \sin \lambda x \, d\lambda.$$

Задача 52. Знайсці пераўтварэнне Фур'е функцыі

$$f(x) = e^{-a|x|}, \quad a > 0.$$

Развязанне. У адпаведнасці з формулай (16) маем

$$\Phi(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|} \cdot e^{-i\lambda t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{0} e^{(a - i\lambda)t} dt +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^{\infty} e^{(-a - i\lambda)t} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{(a-i\lambda)t}}{a - i\lambda}\Big|_{-\infty}^{0} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{(-a-i\lambda)t}}{-a - i\lambda}\Big|_0^{\infty} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{a - i\lambda} + \frac{1}{a + i\lambda} \right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2a}{a^2 + \lambda^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2 + \lambda^2}.$$

Такім чынам, пераўтварэнне Фур'е мае выгляд

$$\Phi(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{\lambda^2 + a^2}.$$

Задача 53. Знайсці пераўтварэнне Фур'е функцыі

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Развязанне. Ізноў ужываючы формулу (16), атрымаем

$$\Phi(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} e^{-i\lambda t}\, dt = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \cos \lambda t\, dt.$$

Абазначым праз $I(\lambda) = \int\limits_{0}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \cos \lambda t\, dt.$ Дыферэнцуючы інтэграл $I(\lambda)$ па параметры λ, атрымаем

$$I'(\lambda) = -\int\limits_{0}^{\infty} t e^{-\frac{t^2}{2}} \sin \lambda t\, dt,$$

прычым дыферэнцаванне карэктнае з прычыны раўнамернай збежнасці інтэгралу. Далей інтэгруючы часткамі, знаходзім

$$I'(\lambda) = \int\limits_{0}^{\infty} \sin \lambda t\, d\big(e^{-\frac{t^2}{2}}\big) = -\lambda \int\limits_{0}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \cos \lambda t\, dt = -\lambda I(\lambda).$$

Такім чынам, функцыя $I(\lambda)$ задавальняе лінейнае дыферэнцыяльнае раўнанне першага парадку

$$I'(\lambda) + \lambda I(\lambda) = 0,$$

развязваючы якое, атрымаем $I(\lambda) = Ce^{-\frac{\lambda^2}{2}}$. Для вызначэння канстанты C возьмем $\lambda = 0$ і ўлічым, што $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$. Маем

$$C = I(0) = \int\limits_0^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Такім чынам, для інтэгралу $I(\lambda)$ мае месца роўнасць

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \cos \lambda t \, dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \, e^{-\frac{\lambda^2}{2}},$$

а пераўтварэнне Фур'е набывае выгляд

$$\Phi(\lambda) = e^{-\frac{\lambda^2}{2}}.$$

Канчаткова можна зрабіць выснову, што функцыя $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ пераводзіцца пераўтварэннем Фур'е сама ў сябе.

Выявіць інтэгралам Фур'е наступныя функцыі.

54. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn} x, & |x| \leqslant 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$

55. $f(x) = \begin{cases} x, & |x| \leqslant 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$

56. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2}, & |x| \leqslant 1, \\ \dfrac{1}{2}, & 1 < |x| \leqslant 2, \\ 0, & |x| > 2. \end{cases}$

57. $f(x) = \begin{cases} x^2, & |x| \leqslant 1, \\ 1, & 1 < |x| \leqslant 2, \\ 0, & |x| > 2. \end{cases}$

58. $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ e^{-x}, & x > 0. \end{cases}$

59. $f(x) = \begin{cases} \sin x, & |x| \leqslant \pi, \\ 0, & |x| > \pi. \end{cases}$

60. $f(x) = \begin{cases} \cos x, & |x| \leqslant \dfrac{\pi}{2}, \\ 0, & |x| > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$

61. $f(x) = \begin{cases} A \sin \omega x, & |x| \leqslant \dfrac{2\pi n}{\omega}, \\ 0, & |x| > \dfrac{2\pi n}{\omega}, \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}.$

62. $f(x) = \begin{cases} x \cos x, & |x| \leqslant 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$

63. $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ e^{-ax} \cos \omega x, & x > 0, \end{cases} \quad a > 0.$

64. $f(x) = e^{-ax^2}, \ a > 0.$

65. $f(x) = \operatorname{sgn}(x - a) - \operatorname{sgn}(x - b), \ b > a.$

66. $f(x) = \dfrac{1}{a^2 + x^2}, \ a > 0.$

67. $f(x) = \dfrac{x}{(1 + x^2)^2}.$

68. $f(x) = \dfrac{x \cos x}{(1 + x^2)^2}.$

69. $f(x) = \dfrac{\sin x}{1 + x^4}.$

70. Функцыю $f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 \leqslant x \leqslant \pi, \\ 0, & x > \pi, \end{cases}$ выявіць інтэгралам Фур'е, працягваючы яе цотным чынам.

71. Функцыю $f(x) = \begin{cases} \cos x, & 0 \leqslant x \leqslant \pi, \\ 0, & x > \pi, \end{cases}$ выявіць інтэгралам Фур'е, працягваючы яе няцотным чынам.

72. Функцыю $f(x) = e^{-x}, \ 0 < x < \infty$, выявіць інтэгралам Фур'е, працягваючы яе: а) цотным чынам; б) няцотным чынам.

73. Вылічыць інтэгралы $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^3 t}{t}\,dt, \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^3 t \cos t}{t}\,dt,$ выкарыстоўваючы выяўленне інтэгралам Фур'е функцыі $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leqslant 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$

Знайсці пераўтварэнне Фур'е наступных функцый.

74. $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leqslant 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$

75. $f(x) = \begin{cases} 1, & 0 < x \leqslant 1, \\ 0, & -\infty < x \leqslant 0,\ 1 < x < \infty. \end{cases}$

76. $f(x) = \begin{cases} \operatorname{sgn} x, & |x| \leqslant 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$

77. $f(x) = \begin{cases} x, & |x| \leqslant 1, \\ 0, & |x| > 1. \end{cases}$

78. $f(x) = \begin{cases} e^{ax}, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \quad a > 0. \\ e^{-ax}, & x > 0, \end{cases}$

79. $f(x) = e^{-a|x|} \cos \omega x,\ a > 0.$

80. $f(x) = e^{-a|x|} \sin \omega x,\ a > 0.$

81. $f(x) = xe^{-a|x|},\ a > 0.$

82. $f(x) = xe^{-x^2}.$

83. $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \cos \omega x.$

84. $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \sin \omega x.$

85. $f(x) = e^{-2|x-1|}.$

86. $f(x) = (2x + 1)e^{-|x|}.$

ТЭМА II. АПЕРАЦЫЙНАЕ ЗЛІЧЭННЕ

1. Пераўтварэнне Ляпляса.

Азначэнне 6. ***Арыгіналам*** *называецца камплексназначная функцыя $f(t)$ рэчаіснай зменнай t, якая задавальняе наступныя умовы:*

1) $f(t) = 0$ *для ўсіх* $t < 0$;

2) *на любым адрэзку* $[0, T]$ *функцыя* $f(t)$ *мае не больш за канцоўную колькасць пунктаў разрыву першага роду*;

3) *функцыя* $f(t)$ *на* $[0, +\infty)$ *расце не хутчэй за паказнікавую функцыю, г. зн.*

$$|f(t)| \leqslant Me^{\alpha t}, \tag{23}$$

дзе $M = \text{const} > 0$, $\alpha = \text{const} \geqslant 0$. *Дакладная ніжняя мяжа* α_0 *тых значэнняў* α, *для якіх выконваецца няроўнасць (23), называецца* ***паказнікам росту*** *арыгіналу.*

Азначэнне 7. ***Пераўтварэннем Ляпляса*** *арыгіналу* $f(t)$ *называецца функцыя камплекснай зменнай* p:

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt. \tag{24}$$

Разам з тэрмінам "пераўтварэнне Ляпляса" ужываюць тэрмін "выява". Сувязь паміж выявай і арыгіналам абазначаецца $f(t) \risingdotseq F(p)$ або $F(p) \fallingdotseq f(t)$, г. зн. функцыя $f(t)$ па выяве роўная $F(p)$ або функцыя $F(p)$ ёсць выява для арыгіналу $f(t)$.

Тэарэма 6. *Для ўсякага арыгіналу* $f(t)$ *яго выява* $F(p)$ *існуе і з'яўляецца аналітычнай функцыяй у паўплоскасці* $\operatorname{Re} p > \alpha_0$, *дзе* α_0 — *паказнік росту функцыі* $f(t)$.

Найпростым арыгіналам з'яўляецца ***функцыя Хэвісайда***

$$\theta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t \geqslant 0. \end{cases}$$

Знойдзем выяву $\theta(t)$. Функцыя $F(p) = \int\limits_0^\infty e^{-pt} dt$ вызначана ў абсягу $\operatorname{Re} p > 0$ і $F(p) = -\frac{1}{p} e^{-pt}\Big|_0^\infty = \frac{1}{p}$. Такім чынам

$$\theta(t) \risingdotseq \frac{1}{p}.$$

Відавочна, што калі для функцыі $f(t)$, якая задавальняе ўмовы 2) і 3) азначэння 6, не выконваецца ўмова 1), то для функцыі

$$f(t)\theta(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ f(t), & t \geqslant 0, \end{cases}$$

умова 1) выконваецца і, такім чынам, гэтая функцыя з'яўляецца арыгіналам. У далейшым замест $f(t)\theta(t)$ будзем пісаць $f(t)$, лічачы, што функцыя роўная нулю для $t < 0$.

Пералічым уласцівасці арыгіналаў і выяваў лічачы, што $f(t) \risingdotseq F(p)$, $g(t) \risingdotseq G(p)$.

1. Лінейнасць. Для любых арыгіналаў $f(t), g(t)$ і любых камплексных лікаў λ_1, λ_2 праўдзіцца роўнасць

$$\lambda_1 f(t) + \lambda_2 g(t) \risingdotseq \lambda_1 F(p) + \lambda_2 G(p). \tag{25}$$

2. Дыферэнцаванне арыгіналу. Калі функцыі $f'(t), f''(t), \ldots$ $\ldots, f^{(n)}(t)$ з'яўляюцца арыгіналамі, то праўдзяцца формулы

$$f'(t) \risingdotseq pF(p) - f(0), \tag{26}$$

$$f^{(n)}(t) \risingdotseq p^n F(p) - \sum_{k=1}^{n} p^{n-k} f^{(k-1)}(0). \tag{27}$$

У гэтых роўнасцях неабходна ўлічваць, што $f(0) = f(+0)$, $f'(0) = f'(+0)$, $\ldots$, $f^{(n-1)}(0) = f^{(n-1)}(+0)$.

У выпадку, калі $f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n-1)}(0) = 0$, формула (27) істотна спрашчаецца і набывае выгляд

$$f^{(n)}(t) \risingdotseq p^n F(p).$$

Апошняя суадносіна азначае, што дыферэнцаванне арыгіналу эквівалентнае памнажэнню выявы на p.

3. Інтэграванне арыгіналу. Мае месца формула

$$\int_0^t f(\tau)\, d\tau \risingdotseq \frac{F(p)}{p}, \tag{28}$$

Роўнасць (28) азначае, што інтэграванне арыгіналу эквівалентнае дзяленню выявы на p.

4. Дыферэнцаванне выявы. Для любога n мае месца роўнасць

$$F^{(n)}(p) \risingdotseq (-t)^n f(t). \tag{29}$$

5. Інтэграванне выявы. Калі інтэграл $\int_p^\infty F(q)\, dq$ існуе, то праўдзіцца роўнасць

$$\frac{f(t)}{t} \risingdotseq \int_p^\infty F(q)\, dq. \tag{30}$$

Суадносіна (30) азначае, што інтэграванне выявы эквівалентнае дзяленню арыгіналу на t.

6. Тэарэма аб зруху. Для любога камплекснага ліку λ праўдзіцца роўнасць

$$e^{\lambda t} f(t) \risingdotseq F(p - \lambda), \tag{31}$$

г. зн. памнажэнню арыгіналу на $e^{\lambda t}$ адпавядае зрух аргумента выявы на λ.

7. Тэарэма спазнення. Для любога дадатнага τ праўдзіцца суадносіна

$$f(t - \tau) \risingdotseq e^{-\tau p} F(p). \tag{32}$$

8. Выява згорткі. Згортцы арыгіналаў

$$f * g = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau$$

адпавядае здабытак выяваў:

$$f * g \risingdotseq F(p)G(p). \tag{33}$$

Прывядзем табліцу выяваў некаторых асноўных функцый (формулы для $f(t)$ дзейнічаюць для $t \geqslant 0$; $f(t) = 0$ калі $t < 0$).

1	$1 \risingdotseq \dfrac{1}{p}$	7	$\operatorname{sh}\omega t \risingdotseq \dfrac{\omega}{p^2-\omega^2}$
2	$t^n \risingdotseq \dfrac{n!}{p^{n+1}}$	8	$\operatorname{ch}\omega t \risingdotseq \dfrac{p}{p^2-\omega^2}$
3	$e^{\lambda t} \risingdotseq \dfrac{1}{p-\lambda}$	9	$e^{\lambda t}\sin\omega t \risingdotseq \dfrac{\omega}{(p-\lambda)^2+\omega^2}$
4	$t^n e^{\lambda t} \risingdotseq \dfrac{n!}{(p-\lambda)^{n+1}}$	10	$e^{\lambda t}\cos\omega t \risingdotseq \dfrac{p-\lambda}{(p-\lambda)^2+\omega^2}$
5	$\sin\omega t \risingdotseq \dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$	11	$t\sin\omega t \risingdotseq \dfrac{2\omega p}{(p^2+\omega^2)^2}$
6	$\cos\omega t \risingdotseq \dfrac{p}{p^2+\omega^2}$	12	$t\cos\omega t \risingdotseq \dfrac{p^2-\omega^2}{(p^2+\omega^2)^2}$

2. Прымяненне пераўтварэння Ляпляса для развязання дыферэнцыяльных раўнанняў.

Тэарэма 7. *Любы правільны рацыянальны дроб* $F(p) = \dfrac{Q(p)}{R(p)}$ *з'яўляецца выявай, пры гэтым*

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{p=p_k} F(p)e^{pt}, \tag{34}$$

дзе $p_1, p_2, \ldots, p_n$ *— усе полюсы функцыі* $F(p)$.

Вылічаючы рэшты ў формуле (34), можна запісаць яе наступным чынам:

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(m_k - 1)!} \frac{d^{m_k-1}}{dp^{m_k-1}} \big[F(p)e^{pt}(p-p_k)^{m_k} \big] \Big|_{p=p_k}, \qquad (35)$$

дзе m_k — кратнасць полюсу p_k функцыі $F(p)$. У выпадку, калі ўсе полюсы функцыі $F(p)$ простыя, формула (35) набывае выгляд

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{Q(p_k)}{R'(p_k)} e^{p_k t}. \qquad (36)$$

Калі выява з'яўляецца правільным рацыянальным дробам, то для аднаўлення арыгіналу можна выкарыстаць іншы спосаб, заснаваны на раскладанні гэтага дробу на суму простых дробаў. Пры гэтым магчымыя наступныя варыянты.

1) Калі назоўнік дробу раскладваецца на лінейныя множнікі (наогул кажучы, з камплекснымі каэфіцыентамі), то расклад на простыя дробы будзе ўтрымоўваць толькі простыя першага $\dfrac{A}{p-\lambda}$ і другога $\dfrac{A}{(p-\lambda)^k}$, $k > 1$, тыпаў. У гэтым выпадку неабходна выкарыстаць уласцівасць лінейнасці пераўтварэння Ляпляса і формулы 1 — 4 табліцы выяваў.

2) Калі назоўнік дробу раскладваецца на лінейныя і квадратычныя множнікі з рэчаіснымі каэфіцыентамі, прычым усе камплексныя карані назоўніка простыя, то расклад на простыя дробы будзе ўтрымоўваць простыя першага, другога і трэцяга $\dfrac{Ap+B}{(p-\lambda)^2+\omega^2}$ тыпаў. Далей кожны просты дроб трэцяга тыпу неабходна запісаць у выглядзе лінейнай камбінацыі выяваў з формул 5 — 10 і выкарыстаць ўласцівасць лінейнасці пераўтварэння Ляпляса.

Разгледзім лінейнае звычайнае дыферэнцыяльнае раўнанне n-га парадку са сталымі каэфіцыентамі

$$L[x] = f(t), \qquad (37)$$

дзе $L[x] = a_0 x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_{n-1}x'(t) + a_n x(t)$, $a_0 \neq 0$.

Сфармулюем задачу Кашы: знайсці развязак раўнання (37), які задавальняе пачатковыя умовы

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_1, \quad \ldots, \quad x^{(n-1)}(0) = x_{n-1}, \tag{38}$$

дзе $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ — зададзеныя сталыя. Лічачы, што $f(t)$ — арыгінал, будзем шукаць развязак $x(t)$ задачы (37), (38) такі, што $x(t) = 0$ для $t < 0$.

Няхай $f(t) \risingdotseq F(p)$, $x(t) \risingdotseq X(p)$. Прымяняючы да абедзвюх частак раўнання (37) пераўтварэнне Ляпляса і выкарыстоўваючы ўласцівасць дыферэнцавання арыгіналу, з ўмоваў (38) атрымаем

$$A_n(p)X(p) - B_{n-1}(p) = F(p). \tag{39}$$

Тут $A_n(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-1}p + a_n$ — характарыстычны мнагасклад раўнання $L[x] = 0$, а $B_{n-1}(p)$ — вядомы алгебраічны мнагасклад ступені не вышэйшай за $n-1$. Развязваючы апературнае раўнанне (39), атрымаем

$$X(p) = \frac{F(p) + B_{n-1}(p)}{A_n(p)}.$$

Для знаходжання шуканага развязку $x(t)$ задачы (37), (38) неабходна ўзнавіць па выяве $X(p)$ яе арыгінал.

Развязанне сістэм дыферэнцыяльных раўнанняў з дапамогай аперацыйнага злічэння праводзіцца па той жа схеме, што і развязанне аднаго раўнання. Разгледзім задачу Кашы для сістэмы лінейных звычайных дыферэнцыяльных раўнанняў другога парадку:

$$\sum_{j=1}^{n} \Big(a_{ij} \frac{d^2 x_j}{dt^2} + b_{ij} \frac{dx_j}{dt} + c_{ij} x_j \Big) = f_i(t), \quad i = 1, 2, \ldots, \tag{40}$$

$$x_j(0) = \alpha_j, \quad x_j'(0) = \beta_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{41}$$

Абазначым праз $X_j(p)$ і $F_i(p)$ выявы функцый $x_j(t)$ і $f_i(t)$ адпаведна, і ад сістэмы (40) з улікам (41) пяройдзем да апературнай сістэмы

$$\sum_{j=1}^{n} (a_{ij}p^2 + b_{ij}p + c_{ij}) X_j(p) =$$

$$= F_i(p) + \sum_{j=1}^{n}\big[(a_{ij}p + b_{ij})\alpha_j + a_{ij}\beta_j\big], \quad i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (42)$$

Развязваючы (42) як сістэму лінейных алгебраічных раўнанняў адносна $X_j(p)$, знаходзім выявы $X_j(p)$, а затым іх арыгіналы $x_j(t)$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Гэтыя арыгіналы і будуць даваць развязак задачы Кашы (40), (41).

Занятак 6

Задача 87. Знайсці выяву функцыі $f(t) = \sin\omega t$.

Развязанне. Выкарыстаем формулу (25):

$$\sin\omega t = \frac{1}{2i}(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) \risingdotseq \frac{1}{2i}\Big(\frac{1}{p - i\omega} - \frac{1}{p + i\omega}\Big) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}.$$

Такім чынам, $\sin\omega t \risingdotseq \dfrac{\omega}{p^2 + \omega^2}$. Аналагічна $\cos\omega t \risingdotseq \dfrac{p}{p^2 + \omega^2}$.

Для гіпербалічных функцый маем

$$\operatorname{sh}\omega t = \frac{1}{2}(e^{\omega t} - e^{-\omega t}) \risingdotseq \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{p - \omega} - \frac{1}{p + \omega}\Big) = \frac{\omega}{p^2 - \omega^2},$$

г. зн. $\operatorname{sh}\omega t \risingdotseq \dfrac{\omega}{p^2 - \omega^2}$. Аналагічна $\operatorname{ch}\omega t \risingdotseq \dfrac{p}{p^2 - \omega^2}$.

Задача 88. Знайсці выяву функцыі $f(t) = \sin^2 t$.

Развязанне. Паводле формулы (26), маем $f'(t) \risingdotseq pF(p) - f(0)$ або $2\sin t\cos t \risingdotseq pF(p)$. З іншага боку,

$$2\sin t\cos t = \sin 2t \risingdotseq \frac{2}{p^2 + 4}.$$

Адкуль атрымаем $F(p) = \dfrac{2}{p(p^2 + 4)}$. Такім чынам,

$$\sin^2 t \risingdotseq \frac{2}{p(p^2 + 4)}.$$

Задача 89. Знайсці выяву функцыі $f(t) = \int\limits_0^t \cos\omega\tau\,d\tau$.

Развязанне. Так як для падынтэгральнай функцыі праўдзіцца суадносіна $\cos\omega\tau \risingdotseq \dfrac{p}{p^2+\omega^2}$, то, ужываючы формулу (28), атрымаем

$$\int\limits_0^t \cos\omega\tau\,d\tau \risingdotseq \frac{1}{p^2+\omega^2}.$$

Задача 90. Знайсці выяву функцыі $f(t) = t^2 e^t$.

Развязанне. Маем $e^t \risingdotseq \dfrac{1}{p-1}$. Ужываючы ўласцівасць дыферэнцавання выявы, атрымаем

$$\left(\frac{1}{p-1}\right)' \risingdotseq -te^t \quad \text{або} \quad \frac{1}{(p-1)^2} \risingdotseq te^t.$$

Далей

$$\left(\frac{1}{(p-1)^2}\right)' \risingdotseq -t(te^t) \quad \text{або} \quad \frac{2}{(p-1)^3} \risingdotseq t^2e^t.$$

Такім чынам,

$$t^2e^t \risingdotseq \frac{2}{(p-1)^3}.$$

Задача 91. Знайсці выяву функцыі $f(t) = \dfrac{\sin t}{t}$.

Развязанне. Паколькі $\sin t \risingdotseq \dfrac{1}{p^2+1}$, то згодна з формулай (30) атрымаем

$$\frac{\sin t}{t} \risingdotseq \int\limits_p^\infty \frac{dq}{q^2+1} = \operatorname{arctg} q\Big|_p^\infty = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} p = \operatorname{arcctg} p.$$

Такім чынам,

$$\frac{\sin t}{t} \risingdotseq \operatorname{arcctg} p.$$

Задача 92. Знайсці выяву функцыі $f(t) = \int\limits_0^t \frac{\sin\tau}{\tau}\,d\tau$.

Развязанне. Ужываючы формулу інтэгравання арыгіналу, з улікам папярэдняга прыкладу атрымаем

$$\int\limits_0^t \frac{\sin\tau}{\tau}\,d\tau \risingdotseq \frac{\operatorname{arcctg} p}{p}.$$

Задача 93. Знайсці выяву функцый

$$f(t) = e^{\lambda t}\sin\omega t, \quad g(t) = e^{\lambda t}\cos\omega t.$$

Развязанне. Так як $\sin\omega t \risingdotseq \frac{\omega}{p^2+\omega^2}$, $\cos\omega t \risingdotseq \frac{p}{p^2+\omega^2}$, то ў адпаведнасці з формулай (31) атрымаем

$$e^{\lambda t}\sin\omega t \risingdotseq \frac{\omega}{(p-\lambda)^2+\omega^2}, \quad e^{\lambda t}\cos\omega t \risingdotseq \frac{p-\lambda}{(p-\lambda)^2+\omega^2}.$$

Задача 94. Знайсці выяву функцыі $f(t) = te^t\cos t$.

Развязанне. Маем $\cos t \risingdotseq \frac{p}{p^2+1}$. Выкарыстоўваючы ўласцівасць дыферэнцавання выявы, атрымаем

$$\left(\frac{p}{p^2+1}\right)' \risingdotseq -t\cos t \quad \text{або} \quad \frac{1-p^2}{(p^2+1)^2} \risingdotseq -t\cos t.$$

Адкуль $t\cos t \risingdotseq \frac{p^2-1}{(p^2+1)^2}$. Паводле тэарэмы спазнення

$$te^t\cos t \risingdotseq \frac{(p-1)^2-1}{\left[(p-1)^2+1\right]^2}.$$

Задача 95. Знайсці выяву функцыі

$$f(t-1) = (t-1)^2\theta(t-1).$$

Развязанне. Для функцыі $f(t) = 1$ выкарыстаем формулу (29):

$$1 \risingdotseq \frac{1}{p} \quad \Rightarrow \quad -t \risingdotseq -\frac{1}{p^2} \quad \Rightarrow \quad t^2 \risingdotseq \frac{2}{p^3}.$$

Згодна з тэарэмай спазнення

$$(t-1)^2 \risingdotseq \frac{2e^{-p}}{p^3}.$$

Задача 96. Знайсці выяву функцыі $f(t) = \int\limits_0^t e^{t-\tau} \sin\tau\, d\tau$.

Развязанне. Маем

$$e^t \risingdotseq \frac{1}{p-1}, \quad \sin t \risingdotseq \frac{1}{p^2+1}.$$

Згодна з формулай (33) атрымаем

$$f(t) \risingdotseq \frac{1}{p-1} \cdot \frac{1}{p^2+1}.$$

Задача 97. Знайсці арыгінал $f(t)$ па яго выяве

$$F(p) = \frac{p+8}{p^2+p-2}.$$

Развязанне. Так як функцыя $F(p)$ мае полюсы першага парадку $p_1 = 1$, $p_2 = -2$, то паводле формулы (36) знаходзім

$$f(t) = \left[\frac{p+8}{2p+1}\, e^{pt}\right]_{p=1} + \left[\frac{p+8}{2p+1}\, e^{pt}\right]_{p=-2} = 3e^t - 2e^{-2t}.$$

Такім чынам,

$$\frac{p+8}{p^2+p-2} \risingdotseq 3e^t - 2e^{-2t}.$$

Задача 98. Знайсці арыгінал $f(t)$ па яго выяве

$$F(p) = \frac{1+2p^2}{(1+p^2)^2}.$$

Развязанне. Функцыя $F(p)$ мае полюсы другога парадку $p_1 = i$ і $p_2 = -i$. Ужываючы формулу (35), атрымаем

$$f(t) = \Big[\frac{1+2p^2}{(p+i)^2}\,e^{pt}\Big]'_{p=i} + \Big[\frac{1+2p^2}{(p-i)^2}\,e^{pt}\Big]'_{p=-i} =$$

$$= \Big[\frac{4pi-2}{(p+i)^3} + \frac{(1+2p^2)t}{(p+i)^2}\Big]e^{pt}\Big|_{p=i} + \Big[\frac{-4pi-2}{(p-i)^3} + \frac{(1+2p^2)t}{(p-i)^2}\Big]e^{pt}\Big|_{p=-i} =$$

$$= \frac{3}{2}\,\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i} + \frac{t}{2}\,\frac{e^{it}+e^{-it}}{2} = \frac{3}{2}\sin t + \frac{1}{2}\,t\cos t.$$

Такім чынам, канчаткова знаходзім

$$\frac{1+2p^2}{(1+p^2)^2} \risingdotseq \frac{3}{2}\sin t + \frac{1}{2}\,t\cos t.$$

Задача 99. Знайсці арыгінал $f(t)$ па яго выяве

$$F(p) = \frac{1}{p^3+2p^2+p}.$$

Развязанне. Раскладзем дроб на суму простых, ужываючы метад нявызначаных каэфіцыентаў:

$$\frac{1}{p^3+2p^2+p} = \frac{1}{p(p+1)^2} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} - \frac{1}{(p+1)^2}.$$

Выкарыстоўваючы цяпер уласцівасць лінейнасці і формулы 1, 3 і 4 табліцы, атрымаем

$$\frac{1}{p^3+2p^2+p} \risingdotseq 1 - e^{-t} - te^{-t}.$$

Задача 100. Знайсці арыгінал $f(t)$ па яго выяве

$$F(p) = \frac{4p^2-p}{(p+1)(p^2+4)}.$$

Развязанне. Раскладзем дроб на простыя ў мностве рэчаісных лікаў з дапамогай метаду нявызначанных каэфіцыентаў:

$$\frac{4p^2-p}{(p+1)(p^2+4)} = \frac{1}{p+1} + \frac{3p-4}{p^2+4} = \frac{1}{p+1} + 3\frac{p}{p^2+4} - 2\frac{2}{p^2+4}.$$

Ізноў выкарыстаем уласцівасць лінейнасці і формулы 3, 5 і 6 табліцы:

$$\frac{4p^2-p}{(p+1)(p^2+4)} \risingdotseq e^{-t} + 3\cos 2t - 2\sin 2t.$$

Задача 101. Знойдзем арыгінал $f(t)$ па яго выяве

$$F(p) = \frac{p}{p^2 + 4p + 5}.$$

Развязанне. Пераўтворым зыходны дроб, вылучаючы ў назоўніку поўны квадрат:

$$\frac{p}{p^2 + 4p + 5} = \frac{p + 2 - 2}{(p + 2)^2 + 1} = \frac{p + 2}{(p + 2)^2 + 1} - 2\frac{1}{(p + 2)^2 + 1}.$$

Ужываючы ўласцівасць лінейнасці і формулы 9 і 10 табліцы, атрымаем

$$\frac{p}{p^2 + 4p + 5} \risingdotseq e^{-2t} \cos t - 2e^{-2t} \sin t.$$

Знайсці выявы зададзеных арыгіналаў.

102. $f(t) = t \sin 5t.$

103. $f(t) = t^2 \cos 3t.$

104. $f(t) = \sin^2 t.$

105. $f(t) = e^{-t} t^3.$

106. $f(t) = (t + 1) \sin 2t.$

107. $f(t) = e^{-4t} \sin 3t \cos 2t.$

108. $f(t) = t \operatorname{sh} 2t.$

109. $f(t) = \cos^3 t.$

110. $f(t) = te^t \cos t.$

111. $f(t) = e^{-t} \cos^2 t.$

112. $f(t) = (t - 1)e^t.$

113. $f(t) = \sin^3 t.$

114. $f(t) = e^t \cos t \cos 2t.$

115. $f(t) = e^{-t} \sin t \sin 3t.$

116. $f(t) = \operatorname{ch}^2 t.$

117. $f(t) = \operatorname{sh}^2 t.$

118. $f(t) = \dfrac{\sin^2 t}{t}.$

119. $f(t) = \dfrac{\operatorname{sh} t}{t}.$

120. $f(t) = \dfrac{e^{-t} - 1}{t}.$

121. $f(t) = \displaystyle\int_0^t \tau^2 \sin \tau \, d\tau.$

122. $f(t) = \displaystyle\int_0^t \tau^2 e^{-2\tau} d\tau.$

123. $f(t) = \begin{cases} t^2, & t \geqslant 1, \\ 0, & t < 1. \end{cases}$

124. $f(t) = \begin{cases} \sin t, & t \geqslant \pi, \\ 0, & t < \pi. \end{cases}$

125. $f(t) = \displaystyle\int_0^t \sin(t - \tau) e^{\tau} d\tau.$

126. $f(t) = \displaystyle\int_0^t (t - \tau)^3 \cos \tau \, d\tau.$

127. $f(t) = \displaystyle\int_0^t \cos(t - \tau) \operatorname{sh} \tau \, d\tau.$

Знайсці арыгіналы зададзеных выяваў.

128. $F(p) = \dfrac{1}{p(p-1)(p-2)}$.

129. $F(p) = \dfrac{1}{p^2+4p+3}$.

130. $F(p) = \dfrac{p}{(p^2+1)^2}$.

131. $F(p) = \dfrac{p}{(p+1)(p^2+4)}$.

132. $F(p) = \dfrac{1}{p^2(p+1)}$.

133. $F(p) = \dfrac{p}{(p^2+1)(p^2+9)}$.

134. $F(p) = \dfrac{4p+3}{(p-1)(p^2+2p+5)}$.

135. $F(p) = \dfrac{p^2}{(p^2+1)(p^2+4)}$.

136. $F(p) = \dfrac{p}{p^3+1}$.

137. $F(p) = \dfrac{p}{(p^2-1)^2}$.

138. $F(p) = \dfrac{p+1}{p^2(p+2)}$.

139. $F(p) = \dfrac{p+2}{p(p^2+4)}$.

140. $F(p) = \dfrac{p-1}{p^3+1}$.

141. $F(p) = \dfrac{p+1}{p^3-1}$.

142. $F(p) = \dfrac{1}{(p^2+4)^2}$.

143. $F(p) = \dfrac{p^2}{(p^2+4)(p-1)}$.

144. $F(p) = \dfrac{p}{(p-1)(p^2+4)}$.

145. $F(p) = \dfrac{1}{(p^2+2p+2)^2}$.

146. $F(p) = \dfrac{2p+3}{p^3+4p^2+5p}$.

147. $F(p) = \dfrac{e^{-3p}}{(p-1)^2}$.

148. $F(p) = \dfrac{e^{-p}}{(p-1)(p-2)}$.

149. $F(p) = \dfrac{e^{-p}}{p^2+1}$.

Занятак 7

Задача 150. Знайсці развязак задачы Кашы

$$\begin{cases} x'' - 4x = 4e^{2t}, \\ x(0) = x'(0) = 0. \end{cases}$$

Развязанне. Няхай $x(t) \risingdotseq X(p)$. Тады, паводле ўласцівасці дыферэнцавання арыгіналу, з улікам пачатковых умоваў атрымаем

$$x''(t) \risingdotseq p^2 X(p).$$

Акрамя таго, $4e^{2t} \risingdotseq \dfrac{4}{p-2}$. Пераходзячы да выяваў у зыходным раўнанні, прыйдзем да аператарнага раўнання

$$p^2X(p) - 4X(p) = \frac{4}{p-2}.$$

Адсюль $X(p) = \dfrac{4}{(p+2)(p-2)^2}$. Раскладзем дроб на простыя і ўзновім арыгінал з дапамогай уласцівасці лінейнасці і формул 3 і 4 табліцы выяваў:

$$\frac{4}{(p+2)(p-2)^2} = \frac{1}{4(p+2)} - \frac{1}{4(p-2)} + \frac{1}{(p-2)^2} \fallingdotseq \frac{1}{4}\,e^{-2t} - \frac{1}{4}\,e^{2t} + te^{2t}.$$

Такім чынам, шуканы развязак мае выгляд

$$x(t) = \frac{1}{4}\,e^{-2t} - \frac{1}{4}\,e^{2t} + te^{2t}.$$

Задача 151. Знайсці развязак задачы Кашы

$$\begin{cases} x'' - 2x' + 5x = 0, \\ x(0) = 1,\ x'(0) = -3. \end{cases}$$

Развязанне. Няхай $x(t) \risingdotseq X(p)$. Тады

$$x'(t) \risingdotseq pX(p) - x(0) = pX(p) - 1,$$
$$x''(t) \risingdotseq p\big(pX(p) - 1\big) - x'(0) = p^2X(p) - p + 3.$$

Такім чынам, аператарнае раўнанне мае выгляд

$$p^2X(p) - p + 3 - 2\big(pX(p) - 1\big) + 5X(p) = 0,$$

адкуль

$$X(p) = \frac{p-5}{p^2 - 2p + 5}.$$

Для знаходжання арыгіналу вылучым у назоўніку дробу поўны квадрат:

$$\frac{p-5}{p^2-2p+5} = \frac{p-1-4}{(p-1)^2+4} = \frac{p-1}{(p-1)^2+4} - 2\frac{2}{(p-1)^2+4}.$$

Выкарыстоўваючы формулы 9 і 10 табліцы, канчаткова атрымаем

$$x(t) = e^t \cos 2t - 2e^t \sin 2t = e^t(\cos 2t - 2\sin 2t).$$

Задача 152. Знайсці развязак задачы Кашы

$$\begin{cases} x'' - y' = 0, \\ x - y'' = 2\sin t, \\ x(0) = -1,\ x'(0) = y(0) = y'(0) = 1. \end{cases}$$

Развязанне. Няхай $x(t) \risingdotseq X(p)$, $y(t) \risingdotseq Y(p)$. Выкарыстоўваючы ўласцівасць дыферэнцавання арыгіналу, з улікам пачатковых умоваў маем

$$x''(t) \risingdotseq p^2X(p) + p - 1, \quad y'(t) \risingdotseq pY(p) - 1, \quad y''(t) \risingdotseq p^2Y(p) - p - 1.$$

Пераходзячы да выяваў і ўлічваючы, што $2\sin t \risingdotseq \dfrac{2}{p^2+1}$, прыходзім да аператарнай сістэмы

$$\begin{cases} p^2X(p) + p - 1 - \big(pY(p) - 1\big) = 0, \\ X(p) - \big(p^2Y(p) - p - 1\big) = \dfrac{2}{p^2+1} \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} pX(p) - Y(p) = -1, \\ X(p) - p^2Y(p) = \dfrac{1 - p - p^2 - p^3}{p^2+1}. \end{cases}$$

Развязваючы гэтую сістэму адносна $X(p)$ і $Y(p)$, атрымаем

$$X(p) = \frac{1-p}{p^2+1}, \quad Y(p) = \frac{1+p}{p^2+1}.$$

Па формулах 5 і 6 табліцы выяваў знаходзім, што

$$x(t) = \sin t - \cos t, \quad y(t) = \sin t + \cos t.$$

Задача 153. Развязаць інтэгральнае раўнанне

$$\int_0^t e^{\tau - t} x(\tau)\, d\tau = \sin t.$$

Развязанне. З улікам уласцівасці выявы згорткі маем

$$x(t) \risingdotseq X(p), \quad e^{-t} \risingdotseq \frac{1}{p+1}, \quad \int\limits_0^t e^{\tau-t} x(\tau)\, d\tau \risingdotseq \frac{1}{p+1}\, X(p).$$

Пераходзячы да выяваў, прыходзім да аператарнага раўнання

$$\frac{1}{p+1}\, X(p) = \frac{1}{p^2+1},$$

з якога вынікае, што

$$X(p) = \frac{p+1}{p^2+1} = \frac{p}{p^2+1} + \frac{1}{p^2+1} \risingdotseq \cos t + \sin t.$$

Канчаткова атрымаем

$$x(t) = \cos t + \sin t.$$

Задача 154. Развязаць інтэгральнае раўнанне

$$x(t) = e^t - 2\int\limits_0^t \cos(t-\tau) x(\tau)\, d\tau.$$

Развязанне. Маем

$$x(t) \risingdotseq X(p), \quad e^{t} \risingdotseq \frac{1}{p-1}, \quad \int\limits_0^t \cos(t-\tau) x(\tau)\, d\tau \risingdotseq \frac{p}{p^2+1}\, X(p).$$

Пераходзячы да выяваў, прыходзім да аператарнага раўнання

$$X(p) = \frac{1}{p-1} - \frac{2p}{p^2+1}\, X(p) \quad \text{або} \quad X(p) = \frac{p^2+1}{(p-1)(p+1)^2}.$$

Раскладзем дроб на простыя і ўзновім арыгінал з дапамогай формул 3 і 4 табліцы выяваў:

$$\frac{p^2+1}{(p-1)(p+1)^2} = \frac{1}{2(p-1)} + \frac{1}{2(p+1)} - \frac{1}{(p+1)^2} \risingdotseq$$

$$\risingdotseq \frac{1}{2}\, e^t + \frac{1}{2}\, e^{-t} - te^{-t} = \operatorname{ch} t - te^{-t}.$$

Такім чынам, $x(t) = \operatorname{ch} t - te^{-t}$.

Развязаць задачы Кашы для дыферэнцыяльных раўнанняў.

155. $x'' - 4x = 4, \quad x(0) = -1, \quad x'(0) = 0.$

156. $x'' + 4x = 2, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 4.$

157. $x'' - 5x' + 6x = 2e^t, \quad x(0) = x'(0) = 1.$

158. $x''' + x' = e^t, \quad x(0) = x'(0) = x''(0) = 0.$

159. $x'' + x' = \cos t, \quad x(0) = 2, \quad x'(0) = 0.$

160. $x'' - x' = te^t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

161. $x'' + 2x' - 3x = e^{-t}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

162. $x''' + x'' = \sin t, \quad x(0) = x'(0) = 1, \quad x''(0) = 0.$

163. $x'' - x' = te^t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

164. $x''' + x' = \cos t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = -2, \quad x''(0) = 0.$

165. $x'' - 2x' = e^{2t}, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

166. $x'' + 2x' = t \sin t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

167. $x'' - x' + x = e^{-t}, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1.$

168. $x'' + x = 2\sin t, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = -1.$

169. $x'' - x' = te^t, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0.$

170. $x'' - 2x' + 10x = 10t^2 + 18t + 6, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 3{,}2.$

171. $x'' + 2x' + 5x = \cos t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

172. $x'' + 3x' + 2x = 0, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 2.$

173. $x'' + x' = t^2 + 2t, \quad x(0) = 4, \quad x'(0) = -2.$

174. $x'' - 4x = t - 1, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

175. $x'' - x' = t^2, \quad x(0) = x'(0) = 0.$

176. $x'' + x' - 2x = e^{-t}, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1.$

177. $x''' - 2x'' + x' = 4, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 2, \quad x''(0) = 0.$

178. $x''' - 6x'' + 11x' - 6x = 0, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1, \ x''(0) = 0.$

179. $x''' + x'' = \sin t, \quad x(0) = x'(0) = 1, \quad x''(0) = -2.$

Развязаць задачы Кашы для сістэм дыферэнцыяльных раўнанняў.

180. $\begin{cases} x' + y = 0, \\ y' + x = 0, \\ x(0) = 1, \ y(0) = -1. \end{cases}$ **181.** $\begin{cases} x + x' = y + e^t, \\ y + y' = x + e^t, \\ x(0) = y(0) = 1. \end{cases}$

182. $\begin{cases} x' = -y, \\ y' = 2x + 2y, \\ x(0) = y(0) = 1. \end{cases}$

183. $\begin{cases} x' - x - 2y = t, \\ y' - y - 2x = t, \\ x(0) = 2,\ y(0) = 4. \end{cases}$

184. $\begin{cases} x' + y' - y = e^t, \\ 2x' + y' + 2y = \cos t, \\ x(0) = y(0) = 0. \end{cases}$

185. $\begin{cases} x' + y' = 0, \\ y' - 2y - 2x = 0, \\ x(0) = 0,\ y(0) = 1. \end{cases}$

186. $\begin{cases} x' + x - y = e^t, \\ y' + y - x = e^t, \\ x(0) = y(0) = 1. \end{cases}$

187. $\begin{cases} x' = 3y - x, \\ y' = y + x + e^t, \\ x(0) = y(0) = 1. \end{cases}$

188. $\begin{cases} x' + x - 3y = 0, \\ y' - y - x = e^t, \\ x(0) = y(0) = 1. \end{cases}$

189. $\begin{cases} x' = x - y, \\ y' = y + x, \\ x(0) = 1,\ y(0) = 0. \end{cases}$

190. $\begin{cases} x' = y - 4x, \\ y' = -2x - y, \\ x(0) = 2,\ y(0) = 3. \end{cases}$

191. $\begin{cases} x' = -5x - 2y, \\ y' = x - 7y, \\ x(0) = y(0) = 1. \end{cases}$

192. $\begin{cases} x' = y - 7x, \\ y' = -2x - 5y, \\ x(0) = 2,\ y(0) = 0. \end{cases}$

193. $\begin{cases} x' = 3x + 4y, \\ y' = 4x - 3y, \\ x(0) = 0,\ y(0) = 1. \end{cases}$

194. $\begin{cases} x' = y - 7x, \\ y' = -2x - 5y, \\ x(0) = 0,\ y(0) = -4. \end{cases}$

195. $\begin{cases} x' + y' - y = e^t, \\ 2x' + y' + 2y = \cos t, \\ x(0) = y(0) = 0. \end{cases}$

196. $\begin{cases} x' - x + y = \dfrac{3}{2}\,t^2, \\ y' + 4x + 2y = 4t + 1, \\ x(0) = y(0) = 0. \end{cases}$

197. $\begin{cases} x' + 2x + 2y = 10e^{2t}, \\ y' - 2x + y = 7e^{2t}, \\ x(0) = 1,\ y(0) = 3. \end{cases}$

198. $\begin{cases} x'' - 3x - 4y + 3 = 0, \\ y'' + x + y + 5 = 0, \\ x(0) = x'(0) = 0, \\ y(0) = y'(0) = 0. \end{cases}$

199. $\begin{cases} x'' + y - 1 = 0, \\ y'' + x = 0, \\ x(0) = x'(0) = 0, \\ y(0) = y'(0) = 0. \end{cases}$

200. $\begin{cases} x' = y + z, \\ y' = x + z, \\ z' = x + y, \\ x(0) = -1,\ y(0) = 1, \\ z(0) = 0. \end{cases}$

201. $\begin{cases} x' = y + z - x, \\ y' = x + z - y, \\ z' = x + y + z, \\ x(0) = 1, \\ y(0) = z(0) = 0. \end{cases}$

202. $\begin{cases} x' = x - 2y - 2z, \\ y' = 2x + 7y + 5z, \\ z' = -2x - 4y - 2z, \\ x(0) = 0,\ y(0) = 3, \\ z(0) = -2. \end{cases}$ **203.** $\begin{cases} x' = -x + y + z, \\ y' = x - y + z, \\ z' = x + y - z, \\ x(0) = y(0) = 2, \\ z(0) = -1. \end{cases}$

Занятак 8. Кантрольная работа

Заданні для падрыхтоўкі да КР № 1

I. Раскласці ў шэраг Фур'е функцыі:

$$\text{а) } f(x) = \cos^4 x,\ x \in \mathbb{R}; \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} 2x, & -\pi < x < 0, \\ -3x, & 0 < x < \pi; \end{cases}$$

$$\text{у) } f(x) = \operatorname{sgn}(\sin x),\ x \in \mathbb{R}.$$

II. Раскласці ў шэраг Фур'е функцыі па косінусах і сінусах на адрэзку $[0, l]$:

$$\text{а) } f(x) = (x - l)^2; \quad \text{б) } f(x) = \cos x;$$

$$\text{у) } f(x) = \operatorname{sgn}(x - l) - \operatorname{sgn}\Big(x - \frac{l}{2}\Big).$$

III. Выявіць інтэгралам Фур'е функцыі:

$$\text{а) } f(x) = \begin{cases} 2, & |x| < 3, \\ 0, & |x| \geqslant 3; \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = e^{-a|x|}\cos(bx),\ a > 0.$$

IV. Выявіць інтэгралам Фур'е функцыі, працягнуўшы цотным чынам на інтэрвал $(-\infty, 0)$:

$$\text{а) } f(x) = \begin{cases} 4 - 5x, & 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{4}{5}, \\ 0, & x > \dfrac{4}{5}; \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} \sin x, & 0 \leqslant x \leqslant \pi, \\ 0, & x > \pi. \end{cases}$$

V. Выявіць інтэгралам Фур'е функцыі, працягнуўшы няцотным чынам на інтэрвал $(-\infty, 0)$:

$$\text{а) } f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0, & x > 1; \end{cases} \quad \text{б) } f(x) = \begin{cases} \cos x, & 0 \leqslant x \leqslant \pi, \\ 0, & x > \pi. \end{cases}$$

VI. Знайсці выявы зададзеных арыгіналаў:

$$\text{а) } (t+1)\sin 2t; \quad \text{б) } e^{-4t}\sin 3t \cos 2t; \quad \text{у) } te^t \cos t; \quad \text{г) } e^{-t}t^3.$$

VII. Знайсці арыгіналы зададзеных выяваў:

$$\text{а) } \frac{2p+3}{p^3+4p^2+5p}; \quad \text{б) } \frac{p+1}{p^2(p+2)}; \quad \text{у) } \frac{p+2}{p(p^2+4)}; \quad \text{г) } \frac{p-1}{p^3+1}.$$

VIII. Развязаць задачы Кашы:

а) $x''' + x' = \cos t, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = -2, \quad x''(0) = 0;$
б) $x'' - 2x' = e^{2t}, \quad x(0) = x'(0) = 0;$
у) $x'' - x' + x = e^{-t}, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1;$
а) $x'' + x = 2\sin t, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = -1.$

IX. Развязаць задачы Кашы:

$$\text{а) } \begin{cases} x' = y - 7x, \\ y' = -2x - 5y, \\ x(0) = 2, \quad y(0) = 0; \end{cases} \qquad \text{б) } \begin{cases} x' = 3x + 4y, \\ y' = 4x - 3y, \\ x(0) = 0, \quad y(0) = 1. \end{cases}$$

ТЭМА III. РАЎНАННІ ГІПЕРБАЛІЧНАГА ТЫПУ

1. Прывядзенне да кананічнай формы дыферэнцыяльных раўнанняў з частковымі вытворнымі другога парадку.

Будзем разглядаць дыферэнцыяльныя раўнанні з частковымі вытворнымі другога парадку. Для дзвюх незалежных зменных x і y такое дыферэнцыяль-нае раўнанне ў агульным выпадку запісваюць суадносінай

$$F(x, y, u, u'_x, u'_y, u''_{xx}, u''_{xy}, u''_{yy}) = 0.$$

Калі дыферэнцыяльнае раўнанне лінейнае адносна старэйшых вытворных, то яго называюць ***квазілінейным раўнаннем*** і запісваюць у выглядзе

$$a_{11}u''_{xx} + 2a_{12}u''_{xy} + a_{22}u''_{yy} + F(x, y, u, u'_x, u'_y) = 0, \tag{43}$$

дзе a_{11}, a_{12} і a_{22} — зададзеныя функцыі зменных x і y.

Дыферэнцыяльнае раўнанне называюць ***лінейным***, калі яно лінейнае як адносна шуканай функцыі, так і адносна яе частковых вытворных. Такое раўнанне запісваюць у выглядзе

$$a_{11}u''_{xx} + 2a_{12}u''_{xy} + a_{22}u''_{yy} + b_1u'_x + b_2u'_y + cu + f(x, y) = 0. \tag{44}$$

Калі каэфіцыенты раўнання (44) не залежаць ад x і y, то раўнанне (44) уяўляе сабой ***лінейнае дыферэнцыяльнае раўнанне са сталымі каэфіцыентамі***.

Вылучым тры тыпы раўнанняў у форме (43) або (44). Назавём іх раўнаннямі ***гіпербалічнага тыпу***, калі ў некаторым пункце M (або абсягу G) $D > 0$, ***парабалічнага тыпу***, калі $D = 0$, і ***эліптычнага тыпу***, калі $D < 0$. Тут $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$ — ***дыскрымінант*** раўнання.

Прыналежнасць раўнання да аднаго з гэтых тыпаў вызначае некаторыя агульныя ўласцівасці яго развязкаў і дазваляе выбраць метады развязання задач для такога раўнання.

Раўнанні са зменнымі каэфіцыентамі могуць змяняць свой тып у розных пунктах. Прыкладам такога раўнання змяшанага тыпу з'яўляецца раўнанне Трыкомі

$$u''_{xx} + xu''_{yy} = 0,$$

цікавае для газавай дынамікі. Так як дыскрымінант гэтага раўнання $D = -x$, то раўнанне Трыкомі з'яўляецца эліптычным, калі $x > 0$, і гіпербалічным, калі $x < 0$.

З дапамогай пераўтварэння зменных

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y),$$

якое дапускае адваротнае пераўтварэнне, мы атрымліваем новае раўнанне, эквівалентнае зыходнаму. Натуральна паставіць пытанне: як выбіраць ξ і η, каб раўнанне з гэтымі зменнымі мела найбольш простую форму?

Для таго каб было магчыма ўвесці новыя зменныя ξ і η праз функцыі φ і ψ, неабходна пераканацца ў незалежнасці гэтых функцый. Дастатковай умовай гэтага з'яўляецца адрозненне ад нуля якабіяна пераўтварэння

$$I(x, y) = \begin{vmatrix} \varphi'_x & \varphi'_y \\ \psi'_x & \psi'_y \end{vmatrix} \neq 0.$$

Згодна з правілам дыферэнцавання складанай функцыі знаходзім

$$\begin{aligned}
&u'_x = u'_\xi \cdot \varphi'_x + u'_\eta \cdot \psi'_x, \quad u'_y = u'_\xi \cdot \varphi'_y + u'_\eta \cdot \psi'_y, \\
&u''_{xx} = u''_{\xi\xi}(\varphi'_x)^2 + 2u''_{\xi\eta}\varphi'_x\psi'_x + u''_{\eta\eta}(\psi'_x)^2 + u'_\xi\varphi''_{xx} + u'_\eta\psi''_{xx}, \\
&u''_{xy} = u''_{\xi\xi}\varphi'_x\varphi'_y + u''_{\xi\eta}[\varphi'_x\psi'_y + \varphi'_y\psi'_x] + u''_{\eta\eta}\psi'_x\psi'_y + u'_\xi\varphi''_{xy} + u'_\eta\psi''_{xy}, \\
&u''_{yy} = u''_{\xi\xi}(\varphi'_y)^2 + 2u''_{\xi\eta}\varphi'_y\psi'_y + u''_{\eta\eta}(\psi'_y)^2 + u'_\xi\varphi''_{yy} + u'_\eta\psi''_{yy}.
\end{aligned}$$

Падстаўляючы гэтыя выразы ў (43) атрымаем раўнанне

$$A_{11}u''_{\xi\xi} + 2A_{12}u''_{\xi\eta} + A_{22}u''_{\eta\eta} + \Phi(\xi, \eta, u, u'_\xi, u'_\eta) = 0. \qquad (45)$$

Тут

$$A_{11} = a_{11}(\varphi'_x)^2 + 2a_{12}\varphi'_x\varphi'_y + a_{22}(\varphi'_y)^2,$$
$$A_{12} = a_{11}\varphi'_x\psi'_x + a_{12}(\varphi'_x\psi'_y + \varphi'_y\psi'_x) + a_{22}\varphi'_y\psi'_y,$$
$$A_{22} = a_{11}(\psi'_x)^2 + 2a_{12}\psi'_x\psi'_y + a_{22}(\psi'_y)^2.$$

Нескладана пераканацца ў праўдзівасці роўнасці $A_{12}^2 - A_{11}A_{22} = (a_{12}^2 - a_{11}a_{22})I^2(x, y)$, з якой вынікае, што разгляданае пераўтварэнне незалежных зменных не змяняе тып раўнання. Аднак функцыі $\varphi(x, y)$ і $\psi(x, y)$ можна выбраць такімі, каб з новымі зменнымі частка каэфіцыентаў пераўтварылася ў нуль, а раўнанне (45) набыло найбольш просты выгляд, які называецца ***кананічнай формай*** раўнання.

Пераход да кананічнай формы можна ажыццявіць з дапамогай агульных інтэгралаў дыферэнцыяльнага раўнання

$$a_{11}(dy)^2 - 2a_{12}dxdy + a_{22}(dx)^2 = 0, \tag{46}$$

якое называюць ***характарыстычным*** для раўнання (43) і (44), а яго інтэгралы — ***характарыстычнымі крывымі*** або ***характарыстыкамі***.

Калі $\varphi(x, y) = C$ — агульны інтэграл характарыстычнага раўнання (46), то ўздоўж характарыстычнай крывой маем

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y} \quad \text{або} \quad dy = -\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}\,dx. \tag{47}$$

Падстаўляючы выраз для dy з (47) у (46), робім выснову аб тым, што функцыя $z = \varphi(x, y)$ развязвае дыферэнцыяльнае раўнанне першага парадку:

$$a_{11}(z'_x)^2 + 2a_{12}z'_xz'_y + a_{22}(z'_y)^2 = 0. \tag{48}$$

Калі ў некаторым абсягу G раўнанне (43) з'яўляецца раўнаннем гіпербалічнага тыпу $(D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0)$, то ў гэтым абсягу характарыстычнае раўнанне распадаецца на два раўнанні

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} \pm \sqrt{D}}{a_{11}},$$

якія маюць дзве сям'і характарыстык $\varphi(x,y) = C_1$ і $\psi(x,y) = C_2$. Тады з дапамогай пераўтварэння незалежных зменных

$$\xi = \varphi(x,y), \quad \eta = \psi(x,y),$$

прыходзім да раўнання (45), у якім з улікам (48) $A_{11} = 0$ і $A_{22} = 0$. Таму, дзелячы атрыманы выраз на $2A_{12} \neq 0$, прыводзім раўнанне (45) да кананічнай формы для раўнанняў гіпербалічнага тыпу:

$$u''_{\xi\eta} = \Phi_1(\xi,\eta,u,u'_\xi,u'_\eta), \quad \Phi_1 = -\frac{\Phi}{2A_{12}}.$$

Заўвага 2. *Калі новыя зменныя ξ і η маюць выгляд*

$$\xi = \frac{\varphi(x,y)+\psi(x,y)}{2}, \quad \eta = \frac{\varphi(x,y)-\psi(x,y)}{2},$$

то для раўнання гіпербалічнага тыпу можна запісаць другую кананічную форму

$$u''_{\xi\xi} - u''_{\eta\eta} = \Phi_1^*(\xi,\eta,u,u'_\xi,u'_\eta).$$

Калі ў абсягу G раўнанне (43) з'яўляецца раўнаннем парабалічнага тыпу $(D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0)$, то ў гэтым абсягу характарыстычнае раўнанне (46)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12}}{a_{11}}$$

мае толькі адну сям'ю характарыстык $\varphi(x,y) = C$.

Тады, лічачы $\xi = \varphi(x,y)$ і $\eta = \psi(x,y)$, дзе $\psi(x,y)$ — адвольная функцыя, якая не залежыць ад функцыі $\varphi(x,y)$, прыходзім да раўнання (45), у якім $A_{11} = 0$. Але так як для раўнання парабалічнага тыпу $A_{12}^2 - A_{11}A_{12} = 0$, то такім чынам, і $A_{12} = 0$. Таму пасля пераходу да новых незалежных зменных раўнанне (45) набывае кананічную форму для раўнанняў парабалічнага тыпу:

$$u''_{\eta\eta} = \Phi_2(\xi,\eta,u,u'_\xi,u'_\eta), \quad \Phi_2 = -\frac{\Phi}{A_{22}}.$$

Калі раўнанне (43) у абсягу G з'яўляецца раўнаннем эліптычнага тыпу $(D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0)$, то характарыстычнае раўнанне (46) прыводзіць да двух раўнанняў у камплекснай форме:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12}}{a_{11}} \pm i\frac{\sqrt{-D}}{a_{11}}.$$

Дадзеныя раўнанні маюць два камплексна-спалучаныя інтэгралы $\rho_1(x,y) = C_1$ і $\rho_2(x,y) = C_2$, дзе $\rho_1(x,y) = \varphi(x,y) + i\psi(x,y)$, а $\rho_2(x,y) = \varphi(x,y) - i\psi(x,y)$, прычым функцыі $\varphi(x,y)$ і $\psi(x,y)$ з'яўляюцца рэчаіснымі функцыямі сваіх аргументаў.

Выконваючы замену зменных $\xi = \varphi(x,y)$ і $\eta = \psi(x,y)$, атрымаем у раўнанні (45) $A_{11} = A_{22}$, а $A_{12} = 0$. Таму пасля пераўтварэння раўнанне (45) можна запісаць у кананічнай форме для раўнанняў эліптычнага тыпу:

$$u''_{\xi\xi} + u''_{\eta\eta} = \Phi_3(\xi, \eta, u, u'_\xi, u'_\eta), \quad \Phi_3 = -\frac{\Phi}{A_{11}}.$$

Лінейнае раўнанне (44) са сталымі каэфіцыентамі мае аднолькавы тып у любым абсягу G. Такому раўнанню адпавядае характарыстычнае раўнанне (46) таксама са сталымі каэфіцыентамі. Таму характарыстыкамі лінейнага раўнання са сталымі каэфіцыентамі з'яўляюцца прамыя $y = kx + b$, дзе $k = \dfrac{a_{12} \pm \sqrt{D}}{a_{11}}$, $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$.

З дапамогай прыведзеных вышэй пераўтварэнняў зменных раўнанне (44) гіпербалічнага тыпу $(D > 0)$ прыводзіцца да адной з наступных формаў:

$$u''_{\xi\eta} + b_1 u'_\xi + b_2 u'_\eta + cu + f(\xi, \eta) = 0,$$
$$u''_{\xi\xi} - u''_{\eta\eta} + b_1 u'_\xi + b_2 u'_\eta + cu + f(\xi, \eta) = 0.$$

Лінейныя раўнанні са сталымі каэфіцыентамі парабалічнага $(D = 0)$ і эліптычнага $(D < 0)$ тыпаў маюць адпаведна кананічныя формы

$$u''_{\eta\eta} + b_1 u'_\xi + b_2 u'_\eta + cu + f(\xi, \eta) = 0,$$
$$u''_{\xi\xi} + u''_{\eta\eta} + b_1 u'_\xi + b_2 u'_\eta + cu + f(\xi, \eta) = 0.$$

Занятак 9

Задача 204. Прывесці да кананічнай формы раўнанне

$$u''_{xx} + 2u''_{xy} - 3u''_{yy} + 2u'_x + 6u'_y = 0.$$

Развязанне. Дыскрымінант раўнання $D = 1^2 + 1 \cdot 3 = 4 > 0$, такім чынам, гэта раўнанне гіпербалічнага тыпу. Раўнанне характарыстык мае выгляд

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2\,\frac{dy}{dx} - 3 = 0,$$

адкуль знойдзем $\dfrac{dy}{dx} = 3$, $\dfrac{dy}{dx} = -1$, а агульныя інтэгралы

$$y - 3x = C_1, \quad y + x = C_2.$$

Зробім замену зменных: $\xi = y - 3x$, $\eta = y + x$. Тады

$$\begin{aligned}
&u'_x = u'_\xi \cdot (-3) + u'_\eta, \quad u'_y = u'_\xi + u'_\eta,\\
&u''_{xx} = 9u''_{\xi\xi} - 6u''_{\xi\eta} + u''_{\eta\eta}, \quad u''_{yy} = u''_{\xi\xi} + 2u''_{\xi\eta} + u''_{\eta\eta},\\
&u''_{xy} = -3u''_{\xi\xi} - 2u''_{\xi\eta} + u''_{\eta\eta}.
\end{aligned}$$

Падстаўляючы знойдзеныя вытворныя ў раўнанне, атрымаем

$$\begin{aligned}
9u''_{\xi\xi} - 6u''_{\xi\eta} + u''_{\eta\eta} - 6u''_{\xi\xi} - 4u''_{\xi\eta} + 2u''_{\eta\eta} - 3u''_{\xi\xi} -&\\
- 6u''_{\xi\eta} - 3u''_{\eta\eta} - 6u'_\xi + 2u'_\eta + 6u'_\xi + 6u'_\eta = 0&
\end{aligned}$$

або

$$u''_{\xi\eta} = \frac{1}{2}\,u'_\eta.$$

Задача 205. Прывесці да кананічнай формы раўнанне

$$u''_{xx} - 2u''_{xy} + u''_{yy} + \alpha u'_x + \beta u'_y + \gamma u = 0.$$

Развязанне. Дыскрымінант $D = 1 - 1 = 0$, раўнанне парабалічнага тыпу. Раўнанне характарыстык мае выгляд

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 2\,\frac{dy}{dx} + 1 = 0,$$

адкуль атрымаем $\dfrac{dy}{dx} = -1$ і адзін агульны інтэграл $x + y = C_1$.

Азначым новыя зменныя, лічачы $\xi = x + y$, а $\eta = x$ — незалежная ад $\xi(x, y)$ функцыя. У такім разе

$$u'_x = u'_\xi + u'_\eta, \quad u'_y = u'_\xi,$$
$$u''_{xx} = u''_{\xi\xi} + 2u''_{\xi\eta} + u''_{\eta\eta}, \quad u''_{yy} = u''_{\xi\xi}, \quad u''_{xy} = u''_{\xi\xi} + u''_{\xi\eta}.$$

Падстаўляючы ў раўнанне, атрымаем кананічную форму

$$u''_{\xi\xi} + 2u''_{\xi\eta} + u''_{\eta\eta} - 2u''_{\xi\xi} - 2u''_{\xi\eta} + u''_{\xi\xi} + \alpha(u'_\xi + u'_\eta) + \beta u'_\xi + \gamma u = 0$$

або

$$u''_{\eta\eta} = -(\alpha + \beta)u'_\xi - \alpha u'_\eta - \gamma u.$$

Задача 206. Прывесці да кананічнай формы раўнанне

$$u''_{xx} + 2u''_{xy} + 2u''_{yy} = 0.$$

Развязанне. Дыскрымінант $D = 1^2 - 1 \cdot 2 < 0$, г. зн. раўнанне эліптычнага тыпу. Раўнанне характарыстык

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2\,\frac{dy}{dx} + 2 = 0$$

мае адзін з развязкаў $y - (1 + i)x = C_1$. Азначым новыя зменныя $\xi = y - x$, $\eta = -x$, тады

$$u'_x = u'_\xi \cdot (-1) + u'_\eta \cdot (-1), \quad u'_y = u'_\xi \cdot 1,$$
$$u''_{xx} = u''_{\xi\xi} + 2u''_{\xi\eta} + u''_{\eta\eta}, \quad u''_{yy} = u''_{\xi\xi},$$
$$u''_{xy} = -u''_{\xi\xi} - u''_{\xi\eta}.$$

Падстаўляючы знойдзеныя вытворныя ў зыходнае раўнанне, атрымаем

$$u''_{\xi\xi} + u''_{\eta\eta} = 0.$$

Задача 207. Прывесці да кананічнай формы раўнанне

$$u''_{xx} + xu''_{yy} = 0.$$

Развязанне. Гэта раўнанне са зменнымі каэфіцыентамі, прычым яго дыскрымінант $D = -x$. Раўнанне ў абсягу $x < 0$ мае гіпербалічны тып, а ў абсягу $x > 0$ — эліптычны.

Разгледзім першы выпадак, калі $x<0$. Раўнанне характарыстык мае выгляд

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+x=0, \quad \frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{-x},$$

а яго агульныя інтэгралы

$$C_1=y+\frac{2}{3}(-x)^{3/2}, \quad C_2=y-\frac{2}{3}(-x)^{3/2}.$$

Зробім замену

$$\xi=y+\frac{2}{3}(-x)^{3/2}, \quad \eta=y-\frac{2}{3}(-x)^{3/2}.$$

Знаходзім вытворныя

$$\begin{aligned}
&u'_x=-u'_\xi\sqrt{-x}+u'_\eta\sqrt{-x}, \quad u'_y=u'_\xi+u'_\eta,\\
&u''_{xx}=u''_{\xi\xi}(-x)+2xu''_{\xi\eta}+u''_{\eta\eta}(-x)+\frac{u'_\xi}{2\sqrt{-x}}-\frac{u'_\eta}{2\sqrt{-x}},\\
&u''_{yy}=u''_{\xi\xi}+2u''_{\xi\eta}+u''_{\eta\eta}.
\end{aligned}$$

Падстаўляючы ў раўнанне, атрымаем

$$4xu''_{\xi\eta}=\frac{u'_\eta}{2\sqrt{-x}}-\frac{u'_\xi}{2\sqrt{-x}} \quad \text{або} \quad u''_{\xi\eta}=\frac{u'_\xi-u'_\eta}{8(\sqrt{-x})^3}.$$

Засталося выразіць зменную x у раўнанні праз новыя зменныя ξ і η. Улічыўшы формулы замены зменных, будзем мець

$$\sqrt{-x}=\sqrt[3]{\frac{3(\xi-\eta)}{4}}.$$

Падстаўляючы ў раўнанне, канчаткова атрымаем

$$u''_{\xi\eta}=\frac{u'_\xi-u'_\eta}{6(\xi-\eta)}.$$

Разгледзім зараз другі выпадак. У абсягу $x>0$ раўнанне мае эліптычны тып і $D<0$. Раўнанне характарыстык

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+x=0$$

распадаецца на два раўнанні $\dfrac{dy}{dx} = \pm i\sqrt{x}$, а іх агульныя інтэгралы маюць выгляд

$$C_{1,2} = y \pm i\,\frac{2}{3}\,x^{3/2}.$$

Вылучым, напрыклад, інтэграл $C_1 = y + i\,\dfrac{2}{3}\,x^{3/2}$ і зробім адпаведную замену $\xi = y,\ \eta = \dfrac{2}{3}\,x^{3/2}$. Знойдзем вытворныя

$$u'_x = u'_\eta\sqrt{x}, \quad u'_y = u'_\xi, \quad u''_{xx} = xu''_{\eta\eta} + \frac{u'_\eta}{2\sqrt{x}}, \quad u''_{yy} = u''_{\xi\xi},$$

і падставім у раўнанне. Атрымаем

$$xu''_{\eta\eta} + \frac{u'_\eta}{2\sqrt{x}} + xu''_{\xi\xi} = 0 \ \Rightarrow\ u''_{\xi\xi} + u''_{\eta\eta} = -\frac{u'_\eta}{2x\sqrt{x}} \ \Rightarrow\ u''_{\xi\xi} + u''_{\eta\eta} = -\frac{u'_\eta}{3\eta}.$$

Вызначыць тып і прывесці да кананічнай формы раўнанне.

208. $2u''_{xx} - 6u''_{xy} + 4u''_{yy} = u - u'_x$.

209. $2u''_{xx} + 6u''_{xy} + 5u''_{yy} = u'_x + u'_y$.

210. $u''_{xx} - 4u''_{xy} + 4u''_{yy} = u + 2u'_x$.

211. $u''_{xx} - 8u''_{xy} + 15u''_{yy} = 1 + u'_y$.

212. $17u''_{xx} - 8u''_{xy} + u''_{yy} = 5u$.

213. $9u''_{xx} - 6u''_{xy} + u''_{yy} = x + 2y$.

214. $y^2u''_{xx} - 4x^2u''_{yy} = 0$.

215. $4x^2u''_{xx} + y^2u''_{yy} = 0$.

216. $y^2u''_{xx} + 4xyu''_{xy} + 4x^2u''_{yy} = 0$.

2. Метад падзелу зменных для аднароднага раўнання ваганняў струны.

Метад падзелу зменных або ***метад Фур'е*** з'яўляецца адным з асноўных метадаў развязання краявых задач для раўнанняў матэматычнай фізікі. Разгледзім яго для задачы аб свабодных ваганнях абмежаванай струны з замацаванымі канцамі, якая фармулюецца наступным чынам: знайсці развязак аднароднага хвалевага раўнання

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad 0 < x < l, \tag{49}$$

які задавальняе аднародныя межавыя умовы

$$u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0, \quad t \geqslant 0, \tag{50}$$

і пачатковыя умовы

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \tag{51}$$

Ідэя метаду Фур'е заснаваная на лінейнасці і аднароднасці раўнання і межавых умоваў. У гэтым выпадку мае месца прынцып суперпазіцыі для любых частковых развязкаў u_1 і u_2 раўнання (49), якія задавальняюць умовы (50), г.зн. функцыя $u = C_1u_1 + C_2u_2$, дзе $C_{1,2} = \text{const}$, таксама задавальняе раўнанне (49) і межавыя ўмовы (50). З дапамогай суперпазіцыі лінейна незалежных частковых развязкаў можна выканаць таксама і пачатковыя ўмовы (51).

Будзем шукаць нетрывіяльны развязак раўнання (49) у выглядзе здабытку дзвюх функцый

$$u(x,t) = X(x)T(t), \tag{52}$$

адна з якіх залежыць толькі ад зменнай x, а другая — толькі ад t. Дыферэнцуючы двойчы выраз (52) па x і t і падстаўляючы яго ў раўнанне, (49) атрымаем

$$X(x)T''(t) = a^2X''(x)T(t)$$

або

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}. \tag{53}$$

Роўнасць (53) павінна выконвацца для ўсіх значэнняў $x \in (0, l)$ і $t > 0$. Асаблівасцю суадносіны (53) з'яўляецца падзел зменных: яго левая частка залежыць толькі ад t, а правая — толькі ад x. Гэта магчыма толькі ў тым выпадку, калі абедзве яго часткі не залежаць ні ад x, ні ад t, г. зн. з'яўляюцца сталымі велічынямі. Абазначыўшы гэтую сталую падзелу праз $-\lambda$, запішам (53) у выглядзе

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda.$$

Адкуль вынікае, што функцыі $T(t)$ і $X(x)$ можна вызначыць развязваючы звычайныя дыферэнцыяльныя раўнанні са сталымі каэфіцыентамі:

$$T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0, \quad X''(x) + \lambda X(x) = 0.$$

Каб гэтыя частковыя развязкі выгляду (52) задавальнялі межавыя умовы (50) для любога $t \geqslant 0$, неабходна запатрабаваць выкананне ўмоваў $X(0) = 0$ і $X(l) = 0$.

Такім чынам, для каардынатнай функцыі $X(x)$ прыходзім да наступнай задачы: знайсці развязкі лінейнага аднароднага дыферэнцыяльнага раўнання другога парадку

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad 0 < x < l, \tag{54}$$

якія задавальняюць у межавых пунктах $x = 0$ і $x = l$ умовы

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0. \tag{55}$$

Для любога $\lambda = \text{const}$ гэтая задача мае трывіяльны развязак $X(x) \equiv 0$. Ніжэй будзе паказана, што для некаторых дадатных значэнняў сталай λ задача (54), (55) мае таксама нетрывіяльныя развязкі. Такія "асаблівыя" значэнні λ называюцца ***уласнымі значэннямі***, а адпаведныя ім нетрывіяльныя развязкі $X(x)$ — ***уласнымі функцыямі*** задачы (54), (55). Задача адшукання ўласных значэнняў і ўласных функцый называецца ***задачай Штурма — Ліўвіля***.

Няцяжка паказаць, што ў выпадку $\lambda \leqslant 0$ існуюць толькі трывіяльныя развязкі задачы Штурма — Ліўвіля, г. зн. такія λ не могуць быць уласнымі значэннямі гэтай задачы. Калі $\lambda > 0$, то агульны развязак раўнання (54)

$$X(x) = C_1 \cos\bigl(\sqrt{\lambda}\, x\bigr) + C_2 \sin\bigl(\sqrt{\lambda}\, x\bigr)$$

задавальняе межавыя ўмовы

$$\begin{cases} X(0) = C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 = 0, \\ X(l) = C_1 \cos\bigl(\sqrt{\lambda}\, l\bigr) + C_2 \sin\bigl(\sqrt{\lambda}\, l\bigr) = 0, \end{cases} \tag{56}$$

адкуль $C_1 = 0$, $C_2 = C \neq 0$. Для пэўнасці возьмем $C = 1$. Пры гэтым вызначнік $\Delta = \sin\big(\sqrt{\lambda}\, l\big)$ сістэмы (56) роўны нулю, толькі калі $\sqrt{\lambda}\, l = n\pi$, $n = 1, 2, \ldots$

Такім чынам, толькі для ўласных значэнняў

$$\lambda = \lambda_n = \Big(\frac{n\pi}{l}\Big)^2, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

задача (54), (55) мае нетрывіяльныя развязкі

$$X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{l}, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{57}$$

артаганальныя на адрэзку $[0, l]$ з вагой $\rho(x) = 1$. Кожнаму ўласнаму значэнню λ_n будзе адпавядаць функцыя $T_n(t)$, якую знаходзім развязваючы раўнанне

$$T_n''(t) + \Big(\frac{n\pi}{l}\Big)^2 a^2 T_n(t) = 0.$$

Агульны развязак гэтага раўнання мае выгляд

$$T_n(t) = a_n \cos\frac{n\pi a t}{l} + b_n \sin\frac{n\pi a t}{l}, \tag{58}$$

дзе a_n і b_n — адвольныя сталыя.

Падстаўляючы выразы (57) і (58) у формулу (52), знойдзем частковыя развязкі раўнання (49), якія задавальняюць межавыя ўмовы (50). Кожнаму $n = 1, 2, \ldots,$ адпавядае развязак

$$u_n(x,t) = \Big(a_n \cos\frac{n\pi a t}{l} + b_n \sin\frac{n\pi a t}{l}\Big) \sin\frac{n\pi x}{l}. \tag{59}$$

Суперпазіцыя ўсіх развязкаў выгляду (59)

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\Big(a_n \cos\frac{n\pi a t}{l} + b_n \sin\frac{n\pi a t}{l}\Big) \sin\frac{n\pi x}{l} \tag{60}$$

будзе таксама развязкам раўнання (49), які задавальняе межавыя ўмовы (50), калі шэраг (60) для любога $x \in (0, l)$ і $t \geqslant 0$ збягаецца і яго можна двойчы паскладова дыферэнцаваць па x і t. У гэтым выпадку можна падабраць сталыя a_n і b_n так, каб функцыя, пададзеная шэрагам (60), задавальняла пачатковыя ўмовы (51). Для гэтага прадыферэн-цуем пакладова шэраг (60) па t:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi a}{l} \Big(-a_n \sin\frac{n\pi at}{l} + b_n \cos\frac{n\pi at}{l} \Big) \sin\frac{n\pi x}{l},$$

і задаволім пачатковыя умовы:

$$\begin{aligned} u\big|_{t=0} &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi x}{l} = \varphi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \\ \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\pi a}{l} b_n \sin\frac{n\pi x}{l} = \psi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \end{aligned} \tag{61}$$

Роўнасці (61) ўяўляюць сабой расклады зададзеных функцый $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ у шэрагі Фур'е па артаганальнай у інтэрвале $(0, l)$ сістэме трыганаметрычных функцый $\left\{ \sin\frac{n\pi x}{l} \right\}_{n=1}^{\infty}$. Таму каэфіцыенты a_n і $\frac{n\pi a}{l} b_n$ гэтых раскладаў з'яўляюцца каэфіцыентамі Фур'е φ_n і ψ_n функцый $\varphi(x)$ і $\psi(x)$. Вызначаючы гэтыя каэфіцыенты па формулах Эйлера — Фур'е (гл. формулы (8)), атрымаем

$$\begin{aligned} a_n &= \varphi_n = \frac{2}{l} \int_0^l \varphi(x) \sin\frac{n\pi x}{l}\, dx, \\ b_n &= \frac{l}{n\pi a} \psi_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^l \psi(x) \sin\frac{n\pi x}{l}\, dx. \end{aligned} \tag{62}$$

Такім чынам, шэраг (60) з каэфіцыентамі a_n і b_n, якія вылічаюцца па формулах (62), канчаткова вызначае развязак выходнай краявой задачы (49)—(51).

Развязаная задача называецца ***змяшанай задачай для аднароднага раўнання ваганняў струны***. Разнастайнасць змяшаных задач узнікае за кошт змянення межавых умоваў.

Разгледзім, напрыклад, задачу аб падоўжных ваганнях стрыжня даўжыні l, левы канец якога замацаваны жорстка, а правы вольны, з адвольнымі пачатковымі умовамі. Адпаведная змяшаная задача для гэтага выпадку выглядае наступным чынам:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad 0 < x < l, \\ u\big|_{x=0} = 0, \quad u'_x\big|_{x=l} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

Задача Штурма — Ліўвіля для каардынатнай функцыі $X(x)$ пасля падзелу зменных набывае выгляд

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \tag{63}$$

$$X(0) = X'(l) = 0. \tag{64}$$

Развязваючы гэтую краявую задачу для звычайнага дыферэнцыяльнага раўнання другога парадку са сталымі каэфіцыентамі, знойдзем уласныя значэнні $\lambda_n = \left[\dfrac{(2n+1)\pi}{2l}\right]^2$ і ўласныя функцыі $X_n(x) = \sin\dfrac{(2n+1)\pi x}{2l}$, $n = 0, 1, \ldots$

Разгледжаныя вышэй задачы (54), (55) і (63), (64) з'яўляюцца прыватнымі выпадкамі больш агульнай задачы Штурма — Ліўвіля, да якой зводзіцца змяшаная задача для раўнання гіпербалічнага (або парабалічнага) тыпу з межавымі ўмовамі

$$-\alpha_1 u'_x\big|_{x=0} + \beta_1 u\big|_{x=0} = 0,$$
$$\alpha_2 u'_x\big|_{x=l} + \beta_2 u\big|_{x=l} = 0.$$

Гэту задачу можна запісаць у выглядзе

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dx}\Big[k(x)\dfrac{dX}{dx}\Big] - q(x)X(x) + \lambda\rho(x)X(x) = 0, \\ -\alpha_1 X'(0) + \beta_1 X(0) = 0, \\ \alpha_2 X'(l) + \beta_2 X(l) = 0, \end{cases} \tag{65}$$

дзе $k'(x) > 0$, $q(x) \geqslant 0$, $\rho(x) > 0$ — непарыўныя на $[0, l]$ функцыі.

Пералічым асноўныя ўласцівасці ўласных значэнняў і ўласных функцый гэтай задачы.

1. Існуе злічонае мноства $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots,$ уласных значэнняў і адпаведных ім лінейна незалежных уласных функцый $X_1(x), X_2(x), \dots,\ X_n(x), \dots,$ задачы (65). Усякая ўласная функцыя вызначаецца з дакладнасцю да адвольнага сталага множніка.

2. Усе ўласныя значэнні задачы (65) неадмоўныя.

3. Уласныя функцыі $X_n(x)$ і $X_m(x)$, якія адпавядаюць розным уласным значэнням λ_n і λ_m, артаганальныя з вагой $\rho(x)$ на адрэзку $[0,l]$, г. зн. $\int\limits_0^l \rho(x)X_n(x)X_m(x)\,dx = 0$. Такім чынам, калі $X_1(x), X_2(x), \dots,\ X_n(x), \dots,$ — сістэма ўласных функцый задачы Штурма — Ліўвіля, то

$$\int\limits_0^l \rho(x)X_n(x)X_m(x)\,dx = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \|X_n\|^2, & m = n, \end{cases}$$

дзе $\|X_n\|^2 = \int\limits_0^l \rho(x)X_n^2(x)\,dx$ — квадрат нормы функцыі $X_n(x)$.

4. Усякая функцыя, двойчы непарыўна дыферэнцавальная на $[0,l]$ і якая задавальняе межавыя ўмовы (65), раскладваецца ў шэраг Фур'е па ўласных функцыях задачы Штурма — Ліўвіля, абсалютна і раўнамерна збежны на адрэзку $[0,l]$ (тэарэма раскладання Сцяклова). Пры гэтым шэрагам Фур'е функцыі $f(x)$ па сістэме ўласных функцый задачы (65) называецца шэраг

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n X_n(x),$$

у якім каэфіцыенты Фур'е c_n вылічаюцца па формулах

$$c_n = \frac{1}{\|X_n\|^2} \int\limits_0^l \rho(x) f(x) X_n(x)\,dx. \tag{66}$$

Заўвага 3. *На практыцы з прычыны неадмоўнасці ўласных значэнняў задачы Штурма — Ліўвіля зручней у раўнанні замест* λ *запісваць* λ^2.

З улікам зробленай заўвагі прывядзем табліцу найбольш ужываных задачаў Штурма — Ліўвіля і адпаведных ім уласных значэнняў і ўласных функцый.

$\begin{cases} X'' + \lambda^2 X = 0, \\ X(0) = X(l) = 0. \end{cases}$	$\lambda_n = \dfrac{n\pi}{l}, \quad X_n = \sin\dfrac{n\pi x}{l},$ $\lVert X_n \rVert^2 = l/2, \quad n = 1, 2, \ldots$
$\begin{cases} X'' + \lambda^2 X = 0, \\ X'(0) = X'(l) = 0. \end{cases}$	$\lambda_n = \dfrac{n\pi}{l}, \quad X_n = \cos\dfrac{n\pi x}{l}, \quad n = 0, 1, \ldots,$ $\lVert X_0 \rVert^2 = l, \quad \lVert X_n \rVert^2 = l/2, \quad n = 1, 2, \ldots$
$\begin{cases} X'' + \lambda^2 X = 0, \\ X(0) = X'(l) = 0. \end{cases}$	$\lambda_n = \dfrac{(2n+1)\pi}{2l}, \quad X_n = \sin\dfrac{(2n+1)\pi x}{2l},$ $\lVert X_n \rVert^2 = l/2, \quad n = 0, 1, \ldots$
$\begin{cases} X'' + \lambda^2 X = 0, \\ X'(0) = X(l) = 0. \end{cases}$	$\lambda_n = \dfrac{(2n+1)\pi}{2l}, \quad X_n = \cos\dfrac{(2n+1)\pi x}{2l},$ $\lVert X_n \rVert^2 = l/2, \quad n = 0, 1, \ldots$

Занятак 10

Задача 217. Аднародная струна даўжыні l нацягнутая паміж пунктамі $x = 0$ і $x = l$. На інтэрвале (α, β) яе пунктам надаецца сталая пачатковая хуткасць v_0 (гэтага можна дасягнуць, удараючы па струне на гэтым участку плоскім жорсткім малаточкам). Знайсці ваганні струны ў любы момант часу.

Развязанне. Сфармуляваная задача зводзіцца да развязання змяшанай задачы для аднароднага раўнання ваганняў струны

$$u''_{tt} = a^2 u''_{xx}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \tag{67}$$

з межавымі

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \tag{68}$$

і пачатковымі

$$u(x,0) = 0, \quad u'_t(x,0) = \psi(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x < \alpha, \\ v_0, & \alpha \leqslant x \leqslant \beta, \\ 0, & \beta < x \leqslant l, \end{cases} \tag{69}$$

умовамі. Будзем шукаць нетрывіяльныя развязкі ў выглядзе

$$u(x,t) = X(x)T(t). \tag{70}$$

Падстаўляючы (70) у раўнанне (67) і краявыя ўмовы (68), атрымаем

$$T''X = a^2X''T, \quad X(0)T(t) = 0, \quad X(l)T(t) = 0.$$

Падзелім зменныя ў дыферэнцыяльным раўнанні:

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{a^2T} = -\lambda^2. \tag{71}$$

Для функцыі $X(x)$ прыходзім да задачы Штурма — Ліўвіля:

$$\begin{cases} X'' + \lambda^2 X = 0, \\ X(0) = 0, \quad X(l) = 0. \end{cases}$$

Агульны развязак раўнання мае выгляд $X(x) = C_1\cos\lambda x + C_2\sin\lambda x$. Адвольныя сталыя C_1 і C_2 вызначым з краявых умоваў:

$$C_1\cos(\lambda\cdot 0) + C_2\sin(\lambda\cdot 0) = 0 \;\Rightarrow\; C_1 = 0, \quad C_2\sin(\lambda l) = 0.$$

Паколькі шукаюцца нетрывіяльныя развязкі задачы Штурма — Ліўвіля, то $C_2 \neq 0$. Улічваючы, што ўласныя функцыі вызначаюцца з дакладнасцю да сталага множніка, возьмем $C_2 = 1$. Другая межавая ўмова дае $\sin(\lambda l) = 0$ або $\lambda l = k\pi$. Адсюль знаходзім уласныя значэнні $\lambda_k = \dfrac{k\pi}{l}$ і лінейна-незалежныя ўласныя функцыі $X_k(x) = \sin\dfrac{k\pi x}{l}$, $k = 1, 2, \ldots$, задачы Штурма — Ліўвіля. З тэорыі шэрагаў Фур'е (гл. тэму I) вядома, што сістэма функцый $\{X_k(x)\}$ артаганальная і поўная на адрэзку $[0, l]$, прычым квадрат нормы роўны $\|X_k\|^2 = \dfrac{l}{2}$.

Для функцыі $T(t)$ з суадносіны (71) атрымаем дыферэнцыяльнае раўнанне

$$T''(t) + a^2\lambda^2 T(t) = 0.$$

Кожнаму ўласнаму значэнню λ_k будзе адпавядаць функцыя $T_k(t)$, якую знаходзім з раўнання

$$T_k''(t) + \left(\frac{k\pi a}{l}\right)^2 T_k(t) = 0.$$

Агульны развязак гэтага раўнання мае выгляд

$$T_k(t) = A_k \cos\frac{k\pi at}{l} + B_k \sin\frac{k\pi at}{l}.$$

Такім чынам, функцыя

$$u_k(x,t) = T_k(t)X_k(x) = \Big(A_k \cos\frac{k\pi at}{l} + B_k \sin\frac{k\pi at}{l}\Big)\sin\frac{k\pi x}{l}$$

з'яўляецца развязкам зыходнага дыферэнцыяльнага раўнання, якая задавальняе межавыя умовы.

Развязак задачы, які задавальняе таксама і пачатковыя ўмовы, будзем шукаць у выглядзе шэрагу

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(t)X_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\Big(A_k \cos\frac{k\pi at}{l} + B_k \sin\frac{k\pi at}{l}\Big)\sin\frac{k\pi x}{l}.$$

Вызначым адвольныя каэфіцыенты, падстаўляючы гэты развязак у пачатковыя ўмовы (69). З першай пачатковай умовы маем

$$u(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\frac{k\pi x}{l} = 0,$$

адкуль вынікае, што $A_k = 0, \ k = 1, 2, \ldots$ З другой пачатковай умовы выцякае суадносіна

$$u'_t(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \frac{k\pi a}{l}\sin\frac{k\pi x}{l} = \psi(x),$$

дзе $B_k \dfrac{k\pi a}{l}$ — каэфіцыенты раскладу ў шэраг Фур'е функцыі $\psi(x)$ па ўласных функцыях $X_k(x)$. Адсюль знаходзім

$$B_k \frac{k\pi a}{l} = \frac{2}{l}\int_0^l \psi(x)X_k(x)dx = \frac{2}{l}\int_\alpha^\beta v_0 \sin\frac{k\pi x}{l}\,dx =$$

$$= \frac{2v_0}{k\pi}\Big(\cos\frac{k\pi\alpha}{l} - \cos\frac{k\pi\beta}{l}\Big) \ \Rightarrow \ B_k = \frac{2v_0 l}{ak^2\pi^2}\Big(\cos\frac{k\pi\alpha}{l} - \cos\frac{k\pi\beta}{l}\Big).$$

Шуканы развязак мае выгляд

$$u(x,t) = \frac{2v_0 l}{a\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\Big(\cos\frac{k\pi\alpha}{l} - \cos\frac{k\pi\beta}{l}\Big)\sin\frac{k\pi at}{l}\sin\frac{k\pi x}{l}.$$

Задача 218. Знайсці падоўжныя ваганні пругкага стрыжня, адзін канец якога $x = l$ замацаваны жорстка, а другі $x = 0$ вольны, з пачатковымі умовамі

$$u(x, 0) = h(l - x), \quad h = \text{const} > 0, \quad u'_t(x, 0) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l.$$

Развязанне. Адхіленні пунктаў стрыжня $u(x, t)$ ад становішча раўнавагі ёсць развязак змяшанай задачы

$$\begin{cases} u''_{tt} - a^2 u''_{xx} = 0, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u'_x(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u(x, 0) = h(l - x), \quad u'_t(x, 0) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

У згодзе з метадам Фур'е будзем шукаць нетрывіяльны развязак задачы ў выглядзе здабытку $u(x, t) = X(x)T(t)$. Пасля падстаноўкі ў раўнанне і падзелу зменных атрымаем два звычайныя дыферэнцыяльныя раўнанні з параметрам λ:

$$\frac{T''}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda^2.$$

З межавых умоваў маем $X'(0)T(t) = 0$, $X(l)T(t) = 0$, адкуль вынікае, што $X'(0) = 0$, $X(l) = 0$.

Цяпер развязваем задачу Штурма – Ліўвіля:

$$\begin{cases} X'' + \lambda^2 X = 0, \\ X'(0) = X(l) = 0. \end{cases}$$

Падстаўляючы агульны развязак $X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x$ у межавыя ўмовы, атрымаем

$$\begin{cases} -C_1 \lambda \cdot 0 + C_2 \lambda \cdot 1 = 0, \\ C_1 \cos \lambda l + C_2 \sin \lambda l = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = 0, \ C_1 = 1, \\ \cos \lambda l = 0. \end{cases}$$

Адсюль знаходзім уласныя значэнні і ўласныя функцыі:

$$\lambda_k = \frac{(2k+1)\pi}{2l}, \quad X_k(x) = \cos \frac{(2k+1)\pi x}{2l}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

З дыферэнцыяльнага раўнання для функцыі $T(t)$ знаходзім

$$T_k(t) = A_k \cos \frac{(2k+1)\pi a t}{2l} + B_k \sin \frac{(2k+1)\pi a t}{2l},$$

і развязак змяшанай задачы шукаем у выглядзе шэрагу

$$u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\Big[A_k\cos\frac{(2k+1)\pi at}{2l}+B_k\sin\frac{(2k+1)\pi at}{2l}\Big]\cos\frac{(2k+1)\pi x}{2l}.$$

Падставім гэты шэраг у першую пачатковую ўмову:

$$\sum_{k=0}^{\infty}A_k\cos\frac{(2k+1)\pi x}{2l}=h(l-x).$$

Адсюль вынікаюць формулы для каэфіцыентаў A_k:

$$A_k=\frac{2}{l}\int\limits_0^l h(l-x)\cos\frac{(2k+1)\pi x}{2l}\,dx=$$

$$=\frac{4h}{(2k+1)\pi}\int\limits_0^l \sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l}\,dx=\frac{8hl}{(2k+1)^2\pi^2}.$$

З другой пачатковай умовы атрымаем

$$\sum_{k=0}^{\infty}B_k\frac{(2k+1)\pi a}{2l}\cos\frac{(2k+1)\pi x}{2l}\,dx=0\ \Rightarrow\ B_k=0,\ k=0,1,\ldots$$

Падстаўляючы знойдзеныя каэфіцыенты ў шэраг, прыходзім да адказу

$$u(x,t)=\frac{8hl}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos\frac{(2k+1)\pi at}{2l}\cos\frac{(2k+1)\pi x}{2l}.$$

Задача 219. Знайсці падоўжныя ваганні аднароднага пругкага цыліндрычнага стрыжня даўжыні l, у якога абодва канцы вольныя.

Развязанне. Неабходна развязаць наступную змяшаную задачу:

$$\begin{cases} u''_{tt}=a^2u''_{xx},\\ u'_x(0,t)=u'_x(l,t)=0,\\ u(x,0)=\varphi(x),\quad u'_t(x,0)=\psi(x).\end{cases}$$

Няхай $u(x,t)=X(x)T(t)$. Пасля падзелу зменных атрымаем задачу Штурма — Ліўвіля для функцыі $X(x)$:

$$\begin{cases} X''+\lambda^2X=0,\\ X'(0)=X'(l)=0.\end{cases}$$

Агульны развязак дыферэнцыяльнага раўнання ў выпадку $\lambda \neq 0$ мае выгляд $X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x$. Падстаўляючы гэты развязак ў межавую ўмову на левым канцы, атрымаем

$$X'(x) = -C_1 \lambda \sin \lambda x + C_2 \lambda \cos \lambda x, \quad X'(0) = C_2 \lambda = 0,$$

адкуль вынікае, што $C_2 = 0$. Для правага канца $C_1 \lambda \sin(\lambda l) = 0$ або $\sin \lambda l = 0$. Адсюль $\lambda_k = \dfrac{k\pi}{l}$ і ўласныя функцыі маюць выгляд

$$X_k(x) = \cos \frac{k\pi x}{l}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Калі $\lambda = 0$, то агульным развязкам з'яўляецца мнагасклад першай ступені $X(x) = C_1 x + C_2$, і такім чынам,

$$X'(x) = C_1 \;\Rightarrow\; X'(0) = X'(l) = C_1 = 0, \quad X(x) = C_2.$$

Выбіраючы канстанту $C_2 = 1$, атрымаем яшчэ адну ўласную функцыю $X_0(x) = 1$, якая адпавядае ўласнаму значэнню $\lambda_0 = 0$.

Для функцый $T_k(t)$ маем дыферэнцыяльнае раўнанне

$$T_k''(t) + a^2 \lambda_k^2 T_k(t) = 0.$$

Яго агульным развязкам будуць функцыі

$$T_k(t) = A_k \cos \frac{k\pi a t}{l} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{l}, \quad k = 1, 2, \ldots, \quad T_0(t) = A_0 + B_0 t.$$

Развязак задачы будзем шукаць у выглядзе

$$u(x,t) = A_0 + B_0 t + \sum_{k=1}^{\infty} \Big(A_k \cos \frac{k\pi a t}{l} + B_k \sin \frac{k\pi a t}{l} \Big) \cos \frac{k\pi x}{l}. \quad (72)$$

Вызначым каэфіцыенты A_k і B_k з пачатковых умоваў:

$$u(x,0) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos \frac{k\pi x}{l} = \varphi(x),$$
$$u_t'(x,0) = B_0 + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \frac{k\pi a}{l} \cos \frac{k\pi x}{l} = \psi(x).$$

Паколькі для артаганальнай сістэмы $\left\{\cos\dfrac{k\pi x}{l}\right\}_{k=0}^{\infty}$ маюць месца роўнасці $\|X_0\|^2 = l$, $\|X_k\|^2 = \dfrac{l}{2}$, то ў згодзе з (66) $(\rho(x) = 1)$ для каэфіцыентаў Фур'е праўдзяцца формулы:

$$A_0 = \frac{1}{l}\int\limits_0^l \varphi(x)dx, \quad A_k = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx, \quad k = 1, 2, \ldots, \tag{73}$$

$$B_0 = \frac{1}{l}\int\limits_0^l \psi(x)dx, \quad B_k = \frac{2}{k\pi a}\int\limits_0^l \psi(x)\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{74}$$

Такім чынам, развязкам зыходнай задачы будзе шэраг (72), у якім каэфіцыенты вызначаюцца па формулах (73), (74).

Задача 220. Адзін канец $x = 0$ стрыжня вольны, а другі $x = l$ замацаваны пругка. Знайсці падоўжныя ваганні стрыжня з пачатковымі умовамі $u(x,0) = h(l-x)$, $h = \text{const} > 0$, $u'_t(x,0) = 0$.

Развязанне. Будзем шукаць развязак змяшанай задачы

$$\begin{cases} u''_{tt} - a^2u''_{xx} = 0, \\ u'_x|_{x=0} = 0, \quad (u'_x + Hu)\big|_{x=l} = 0, \\ u|_{t=0} = h(l-x), \quad u'_t|_{t=0} = 0, \quad H = \text{const} > 0, \end{cases}$$

у выглядзе $u(x,t) = X(x)T(t)$. Пасля падзелу зменных прыходзім да двух звычайных дыферэнцыяльных раўнанняў

$$\frac{T''}{a^2T} = \frac{X''}{X} = -\lambda^2.$$

З межавых умоваў вынікае, што $X'(0) = 0$, $X'(l) + HX(l) = 0$. Для функцыі $X(x)$ прыходзім да задачы Штурма — Ліўвіля:

$$\begin{cases} X'' + \lambda^2X = 0, \\ X'(0) = 0, \quad X'(l) + HX(l) = 0. \end{cases}$$

Падстаўляючы агульны развязак $X(x) = C_1\cos\lambda x + C_2\sin\lambda x$ у першую межавую ўмову, будзем мець $-\lambda C_1\cdot 0 + \lambda C_2\cdot 1 = 0$. Адсюль вынікае, што $C_2 = 0$. Лічачы $C_1 = 1$, атрымаем раўнанне, з якога вызначым ўласныя значэнні задачы Штурма — Ліўвіля:

$$-\lambda \sin \lambda l + H \cos \lambda l = 0 \quad \text{або} \quad \operatorname{tg} \lambda l - \frac{H}{\lambda} = 0, \quad \lambda l \operatorname{tg} \lambda l - Hl = 0.$$

Абазначым праз μ_k, $k = 1, 2, \ldots$, дадатныя карані раўнання $\mu \operatorname{tg} \mu - Hl = 0$. Тады $\lambda l = \mu_k$, $\lambda_k = \dfrac{\mu_k}{l}$, а ўласныя функцыі маюць выгляд $X_k(x) = \cos \dfrac{\mu_k x}{l}$.

З дыферэнцыяльнага раўнання для функцыі $T(t)$ знаходзім

$$T_k(t) = A_k \cos \frac{\mu_k a t}{l} + B_k \sin \frac{\mu_k a t}{l},$$

і развязак змяшанай задачы шукаем цяпер у выглядзе шэрагу

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \Big(A_k \cos \frac{\mu_k a t}{l} + B_k \sin \frac{\mu_k a t}{l} \Big) \cos \frac{\mu_k x}{l}.$$

Падстаўляючы гэты шэраг у першую пачатковую ўмову, атрымаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos \frac{\mu_k x}{l} = h(l-x) \Rightarrow A_k = \frac{h}{\int\limits_0^l \cos^2 \frac{\mu_k x}{l}\, dx} \int\limits_0^l (l-x) \cos \frac{\mu_k x}{l}\, dx =$$

$$= \frac{2h(1-\cos\mu_k)}{l} \Big(\frac{l}{\mu_k} \Big)^2 \Big(1 + \frac{\sin 2\mu_k}{2\mu_k} \Big)^{-1} = \frac{4hl}{\mu_k} \frac{1-\cos\mu_k}{2\mu_k + \sin 2\mu_k}.$$

З другой пачатковай умовы вынікае, што $B_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots$

Такім чынам, развязак задачы набывае выгляд

$$u(x,t) = 4hl \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-\cos\mu_k}{\mu_k(2\mu_k + \sin 2\mu_k)} \cos \frac{\mu_k a t}{l} \cos \frac{\mu_k x}{l},$$

дзе μ_k — дадатныя карані раўнання $\mu \operatorname{tg} \mu - Hl = 0$.

221. Адзін канец $x = 0$ стрыжня жорстка замацаваны, а другі $x = l$ замацаваны пругка. Знайсці падоўжныя ваганні стрыжня з адвольнымі пачатковымі ўмовамі.

222. Аднародная струна даўжыні l нацягнутая паміж двума пунктамі $x = 0$ і $x = l$. У пункце $x = c$ струна адцягваецца на невялікую адлегласць h ад становішча раўнавагі і ў момант $t = 0$ адпускаецца без пачатковай хуткасці. Вызначыць адхіленне $u(x,t)$ струны ў любы момант часу.

Развязаць змяшаную задачу.

223. $$\begin{cases} u''_{tt} - a^2 u''_{xx} = 0, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad u'_t|_{t=0} = \sin\dfrac{4\pi x}{l}, \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

224. $$\begin{cases} u''_{tt} - a^2 u''_{xx} = 0, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u|_{x=0} = 0, \quad u'_x|_{x=l} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = \sin\dfrac{3\pi x}{2l}, \quad u'_t|_{t=0} = \sin\dfrac{5\pi x}{2l}, \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

225. $$\begin{cases} u''_{tt} - a^2 u''_{xx} = 0, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u'_x|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = \cos\dfrac{\pi x}{2l}, \quad u'_t|_{t=0} = \cos\dfrac{3\pi x}{2l} + \cos\dfrac{7\pi x}{2l}, \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

226. $$\begin{cases} u''_{tt} - a^2 u''_{xx} = 0, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u'_x|_{x=0} = 0, \quad u'_x|_{x=l} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = x, \quad u'_t|_{t=0} = 1, \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

227. $$\begin{cases} u''_{tt} - a^2 u''_{xx} = 0, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u'_x|_{x=0} = 0, \quad u'_x|_{x=l} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = 1 + \cos\dfrac{3\pi x}{l}, \quad u'_t|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

Занятак 11

Метад падзелу зменных можна ўжываць і для развязання змяшаных задач з дыферэнцыяльным раўнаннем больш агульнага выгляду. Разгледзім гэта на прыкладах.

Задача 228. Развязаць краявую задачу

$$\begin{cases} u''_{tt} + 4u'_t = u''_{xx} - 2u, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u'_x|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=\pi} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad u'_t|_{t=0} = x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$

Развязанне. Згодна з метадам Фур'е, развязак задачы будзем шукаць у выглядзе здабытку $u(x,t) = X(x)T(t)$. Падставім у раўнанне меркаваны развязак:

$$T''X + 4T'X = X''T - 2XT.$$

Згрупуем складнікі

$$(T'' + 4T' + 2T)X = X''T$$

і падзелім зменныя. Атрымаем суадносіну

$$\frac{T'' + 4T' + 2T}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda^2,$$

з якой вынікае, што функцыі $X(x)$ і $T(t)$ з'яўляюцца развязкамі адпаведна наступных раўнанняў:

$$T'' + 4T' + (2 + \lambda^2)T = 0, \quad X'' + \lambda^2 X = 0.$$

Дадаючы да раўнання адносна $X(x)$ умовы, якія выцякаюць з межавых умоваў змяшанай задачы, атрымаем задачу Штурма — Ліўвіля:

$$\begin{cases} X'' + \lambda^2 X = 0, \\ X'(0) = X(\pi) = 0. \end{cases}$$

Развязваючы яе, знаходзім уласныя значэнні і ўласныя функцыі

$$\lambda_n = \frac{2n+1}{2}, \quad X_n(x) = \cos\frac{(2n+1)x}{2}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

Адносна функцыі $T_n(t)$ маем раўнанне

$$T''_n + 4T'_n + \left[2 + \left(\frac{2n+1}{2}\right)^2\right]T_n = 0.$$

Гэта звычайнае дыферэнцыяльнае раўнанне другога парадку са сталымі каэфіцыентамі. Яго характарыстычнае раўнанне

$$\mu^2 + 4\mu + \left[2 + \left(\frac{2n+1}{2}\right)^2\right] = 0.$$

Дыскрымінант роўны $D = 16 - 4\left[2 + \left(\frac{2n+1}{2}\right)^2\right] = 8 - (2n+1)^2$.

Няхай $n = 0$. Тады дыскрымінант дадатны $(D = 7)$ і карані характарыстычнага раўнання роўныя

$$\mu_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{7}}{2} = -2 \pm \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

У якасці фундаментальнай сістэмы развязкаў у дадзеным выпадку замест звычайнай сістэмы $e^{\left(-2+\frac{\sqrt{7}}{2}\right)t}, e^{\left(-2-\frac{\sqrt{7}}{2}\right)t}$ лепш ўзяць функцыі $e^{-2t}\operatorname{ch}\frac{\sqrt{7}}{2}t$, $e^{-2t}\operatorname{sh}\frac{\sqrt{7}}{2}t$. Тады агульны развязак запішацца ў выглядзе

$$T_0(t) = a_0 e^{-2t}\operatorname{ch}\frac{\sqrt{7}}{2}t + b_0 e^{-2t}\operatorname{sh}\frac{\sqrt{7}}{2}t.$$

Калі $n > 0$, то дыскрымінант адмоўны, а карані характарыстычнага раўнання $\mu_{1,2} = -2 \pm i\frac{\sqrt{(2n+1)^2 - 8}}{2}$. Такім чынам, агульны развязак набывае выгляд

$$T_n(t) = a_n e^{-2t}\cos\frac{\sqrt{(2n+1)^2-8}}{2}t + b_n e^{-2t}\sin\frac{\sqrt{(2n+1)^2-8}}{2}t.$$

Развязак змяшанай задачы будзем шукаць у выглядзе шэрагу

$$u(x,t) = \left(a_0 e^{-2t}\operatorname{ch}\frac{\sqrt{7}}{2}t + b_0 e^{-2t}\operatorname{sh}\frac{\sqrt{7}}{2}t\right)\cos\frac{x}{2} + \\ + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n e^{-2t}\cos\frac{\sqrt{(2n+1)^2-8}}{2}t + \right. \\ \left. + b_n e^{-2t}\sin\frac{\sqrt{(2n+1)^2-8}}{2}t\right]\cos\frac{(2n+1)x}{2}.$$

З першай пачатковай умовы вынікае, што $a_n = 0$. Дыферэнцуючы паскладова шэраг па t і падстаўляючы ў другую пачатковую ўмову, з улікам знойдзеных a_n прыходзім да суадносіны

$$u'_t|_{t=0} = b_0 \frac{\sqrt{7}}{2} \cos \frac{x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{\sqrt{(2n+1)^2 - 8}}{2} \cos \frac{(2n+1)x}{2} = x.$$

Адсюль вынікае, што

$$b_0 = \frac{2}{\sqrt{7}} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos \frac{x}{2}\, dx = \frac{8}{\pi\sqrt{7}} (\pi - 2),$$

$$b_n = \frac{2}{\sqrt{(2n+1)^2 - 8}} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos \frac{(2n+1)x}{2}\, dx =$$
$$= \frac{8}{\pi\sqrt{(2n+1)^2 - 8}} \Big[\frac{\pi(-1)^n}{2n+1} - \frac{2}{(2n+1)^2}\Big].$$

Такім чынам, развязак задачы мае выгляд

$$u(x,t) = \frac{8(\pi - 2)}{\pi\sqrt{7}} e^{-2t} \operatorname{sh} \frac{\sqrt{7}}{2} t \cos \frac{x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{\pi\sqrt{(2n+1)^2 - 8}} \times$$
$$\times \Big[\frac{\pi(-1)^n}{2n+1} - \frac{2}{(2n+1)^2}\Big] e^{-2t} \sin \frac{\sqrt{(2n+1)^2 - 8}}{2} t \cos \frac{(2n+1)x}{2}.$$

Задача 229. Развязаць змяшаную задачу

$$\begin{cases} u''_{tt} = u''_{xx} + 2u'_x, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=1} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u'_t|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

Развязанне. У згодзе з метадам падзелу зменных будзем шукаць развязак ў выглядзе здабытку $u(x,t) = X(x)T(t)$. Пасля падстаноўкі ў раўнанне і падзелу зменных, атрымаем

$$\frac{T''}{T} = \frac{X'' + 2X'}{X} = -\lambda^2.$$

Адсюль вынікае, што функцыя $T(t)$ з'яўляецца развязкам раўнання

$$T'' + \lambda^2 T = 0,$$

а функцыя $X(x)$ — развязкам задачы Штурма — Ліўвіля

$$\begin{cases} X'' + 2X' + \lambda^2 X = 0, \\ X(0) = X(1) = 0. \end{cases}$$

Нескладана пераканацца, што мы маем справу з задачай выгляду (65). Сапраўды, памножым раўнанне на e^{2x} і запішам яго ў выглядзе

$$\frac{d}{dx}\Big(e^{2x}\frac{dX}{dx}\Big) + \lambda^2 e^{2x} X = 0.$$

З гэтага выяўлення вынікае, што ўласныя функцыі задачы Штурма — Ліўвіля артаганальныя на адрэзку $[0,1]$ з вагой e^{2x}.

Знойдзем цяпер уласныя функцыі і ўласныя значэнні. Характарыстычнае раўнанне мае выгляд

$$\mu^2 + 2\mu + \lambda^2 = 0,$$

а яго дыскрымінант $D = 1 - \lambda^2$ можа прымаць як дадатныя, так і адмоўныя значэнні. Разгледзім тры выпадкі.

1. $D > 0$. Агульны развязак мае выгляд

$$X(x) = C_1 e^{(-1+\sqrt{1-\lambda^2})x} + C_2 e^{(-1-\sqrt{1-\lambda^2})x}.$$

Падстаўляючы ў межавыя ўмовы, знаходзім

$$C_1 + C_2 = 0, \quad C_1 e^{-1+\sqrt{1-\lambda^2}} + C_2 e^{-1-\sqrt{1-\lambda^2}} = 0,$$

адкуль вынікае, што $C_1 = C_2 = 0$. Такім чынам, тыя значэнні λ, для якіх $D > 0$, не могуць быць уласнымі значэннямі.

2. $D = 0$. Тады $\lambda = \pm 1$ і $X(x) = e^{-x}(C_1 + C_2 x)$. Няцяжка праверыць, што такія λ таксама не з'яўляюцца ўласнымі значэннямі.

3. $D < 0$. У гэтым выпадку карані характарычнага раўнання маюць выгляд $\mu_{1,2} = -1 \pm i\sqrt{\lambda^2 - 1}$, а агульны развязак

$$X(x) = C_1 e^{-x} \cos\sqrt{\lambda^2 - 1}\, x + C_2 e^{-x} \sin\sqrt{\lambda^2 - 1}\, x.$$

Падстаўляючы ў межавыя ўмовы, атрымаем

$$X(0) = C_1 = 0, \quad X(1) = C_2 e^{-1} \sin\sqrt{\lambda^2 - 1} = 0,$$

адкуль вынікае, што $\sqrt{\lambda^2-1}=k\pi,\ k=1,2,\ldots,$ і

$$\lambda_k^2=(k\pi)^2+1,\quad X_k(x)=e^{-x}\sin(k\pi x),\quad k=1,2,\ldots$$

Функцыі $T_k(t)$ знойдзем з раўнання $T_k''+\big[(k\pi)^2+1\big]T_k=0$. Яго агульны развязак мае выгляд

$$T_k(t)=a_k\cos\sqrt{(k\pi)^2+1}\,t+b_k\sin\sqrt{(k\pi)^2+1}\,t.$$

Складзем цяпер шэраг

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\big[a_k\cos\sqrt{(k\pi)^2+1}\,t+b_k\sin\sqrt{(k\pi)^2+1}\,t\big]e^{-x}\sin(k\pi x).$$

Падстаўляючы яго ў першую пачатковую ўмову, атрымаем

$$u|_{t=0}=\sum_{k=1}^{\infty}a_ke^{-x}\sin(k\pi x)=\varphi(x).$$

Гэтая суадносіна ўяўляе сабой расклад зададзенай функцыі $\varphi(x)$ на адрэзку $[0,1]$ у шэраг Фур'е па артаганальнай з вагой $\rho(x)=e^{2x}$ сістэме $\big\{e^{-x}\sin(k\pi x)\big\}$. Каэфіцыенты раскладу вылічаюцца па формулах

$$a_k=\frac{\int\limits_0^1\varphi(x)e^x\sin(k\pi x)dx}{\int\limits_0^1\sin^2(k\pi x)dx}=2\int\limits_0^1\varphi(x)e^x\sin(k\pi x)dx.\tag{75}$$

Падстаноўка ў другую пачатковую ўмову прыводзіць да роўнасці

$$u_t'|_{t=0}=\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sqrt{(k\pi)^2+1}\,e^{-x}\sin(k\pi x)=0,$$

з якой вынікае, што $b_k=0,\ k=1,2,\ldots$

Канчаткова развязак задачы набывае выгляд

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos\big[\sqrt{(k\pi)^2+1}\,t\big]e^{-x}\sin(k\pi x),$$

дзе каэфіцыенты a_k вызначаюцца па формуле (75).

Развязаць змяшаныя задачы.

230. $\begin{cases} u''_{tt} = u''_{xx} - 4u, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=1} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = hx(1-x), \quad u'_t|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$

231. $\begin{cases} u''_{tt} = u''_{xx} - 9u, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u|_{x=0} = 0, \quad u'_x|_{x=1} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = hx, \quad u'_t|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$

232. $\begin{cases} u''_{tt} + 4u'_t = u''_{xx} - 2u, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u|_{x=0} = 0, \quad u'_x|_{x=\pi} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad u'_t|_{t=0} = \pi - x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$

233. $\begin{cases} u''_{tt} + 2u'_t = u''_{xx} - 5u, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u'_x|_{x=0} = 0, \quad u'_x|_{x=\pi} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = \cos(3x) + 2\cos(7x), \quad u'_t|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$

234. $\begin{cases} u''_{tt} + 2u'_t = u''_{xx} - 5u, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=\pi} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = hx(l-x), \quad u'_t|_{t=0} = \sin(2x), \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$

3. Метад Фур'е для неаднароднага хвалевага раўнання.

Выкладзены вышэй метад Фур'е (падзелу зменных) дазваляе таксама развязваць краявыя задачы для неаднароднага хвалевага раўнання. Сфармулюем, напрыклад, задачу аб вымушаных ваганнях струны, замацаванай на канцах:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \quad t > 0, \quad 0 < x < l, \\ u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases} \tag{76}$$

Разглядаючы ў шуканым развязку $u(x,t)$ задачы (76) зменную t як неадмоўны параметр, будзем шукаць гэты развязак ў форме раскладу ў шэраг Фур'е па артаганальнай сістэме функцый

$\left\{\sin\dfrac{n\pi x}{l}\right\}$, якія задавальняюць аднародныя краявыя умовы:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}v_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l}. \tag{77}$$

Каэфіцыенты раскладу $v_n(t)$ трэбы вызначаць як функцыі часу t так, каб шэраг (77) задавальняў раўнанне і пачатковыя умовы. Для гэтага выявім функцыі $f(x,t)$, $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ у выглядзе наступных трыганаметрычных шэрагаў Фурье:

$$f(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l},\quad f_n(t)=\frac{2}{l}\int\limits_0^l f(\xi,t)\sin\frac{n\pi\xi}{l}\,d\xi,$$

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\sin\frac{n\pi x}{l},\quad \varphi_n=\frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}\,d\xi,$$

$$\psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n\sin\frac{n\pi x}{l},\quad \psi_n=\frac{2}{l}\int\limits_0^l \psi(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}\,d\xi.$$

Падстаўляючы шэрагі ў раўнанне і пачатковыя ўмовы, атрымаем

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[v_n''(t)+\left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 v_n(t)\right]\sin\frac{n\pi x}{l}=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l},$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}v_n(0)\sin\frac{n\pi x}{l}=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n\sin\frac{n\pi x}{l},$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}v_n'(0)\sin\frac{n\pi x}{l}=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

З улікам паўніні артаганальнай сістэмы функцый $\left\{\sin\dfrac{n\pi x}{l}\right\}$ прыраўняем у гэтых раскладах каэфіцыенты пры аднолькавых уласных функцыях. Тады прыйдзем да задачы Кашы для звычайнага дыферэнцыяльнага раўнання другога парадку:

$$\begin{cases} v_n''(t)+\left(\dfrac{n\pi a}{l}\right)^2 v_n(t)=f_n(t),\\ v_n(0)=\varphi_n,\quad v_n'(0)=\psi_n. \end{cases}$$

Агульны развязак раўнання можа быць знойдзены метадам Лягранжа варыяцыі сталых. Задавальняючы пачатковыя умовы, выявім развязак задачы ў выглядзе

$$v_n(t) = \varphi_n \cos\frac{n\pi at}{l} + \frac{l}{n\pi a}\,\psi_n \sin\frac{n\pi at}{l} + \\ + \frac{l}{n\pi a}\int\limits_0^t f_n(\tau)\sin\frac{n\pi a(t-\tau)}{l}\,d\tau.$$

Падстаўляючы знойдзены выраз для $v_n(t)$ у шэраг, атрымаем развязак зыходнай задачы ў наступнай форме:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\Big[\varphi_n\cos\frac{n\pi at}{l} + \frac{l\psi_n}{n\pi a}\sin\frac{n\pi at}{l}\Big]\sin\frac{n\pi x}{l} + \\ + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{l}{n\pi a}\Big[\int\limits_0^t f_n(\tau)\sin\frac{n\pi a(t-\tau)}{l}\,d\tau\Big]\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

Заўвага 4. *У тым выпадку, калі зададзеныя межавыя ўмовы другога або трэцяга роду, у шэраг*

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l}$$

замест функцый $\sin\dfrac{n\pi x}{l}$ *трэба падставіць уласныя функцыі адпаведнай задачы Штурма — Ліўвіля. Напрыклад, калі змяшаная задача мае выгляд*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \quad t>0, \quad 0<x<l, \\ u'_x|_{x=0} = 0, \quad u'_x|_{x=l} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \end{cases}$$

то развязак задачы шукаем у выглядзе шэрагу $u(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n(t)\cos\dfrac{n\pi x}{l}$, *дзе* $\cos\dfrac{n\pi x}{l}$ *— уласныя функцыі адпаведнай* *задачы Штурма — Ліўвіля для аднароднага раўнання:*

$$\begin{cases} X'' + \lambda^2 X = 0, \\ X'(0) = X'(l) = 0. \end{cases}$$

Занятак 12

Задача 235. Развязаць задачу аб падоўжных ваганнях $u(x,t)$ стрыжня, падвешанага ў канцавым пункце $x = 0$. Ваганні ажыццяўляюцца пад уплывам сілы цяжару, калі

$$u'_x|_{x=l} = 0, \quad u|_{t=0} = 0, \quad u'_t|_{t=0} = 0.$$

Развязанне. Трэба развязаць змяшаную задачу

$$\begin{cases} u''_{tt} - a^2 u''_{xx} = g, \\ u|_{x=0} = 0, \quad u'_x|_{x=l} = 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad u'_t|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

Задача Штурма — Ліўвіля для адпаведнага аднароднага раўнання мае выгляд

$$\begin{cases} X'' + \lambda^2 X = 0, \\ X(0) = X'(0) = 0, \end{cases}$$

а яе ўласныя функцыі $X_n(x) = \sin \dfrac{(2n+1)\pi x}{2l}, \quad n = 0, 1, \ldots$ Такім чынам, развязак задачы будзем шукаць у выглядзе шэрагу

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(t) \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l},$$

дзе $v_n(t)$ вызначаюцца з раўнання і пачатковых умоваў.

Раскладзем папярэдне правую частку раўнання ў шэраг па артаганальнай сістэме ўласных функцый $X_n(x)$:

$$g = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \sin \frac{(2n+1)\pi x}{2l},$$

дзе каэфіцыенты f_n вылічаюцца па формулах

$$f_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l g\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}\,dx = \frac{4g}{(2n+1)\pi}.$$

Падстаўляючы меркаваны развязак ў раўнанне і прыраўніваючы адпаведныя каэфіцыенты, атрымаем роўнасць

$$v_n''(t) + a^2\Big[\frac{(2n+1)\pi}{2l}\Big]^2 v_n(t) = \frac{4g}{(2n+1)\pi}.$$

З пачатковых умоваў вынікае, што

$$v_n(0) = 0, \quad v_n'(0) = 0.$$

Развяжам атрыманую задачу Кашы метадам аперацыйнага злічэння. Ужываючы пераўтварэнне Ляпляса і ўлічваючы пачатковыя ўмовы, прыйдзем да аператарнага раўнання

$$V_n(p)p^2 + a_n^2 V_n(p) = \frac{b_n}{p},$$

дзе $V_n(p) \risingdotseq v_n(t)$, $a_n = \dfrac{(2n+1)\pi a}{2l}$, $b_n = \dfrac{4g}{(2n+1)\pi}$. Адсюль

$$V_n(p) = \frac{b_n}{p(p^2+a_n^2)} = \frac{b_n}{a_n^2}\Big[\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2+a_n^2}\Big] \risingdotseq \frac{b_n}{a_n^2}\,(1-\cos a_n t).$$

Такім чынам, з улікам выразаў для a_n і b_n будзем мець

$$v_n(t) = \frac{16gl^2}{(2n+1)^3\pi^3a^2}\Big[1 - \cos\frac{(2n+1)\pi at}{2l}\Big],$$

і развязак задачы набывае выгляд

$$u(x,t) = \frac{16gl^2}{\pi^3a^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l} - \\ - \frac{16gl^2}{\pi^3a^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3}\cos\frac{(2n+1)\pi at}{2l}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2l}.$$

Заўвага 5. *Калі правая частка раўнання змяшанай задачы не залежыць ад зменнай t (як у папярэднім прыкладзе), то можна вылучыць так званую стацыянарную частку развязку. Заменай $u(x,t) = v(x,t) + w(x)$, дзе $v(x,t)$ — новая невядомая функцыя, $w(x)$ — пэўным чынам падабраная функцыя адной зменнай x, зыходная задача зводзіцца да задачы з аднародным дыферэнцыяльным раўнаннем. Алгарытм такога развязання будзе разгледжаны ніжэй.*

Задача 236. Развязаць раўнанне вымушаных ваганняў

$$u''_{tt} - u''_{xx} = x(l-x)t^2$$

з нулявымі пачатковымі і межавымі ўмовамі $u|_{x=0} = 0,\ u|_{x=l} = 0.$

Развязанне. Трэба развязаць змяшаную задачу

$$\begin{cases} u''_{tt} - u''_{xx} = x(l-x)t^2, \\ u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0, \\ u|_{t=0}, \quad u'_t|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

Развязак шукаем у выглядзе шэрагу, які задавальняе межавыя умовы:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(t) \sin\frac{k\pi x}{l}.$$

Правую частку раўнання таксама раскладзем у шэраг Фур'е

$$x(l-x)t^2 = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t) \sin\frac{k\pi x}{l},$$

$$f_k(t) = \frac{2}{l}\int\limits_0^l x(l-x)t^2 \sin\frac{k\pi x}{l}\,dx = \frac{2t^2}{k\pi}\int\limits_0^l (l-2x)\cos\frac{k\pi x}{l}\,dx =$$

$$= -\frac{4t^2l^2}{(k\pi)^3}\cos\frac{k\pi x}{l}\Big|_0^l = \begin{cases} 0, & \text{калі} \quad k = 2n, \\ \dfrac{8t^2l^2}{(2n+1)^3\pi^3}, & \text{калі} \quad k = 2n+1. \end{cases}$$

Падставім гэтыя шэрагі ў зыходнае дыферэнцыяльнае раўнанне:

$$\sum_{k=1}^{\infty} v''_k(t)\sin\frac{k\pi x}{l} + \sum_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{k\pi}{l}\Big)^2 v_k(t)\sin\frac{k\pi x}{l} = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(t)\sin\frac{k\pi x}{l}.$$

Адсюль вынікае, што

$$v_k''(t) + \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 v_k(t) = f_k(t), \quad k = 1, 2, \ldots$$

З пачатковых умоваў для функцыі $u(x,t)$ выцякаюць роўнасці $v_k(0) = 0$, $v_k'(0) = 0$.

Такім чынам прыходзім да сям'і задач Кашы

$$\begin{cases} v_k''(t) + \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2 v_k(t) = f_k(t), \\ v_k(0) = 0, \quad v_k'(0) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

Калі $k = 2n$, то задача Кашы мае толькі трывіяльны развязак $v_k(t) = 0$. У выпадку, калі $k = 2n+1$, раўнанне набывае выгляд

$$v_k''(t) + \frac{(2n+1)^2\pi^2}{l^2} v_k(t) = \frac{8l^2t^2}{(2n+1)^3\pi^3}.$$

Будзем развязваць гэтае раўнанне метадам аперацыйнага злічэння. Ужываючы пераўтварэнне Ляпляса і ўлічваючы пачатковыя ўмовы, прыходзім да аператарнага раўнання

$$V_k(p)p^2 + \frac{(2n+1)^2\pi^2}{l^2} V_k(p) = \frac{16l^2}{(2n+1)^3\pi^3p^3},$$

дзе $V_k(p)$ — выява функцыі $v_k(t)$. Будзем абазначаць: $a_k^2 = \frac{(2n+1)^2\pi^2}{l^2}$, $b_k = \frac{16l^2}{(2n+1)^3\pi^3}$. Тады аператарнае раўнанне набывае выгляд

$$V_k(p)p^2 + a_k^2 V_k(p) = \frac{b_k}{p^3},$$

адкуль знаходзім, што

$$V_k(p) = \frac{b_k}{p^3(p^2 + a_k^2)}.$$

Пераўтворым правую частку гэтай роўнасці. Маем

$$\frac{b_k}{p^3(p^2 + a_k^2)} = \frac{(b_k/a_k^2)(p^2 + a_k^2) - (b_k/a_k^2)p^2}{p^3(p^2 + a_k^2)} = \frac{b_k/a_k^2}{p^3} -$$

$$-\frac{b_k/a_k^2}{p(p^2+a_k^2)} = \frac{b_k/a_k^2}{p^3} - \frac{(b_k/a_k^4)(p^2+a_k^2)-(b_k/a_k^4)p^2}{p(p^2+a_k^2)} =$$

$$= \frac{b_k/a_k^2}{p^3} - \frac{b_k/a_k^4}{p} + \frac{(b_k/a_k^4)p}{p^2+a_k^2}.$$

Карыстаючыся табліцай арыгіналаў і выяваў, атрымаем

$$v_k(t) = \frac{b_k}{2a_k^2}t^2 - \frac{b_k}{a_k^4} + \frac{b_k}{a_k^4}\cos(a_k t) = \frac{8l^4}{(2n+1)^5\pi^5}t^2 - \\ - \frac{16l^6}{(2n+1)^7\pi^7} + \frac{16l^6}{(2n+1)^7\pi^7}\cos\frac{(2n+1)\pi t}{l}.$$

Развязак змяшанай задачы канчаткова набывае выгляд

$$u(x,t) = \frac{8l^4t^2}{\pi^5}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}}{(2n+1)^5} - \frac{16l^6}{\pi^7}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}}{(2n+1)^7} + \\ + \frac{16l^6}{\pi^7}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\frac{(2n+1)\pi t}{l}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{l}}{(2n+1)^7}.$$

237. Гарызантальная струна даўжыні l з замацаванымі канцамі знаходзіцца ў полі сілы цяжару. У пачатковы момант часу струну адпускаюць, не надаючы хуткасці яе часцінам. Апісаць закон ваганняў струны пад уздзеяннем сілы цяжару. Хуткасць распаўсюджвання ўзбуджэнняў у струне роўная a.

Развязаць змяшаныя задачы.

238. $$\begin{cases} u''_{tt} - a^2u''_{xx} = xt, \quad 0<x<l, \quad t>0, \\ u|_{x=0}=0, \quad u|_{x=l}=0, \quad t\geqslant 0, \\ u|_{t=0}=0, \quad u'_t|_{t=0}=0, \quad 0\leqslant x\leqslant l. \end{cases}$$

239. $$\begin{cases} u''_{tt} - a^2u''_{xx} = xt, \quad 0<x<l, \quad t>0, \\ u|_{x=0}=0, \quad u|_{x=l}=0, \quad t\geqslant 0, \\ u|_{t=0}=\sin\dfrac{3\pi x}{l}, \quad u'_t|_{t=0}=0, \quad 0\leqslant x\leqslant l. \end{cases}$$

240. $$\begin{cases} u''_{tt} - a^2 u''_{xx} = xt, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = \sin\dfrac{\pi x}{l}, \quad u'_t|_{t=0} = \cos\dfrac{2\pi x}{l}, \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

241. $$\begin{cases} u''_{tt} - u''_{xx} = bx(l-x), \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad u'_t|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

242. $$\begin{cases} u''_{tt} - u''_{xx} = b(l-x)t^2, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u'_x|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad u'_t|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

243. $$\begin{cases} u''_{tt} - a^2 u''_{xx} = bx, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u|_{x=0} = 0, \quad u'_x|_{x=l} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad u'_t|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

244. $$\begin{cases} u''_{tt} - a^2 u''_{xx} = b(l-x), \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u'_x|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad u'_t|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

245. $$\begin{cases} u''_{tt} - a^2 u''_{xx} = he^{-t}\sin\dfrac{\pi x}{l}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad u'_t|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

4. Задача аб вымушаных ваганнях струны ў агульнай пастаноўцы.

Разгледзім агульную пастаноўку задачы аб вымушаных ваганнях струны з зададзенымі законамі руху яе канцоў:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), \quad t > 0, \quad 0 < x < l, \\ u|_{x=0} = \mu(t), \quad u|_{x=l} = \nu(t), \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

Для развязання змяшанай задачы вызначым дапаможную функцыю $W(x,t)$ так, каб яна задавальняла межавыя умовы:

$$W(0,t) = \mu(t), \quad W(l,t) = \nu(t).$$

У якасці адной з такіх функцый можна ўзяць

$$W(x,t) = \frac{l-x}{l}\,\mu(t) + \frac{x}{l}\,\nu(t), \quad 0 \leqslant x \leqslant l.$$

Тады з дапамогай падстаноўкі $u(x,t) = W(x,t) + v(x,t)$ для новай невядомай функцыі $v(x,t)$ атрымаем краявую задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f_1(x,t), \quad t > 0, \quad 0 < x < l, \\ v|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=l} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ v|_{t=0} = \varphi_1(x), \quad \dfrac{\partial v}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi_1(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l, \end{cases}$$

дзе функцыі $f_1(x,t)$, $\varphi_1(x)$ і $\psi_1(x)$ вызначаюцца формуламі

$$f_1(x,t) = f(x,t) - \Big[\frac{\partial^2 W}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\Big] = f(x,t) - \Big[\frac{l-x}{l}\,\mu''(t) + \frac{x}{l}\,\nu''(t)\Big],$$

$$\varphi_1(x) = \varphi(x) - W|_{t=0} = \varphi(x) - \Big[\frac{l-x}{l}\,\mu(0) + \frac{x}{l}\,\nu(0)\Big],$$

$$\psi_1(x) = \psi(x) - \frac{\partial W}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x) - \Big[\frac{l-x}{l}\,\mu'(0) + \frac{x}{l}\,\nu'(0)\Big].$$

Такім чынам, першая краявая задача для неаднароднага раўнання ў агульнай пастаноўцы зводзіцца да задачы аб вымушаных ваганнях струны з замацаванымі канцамі (76).

Заўвага 6. *Прывядзём магчымыя варыянты дапаможнай функцыі $W(x)$ для змяшаных задач з іншымі спалучэннямі межавых умоваў:*

1) $\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = \mu(t)$, $u|_{x=l} = \nu(t)$, $W(x,t) = (x-l)\mu(t) + \nu(t)$;

2) $u|_{x=0} = \mu(t)$, $\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l} = \nu(t)$, $W(x,t) = \mu(t) + x\nu(t)$;

3) $\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = \mu(t)$, $\dfrac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l} = \nu(t)$, $W(x,t) = -\dfrac{(x-l)^2}{2l}\,\mu(t) + \dfrac{x^2}{2l}\,\nu(t)$.

У апошнім выпадку, калі $\mu(t) = \nu(t)$, *у якасці* $W(x)$ *мэтазгодна ўзяць функцыю* $W(x) = x\mu(t)$.

Адзначым клас задач са стацыянарнымі неаднароднасцямі, калі вымушаючая сіла і ўмовы замацавання канцоў струны не залежаць ад часу:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x), \quad t > 0, \quad 0 < x < l, \\ u(0,t) = H_1, \quad u(l,t) = H_2, \quad t \geqslant 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = \psi(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases} \tag{78}$$

Тут H_1 і H_2 — зададзеныя канстанты.

Развязак задачы (78) можна знайсці, вылучаючы стацыянарную частку развязку: $u(x,t) = u_c(x) + v(x,t)$. У мадэлі струны функцыя $u_c(x)$ апісвае стацыянарны профіль, які адпавядае статычнаму прагіну струны пад уздзеяннем размеркаванай сілы $f(x)$.

Стацыянарны развязак $u_c(x)$ знаходзім як развязак краявой задачы для звычайнага дыферэнцыяльнага раўнання:

$$\begin{cases} a^2 \dfrac{d^2 u_c}{dx^2} + f(x) = 0, \\ u_c(0) = H_1, \quad u_c(l) = H_2. \end{cases}$$

Інтэгруючы раўнанне і задавальняючы межавыя ўмовы, атрымаем

$$u_c(x) = H_1 + (H_2 - H_1)\,\frac{x}{l} + \frac{x}{la^2} \int\limits_0^l d\xi \int\limits_0^\xi f(\eta)d\eta - \frac{1}{a^2} \int\limits_0^x d\xi \int\limits_0^\xi f(\eta)d\eta.$$

У прыватнасці, калі $f(x) = f_0 = \mathrm{const}$, то

$$u_c(x) = H_1 + (H_2 - H_1)\,\frac{x}{l} + \frac{f_0}{2a^2}\,x(l - x).$$

Функцыя $v(x,t)$ задавальняе аднароднае дыферэнцыяльнае раўнанне

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad t > 0, \quad 0 < x < l,$$

з аднароднымі межавымі ўмовамі $v(0,t) = 0$, $v(l,t) = 0$ і пачатковымі ўмовамі выгляду

$$v(x,0) = \varphi(x) - u_c(x), \quad v_t(x,0) = \psi(x).$$

Такім чынам, $v(x,t)$ можна знайсці па формулах (60), (62), змяняючы у (62) $\varphi(x)$ на $\varphi(x) - u_c(x)$.

Заняткі 13-14

Задача 246. Вывучыць вымушаныя папярочныя ваганні струны, замацаванай на канцы $x = 0$, калі да канца $x = l$ прыкладваецца вымушаючая гарманічная сіла, якая выклікае зрушэнне, роўнае $A\sin\omega t$, $\omega \neq \dfrac{k\pi a}{l}$, $k = 1, 2, \ldots$

Развязанне. Задача зводзіцца да інтэгравання раўнання

$$u''_{tt} - a^2 u''_{xx} = 0, \quad 0 < x < l, \quad t > 0,$$

з дадатковымі ўмовамі

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = A\sin\omega t, \quad t \geqslant 0,$$

$$u(x,0) = 0, \quad u'_t(x,0) = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l.$$

Як бачым, адна з межавых умоваў з'яўляецца неаднароднай. У гэтым выпадку неабходна зрабіць замену невядомай функцыі, каб межавыя ўмовы сталі аднароднымі.

Возьмем $u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$, дзе функцыю $w(x,t)$ знойдзем так, каб яна задавальняла ўмовы

$$w(0,t) = 0, \quad w(l,t) = A\sin\omega t, \quad t \geqslant 0.$$

У нашым выпадку функцыю $w(x,t)$ можна падабраць так, што раўнанне застанецца аднародным. Будзем шукаць гэтую функцыю ў выглядзе

$$w(x,t) = X(x)\sin\omega t.$$

Падстаўляючы ў дыферэнцыяльнае раўнанне і межавыя ўмовы, для $X(x)$ атрымаем краявую задачу

$$\begin{cases} X''(x) + \dfrac{\omega^2}{a^2} X(x) = 0, \\ X(0) = 0, \quad X(l) = A. \end{cases}$$

Агульны развязак раўнання мае выгляд

$$X(x) = C_1 \cos\frac{\omega x}{a} + C_2 \sin\frac{\omega x}{a}.$$

З межавых умоваў вынікае, што $C_1 = 0$, $C_2 = \dfrac{A}{\sin\dfrac{\omega l}{a}}$. Тады

$$X(x) = \frac{A}{\sin\dfrac{\omega l}{a}} \sin\frac{\omega x}{a}, \quad w(x,t) = \frac{A}{\sin\dfrac{\omega l}{a}} \sin\frac{\omega x}{a} \sin\omega t.$$

Зрабіўшы цяпер замену $u(x,t) = v(x,t) + \dfrac{A}{\sin\dfrac{\omega l}{a}} \sin\dfrac{\omega x}{a} \sin\omega t$, прыйдзем да задачы для функцыі $v(x,t)$:

$$\begin{cases} v''_{tt} = a^2 v''_{xx}, \\ v|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=l} = 0, \\ v|_{t=0} = 0, \quad \left.\dfrac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0} = -\dfrac{A\omega}{\sin\dfrac{\omega l}{a}} \sin\dfrac{\omega x}{a}. \end{cases}$$

Развязваючы гэтую задачу метадам Фур'е, атрымаем

$$v(x,t) = \frac{2A\omega a}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\omega^2 - \left(\dfrac{k\pi a}{l}\right)^2} \sin\frac{k\pi at}{l} \sin\frac{k\pi x}{l}.$$

Развязкам зыходнай задачы будзе функцыя

$$u(x,t) = \frac{A}{\sin\dfrac{\omega l}{a}} \sin\frac{\omega x}{a} \sin\omega t + \\ + \frac{2A\omega a}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{\omega^2 - \left(\dfrac{k\pi a}{l}\right)^2} \sin\frac{k\pi at}{l} \sin\frac{k\pi x}{l}.$$

Задача 247. Развязаць задачу 235

$$\begin{cases} u''_{tt} - a^2 u''_{xx} = g, \\ u|_{x=0} = 0, \quad u'_x|_{x=l} = 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad u'_t|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

Развязанне. Разгледзім яшчэ адзін спосаб развязання гэтай задачы. Заўважым, што правая частка раўнання не залежыць ад зменнай t. У гэтым выпадку яе можна развязаць, вылучаючы стацыянарную частку. Зробім замену $u(x,t) = v(x,t) + w(x)$, дзе $v(x,t)$ — новая невядомая функцыя, а функцыю адной зменнай $w(x)$ падбярэм так, каб і раўнанне, і межавыя ўмовы сталі аднароднымі. Пасля падстаноўкі ў зыходнае раўнанне і межавыя ўмовы атрымаем

$$
\begin{aligned}
&v''_{tt} - a^2 v''_{xx} - a^2 w''(x) = g,\\
&v|_{x=0} + w(0) = u|_{x=0} = 0, \quad v'_x|_{x=l} + w'(l) = u'_x|_{x=l} = 0.
\end{aligned}
$$

Адсюль зразумела, што $w(x)$ павінна быць развязкам краявой задачы

$$
\begin{cases}
-a^2 w''(x) = g,\\
w(0) = 0, \quad w'(l) = 0.
\end{cases}
$$

Агульны развязак раўнання мае выгляд

$$
w(x) = -\frac{gx^2}{2a^2} + C_1 x + C_2.
$$

Падстаўляючы яго ў краявыя ўмовы знаходзім $C_2 = 0$, $C_1 = \dfrac{gl}{a^2}$.

Такім чынам, $w(x) = -\dfrac{gx^2}{2a^2} + \dfrac{glx}{a^2}$, і пасля замены $u = v + w$ атрымаем змяшаную задачу для функцыі $v(x,t)$:

$$
\begin{cases}
v''_{tt} - a^2 v''_{xx} = 0,\\
v|_{x=0} = 0, \quad v'_x|_{x=l} = 0,\\
v|_{t=0} = \dfrac{gx^2}{2a^2} - \dfrac{glx}{a^2}, \quad v'_t|_{t=0} = 0.
\end{cases}
$$

Згодна з метадам Фур'е для аднароднага раўнання, будзем шукаць развязак гэтай задачы ў выглядзе

$$
v(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} \Big[a_k \cos\frac{(2k+1)\pi a t}{2l} + b_k \sin\frac{(2k+1)\pi a t}{2l} \Big] \sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l}.
$$

Падстаўляючы меркаваны развязак ў пачатковыя ўмовы, атрымаем

$$v(x,0)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l}=\frac{gx^2}{2a^2}-\frac{glx}{a^2},$$
$$v'_t(x,0)=\sum_{k=0}^{\infty}b_k\frac{(2k+1)\pi a}{2l}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l}=0.$$

Адсюль знаходзім, што $b_k=0$,

$$a_k=\frac{2}{l}\int\limits_0^l\Big[\frac{gx^2}{2a^2}-\frac{glx}{a^2}\Big]\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l}\,dx=-\frac{16gl^2}{a^2(2k+1)^3\pi^3}. \qquad (79)$$

Канчаткова развязак зыходнай задачы запішацца ў выглядзе

$$u(x,t)=-\frac{gx^2}{2a^2}+\frac{glx}{a^2}-\frac{16gl^2}{a^2\pi^3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos\dfrac{(2k+1)\pi at}{2l}}{(2k+1)^3}\sin\frac{(2k+1)\pi x}{2l}.$$

Заўвага 7. *Разгледзім іншы падыход да вылічэння інтэграла ў роўнасці (79), які не патрабуе выкарыстання яўнага выразу для* $w(x)$. *Уласныя функцыі* $X_k(x)=\sin\dfrac{(2k+1)\pi x}{2l}$ *з'яўляюцца развязкамі задачы Штурма — Ліўвіля*

$$\begin{cases} X''+\lambda_k^2X=0,\\ X(0)=0, \quad X'(l)=0,\end{cases}$$

дзе $\lambda_k=\dfrac{(2k+1)\pi}{2l}$. *Падстаўляючы* $X_k(x)=-\dfrac{1}{\lambda_k^2}X_k''(x)$ *у формулу для* a_k, *двойчы інтэгруючы часткамі і ўлічваючы раўнанне і межавыя ўмовы для функцыі* $w(x)$, *атрымаем*

$$a_k=\frac{2}{l}\int\limits_0^l[-w(x)]X_k(x)\,dx=\frac{2}{l\lambda_k^2}\int\limits_0^l w(x)X_k''(x)\,dx=$$

$$=\frac{2}{l\lambda_k^2}\Big[w(x)X_k'(x)\Big|_0^l-w'(x)X_k(x)\Big|_0^l+\int\limits_0^l w''(x)X_k(x)\,dx\Big]=$$

$$= -\frac{2}{l\lambda_k^2}\int\limits_0^l \frac{f(x)}{a^2}\,X_k(x)\,dx = -\frac{2g}{l\lambda_k^2 a^2}\int\limits_0^l \sin\lambda_k x\,dx = -\frac{16gl^2}{a^2(2k+1)^3\pi^3}.$$

Прыведзены спосаб дазваляе істотна спрасціць працэдуру вылічэння каэфіцыентаў Фур'е ў тых выпадках, калі стацыянарная частка развязку мае груваздкі выгляд.

Задача 248. Развязаць краявую задачу

$$\begin{cases} u''_{tt} - a^2 u''_{xx} = xt, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = A, \quad t \geqslant 0 \\ u|_{t=0} = 0, \quad u'_t|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

Развязанне. Каб пазбавіцца ад неаднароднасці ў межавых умовах, зробім замену $u(x,t) = v(x,t) + \dfrac{Ax}{l}$. Пасля падстаноўкі ў раўнанне атрымаем

$$v''_{tt} - a^2 v''_{xx} = xt. \tag{80}$$

Межавыя ўмовы ўжо будуць аднароднымі

$$v|_{x=0} = 0, \quad v|_{x=l} = 0,$$

а пачатковыя набудуць выгляд

$$v|_{t=0} = u|_{t=0} - \frac{Ax}{l} = -\frac{Ax}{l}, \quad v'_t|_{t=0} = 0. \tag{81}$$

Паколькі межавыя ўмовы першага роду, то развязак задачы адносна функцыі $v(x,t)$ трэба шукаць у выглядзе шэрагу

$$v(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(t)\sin\frac{k\pi x}{l}.$$

Раскладзем папярэдне функцыю x у шэраг Фур'е па артаганальнай сістэме

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin\frac{k\pi x}{l},$$

дзе каэфіцыенты вылічаюцца па формулах

$$c_k = \frac{2}{l}\int\limits_0^l x\sin\frac{k\pi x}{l}\,dx = -\frac{2}{k\pi}\int\limits_0^l x d\cos\frac{k\pi x}{l} =$$

$$= -\frac{2}{k\pi}\Big[x\cos\frac{k\pi x}{l}\Big|_0^l - \int\limits_0^l \cos\frac{k\pi x}{l}dx\Big] = \frac{2l(-1)^{k+1}}{k\pi}.$$

Адсюль адразу ж знаходзім расклады ў шэрагі Фур'е правай часткі раўнання і функцыі з пачатковай умовы для $v(x,t)$:

$$xt = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2l(-1)^{k+1}t}{k\pi}\sin\frac{k\pi x}{l}, \quad -\frac{Ax}{l} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2A(-1)^k}{k\pi}\sin\frac{k\pi x}{l}.$$

Падстаўляючы цяпер атрыманыя расклады ў раўнанне (80) і пачатковыя ўмовы (81) і прыраўніваючы адпаведныя каэфіцыенты пры сінусах, атрымаем для функцый $v_k(t)$ задачы Кашы

$$\begin{cases} v_k''(t) + \Big(\dfrac{k\pi a}{l}\Big)^2 v_k(t) = \dfrac{2l(-1)^{k+1}t}{k\pi}, \\ v_k(0) = \dfrac{2A(-1)^k}{k\pi}, \quad v_k'(0) = 0. \end{cases}$$

Агульны развязак раўнання мае выгляд

$$v_k(t) = C_1\cos\frac{k\pi at}{l} + C_2\sin\frac{k\pi at}{l} + \overline{v}_k(t),$$

дзе частковы развязак $\overline{v}_k(t)$ трэба шукаць у адпаведнасці з правай часткай раўнання ў выглядзе лінейнай функцыі з адвольнымі каэфіцыентамі $\overline{v}_k(t) = a_k t + b_k$. Падстаўляючы выраз для $\overline{v}_k(t)$ і прыраўніваючы адпаведныя каэфіцыенты, знаходзім

$$\Big(\frac{k\pi a}{l}\Big)^2\Big(a_k t + b_k\Big) = \frac{2l(-1)^{k+1}t}{k\pi},$$

адкуль вынікае, што

$$b_k = 0, \quad a_k = \frac{2l(-1)^{k+1}}{k\pi}\Big(\frac{l}{k\pi a}\Big)^2 = \frac{2l^3(-1)^{k+1}}{a^2(k\pi)^3}.$$

Такім чынам, агульны развязак мае выгляд

$$v_k(t) = C_1\cos\frac{k\pi at}{l} + C_2\sin\frac{k\pi at}{l} + \frac{2l^3(-1)^{k+1}t}{a^2(k\pi)^3}.$$

Падстаўляючы яго ў пачатковыя ўмовы, знойдзем развязак задачы Кашы:

$$C_1 = \frac{2A(-1)^k}{k\pi}, \quad C_2\frac{k\pi a}{l} + \frac{2l^3(-1)^{k+1}}{a^2(k\pi)^3} = 0 \Rightarrow C_2 = \frac{2l^4(-1)^k}{a^3(k\pi)^4},$$

$$v_k(t) = \frac{2A(-1)^k}{k\pi}\cos\frac{k\pi at}{l} + \frac{2l^4(-1)^k}{a^3(k\pi)^4}\sin\frac{k\pi at}{l} + \frac{2l^3(-1)^{k+1}t}{a^2(k\pi)^3}.$$

Развязак зыходнай задачы мае выгляд

$$u(x,t) = \frac{Ax}{l} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\Big[\frac{A(-1)^k}{k}\cos\frac{k\pi at}{l} + \frac{l^4(-1)^k}{(a\pi)^3k^4}\sin\frac{k\pi at}{l}\Big]\sin\frac{k\pi x}{l} + \frac{2l^3t}{a^2\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k^3}\sin\frac{k\pi x}{l}.$$

Развязаць змяшаныя задачы.

249. $$\begin{cases} u''_{tt} - a^2u''_{xx} = 0, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u|_{x=0} = 1, \quad u|_{x=l} = 0, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad u'_t|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

250. $$\begin{cases} u''_{tt} - a^2u''_{xx} = 0, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l} = Ae^{-t}, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad u'_t|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

251. $$\begin{cases} u''_{tt} - u''_{xx} = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u|_{x=0} = t^2, \quad u|_{x=\pi} = t^3, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = \sin x, \quad u'_t|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$

252. $$\begin{cases} u''_{tt} - a^2u''_{xx} = \sin(2t), \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u'_x|_{x=0} = 0, \quad u'_x|_{x=l} = \dfrac{2}{a}\sin\dfrac{2l}{a}\sin(2t), \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad u'_t|_{t=0} = -2\cos\dfrac{2x}{a}, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$

253. $$\begin{cases} u''_{tt} - u''_{xx} = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u|_{x=0} = e^{-t}, \quad u|_{x=\pi} = t, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = \sin x\cos x, \quad u'_t|_{t=0} = 1, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$

254. $$\begin{cases} u''_{tt} - u''_{xx} = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u|_{x=0} = t, \quad u'_x|_{x=\pi} = 1, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = \sin\dfrac{x}{2}, \quad u'_t|_{t=0} = 1, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$

Занятак 15. Кантрольная работа

Заданні для падрыхтоўкі да КР № 2

I. Развязаць змяшаную задачу

$$\begin{cases} u''_{tt} - u''_{xx} = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u|_{x=0} = t^4, \quad u'_x|_{x=\pi} = 1, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = \sin\dfrac{x}{2} + x, \quad u'_t|_{t=0} = \sin\dfrac{3x}{2}, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$

II. Развязаць змяшаную задачу

$$\begin{cases} u''_{tt} - u''_{xx} = 0, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=\pi} = e^{-2t}, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = \sin x \cos x + \dfrac{x}{\pi}, \quad u'_t|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$

III. Развязаць змяшаную задачу

$$\begin{cases} u''_{tt} - \dfrac{1}{4}u''_{xx} = \cos\dfrac{7\pi x}{l}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u'_x|_{x=0} = 0, \quad u'_x|_{x=l} = 4\sin(4l)\sin 2t, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad u'_t|_{t=0} = x - 2\cos(4x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

IV. Развязаць змяшаную задачу

$$\begin{cases} u''_{tt} - u''_{xx} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=1} = e^{-t}, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = 0, \quad u'_t|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

V. Развязаць змяшаную задачу

$$\begin{cases} u''_{tt} - u''_{xx} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u|_{x=0} = t + 1, \quad u|_{x=1} = t^3 + 2, \quad t \geqslant 0, \\ u|_{t=0} = x + 1, \quad u'_t|_{t=0} = 0, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1. \end{cases}$$

VI. Развязаць змяшаную задачу

$$\begin{cases} u''_{tt} - a^2 u''_{xx} = 0, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u'_x\big|_{x=0} = 0, \quad u'_x\big|_{x=l} = Ae^{-t}, \quad t \geqslant 0, \\ u\big|_{t=0} = \dfrac{Aa \operatorname{ch} \dfrac{x}{a}}{\operatorname{sh} \dfrac{l}{a}}, \quad u'_t\big|_{t=0} = -\dfrac{Aa \operatorname{ch} \dfrac{x}{a}}{\operatorname{sh} \dfrac{l}{a}}, \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \end{cases}$$

ЛІТАРАТУРА

1. *Тихонов, А. Н.* Уравнения математической физики / А.Н.Тихонов, А.А.Самарский. — М.: Изд-во МГУ; Наука, 2004. — 798 с.
2. *Кошляков, Н. С.* Уравнения в частных производных математической физики / Н. С. Кошляков, Э. Б. Глинер, М. М. Смирнов. — М.: Высшая школа, 1970. — 712 с.
3. *Будак, Б. М.* Кратные интегралы и ряды / Б. М. Будак, С. В. Фомин. — М.: Физматлит, 2002. — 512 с.
4. *Смирнов, В. И.* Курс высшей математики. Т.2 / В. И. Смирнов. — М.: Наука, 1981. — 682 с.
5. *Русак, В. Н.* Математическая физика / В. Н. Русак. — Мн.: Дизайн ПРО, 1998. — 208 с.
6. *Демидович, Б. П.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу / Б. П. Демидович. — М.: Наука, 1972. — 544 с.
7. *Виноградова, И. А.* Задачи и упражнения по математическому анализу. Часть 2 / И. А. Виноградова, С. Н. Олехник, В. А. Садовничий. — М.: Дрофа, 2001. — 712 с.
8. *Краснов, М. Л.* Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко. — М.: Наука, 1981. — 304 с.
9. *Будак, Б. М.* Сборник задач по математической физике / Б. М. Будак, А. А. Самарский, А. Н. Тихонов. — М.: Физматлит, 2004. — 688 с.
10. *Смирнов, М. М.* Задачи по уравнениям математической физики / М. М. Смирнов. — М.: Наука, 1975. — 128 с.
11. Сборник задач по уравнениям математической физики / Под редакцией В. С. Владимирова. — М.: Физматлит, 2003. — 288 с.
12. *Бицадзе, А. В.* Сборник задач по уравнениям математической физики / А. В. Бицадзе, Д. Ф. Калиниченко. — М.: Наука, 1977. — 224 с.
13. *Русак, В. Н.* Задачи по математической физике и их решение / В. Н. Русак, Н. К. Филиппова. — Мн: БГУ, 2007. — 112 с.

ЗМЕСТ