# К МАТРИЧНОЙ ТЕОРИИ ОПЕРАТОРА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

*Е. А. Ермолаев (Могилев, Беларусь)*

В [1] разработаны основы матричной теории оператора дифференцирования $d/dx$, применимой к периодическим краевым задачам для разностных и обыкновенных дифференциальных уравнений. В качестве адекватной модели оператора $d/dx$ была использована вырожденная циркулянтная матрица $D$ порядка $n = 2, 3, \ldots < \infty$. Были построены в виде циркулянтных матриц (и представлены в интегральной форме) операторы $D^{-1}$ и $D^0 = D^{-1}D = DD^{-1}$, где $D^{-1}$ является для $D$ обобщенной обратной матрицей Дразина и одновременно псевдообратной матрицей Мура — Пенроуза. В настоящей работе $(n{\times}n)$-матрицы $D$, $D^0$, $D^{-1}$ приведены к жордановой канонической форме [2]. В итоге получен следующий результат.

**Теорема.** *Матрица $D^p$ с показателем степени $p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ $(|p| < \infty)$ может быть представлена в виде*

$$D^p = S\,\mathrm{diag}(0, \lambda_1^p, \lambda_2^p, \ldots, \lambda_{n-1}^p)S^{-1} = \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j^p P_j = \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_j^p P_j\,, \tag{1}$$

*где преобразующая матрица $S$ $(\det S \neq 0)$, обратная к ней матрица $S^{-1}$ и проекционные матрицы $P_0 = S\,\mathrm{diag}(1, 0, 0, \ldots, 0)S^{-1}$, $P_1 = S\,\mathrm{diag}(0, 1, 0, \ldots, 0)S^{-1}, \ldots,$ $P_{n-1} = S\,\mathrm{diag}(0, 0, \ldots, 0, 1)S^{-1}$ имеют следующие элементы:*

$$S_{kl} = \frac{1}{\sqrt{n}} \exp\frac{2\pi kli}{n}, \quad (S^{-1})_{kl} = \frac{1}{\sqrt{n}} \exp\frac{-2\pi kli}{n},$$

$$P_{jkl} = \frac{1}{n} \exp \frac{2\pi j(k-l)i}{n} \quad (j,k,l = \overline{0, n-1}); \tag{2}$$

$\lambda_j = \dfrac{1}{h}\left(\exp \dfrac{2\pi j i}{n} - 1\right)$ *— собственные значения матрицы* $D$ $(\lambda_0 = 0)$, $i$ *— мнимая единица,* $h$ *— шаг дискретизации* $(h > 0)$; $0^0 = 0^{-1} = 0$ [3]; *как обычно,* $(\cdot)^{-m} = [(\cdot)^{-1}]^m$ $(m = 1, 2, \ldots)$.

Согласно (1) и (2), нулевая степень $D^0$ матрицы $D$ есть проекционная матрица вида $D^0 = S \operatorname{diag}(0, 1, 1, \ldots, 1) S^{-1} = I - P_0$, где $I$ — единичная матрица порядка $n$; у матрицы $P_0$ все элементы равны $1/n$.

**Литература. 1.** Ермолаев Е.А. Ассоциативные алгебры в теории классических полей. Могилев: Белорус.-Рос. ун-т, 2008. **2.** Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Мир, 1989. **3.** Ермолаев Е.А. // Весцi АН БССР. Сер. фiз.-мат. навук. 1991. № 2. С. 102–104.