ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ЗНАКОПОСТОЯННЫХ ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА

А. А. Леваков (Минск, Беларусь)

Метод функций Ляпунова является одним из наиболее эффективных методов исследования устойчивости дифференциальных систем, в частности, стохастических дифференциальных систем. Основная цель доклада — теоремы об устойчивости стохастических дифференциальных уравнений с использованием знакопостоянных функций Ляпунова.

Рассмотрим стохастическое дифференциальное уравнение

$$dX(t) = f(X(t))\,dt + g(X(t))\,dW(t), \quad X \in \mathbb{R}^d, \tag{1}$$

с непрерывными функциями $f:\ \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $g:\ \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times d}$.

Введем следующие условия A), B) и L).

Условие A). Существуют постоянные $r>1$, $\sigma>0$, $M>0$ такие, что для любого слабого решения $x(t)$ системы (1), удовлетворяющего условию $\|x(0)\| \leqslant \sigma$, выполняется $E(\|x(t)\|^r) \leqslant M \quad \forall t \geqslant 0$.

Условие B). Система (1) не имеет ненулевых слабых решений $x(t)$ таких, что $x(0)=0$ п. н.

Условие L). Существует дважды непрерывно дифференцируемая функция $V:\ \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$ такая, что $\forall x \in \mathbb{R}^d$

$$BV(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x) + \frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\left(\frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2} g(x) g^\top(x)\right) \leqslant 0.$$

Теорема. *Пусть система* (1) *удовлетворяет условиям* A), B) *и* L) *и пусть* $0<s<r$. *Если существует постоянная* $a>0$ *такая, что система* (1) *не имеет ненулевых слабых решений* $x(t)$ *на промежутке* $]-\infty,0]$, *обладающих свойствами:* $x(t) \in m_V = \{x \in \mathbb{R}^d | V(x)=0\}$ $\forall t \in]-\infty,0]$ *п. н.;* $E(\|x(t)\|^s) \leqslant a$ $\forall t \in]-\infty,0]$, *то нулевое решение системы* (1) s*-устойчиво. Если, кроме того, существует постоянная* $b>0$, *такая, что система не имеет ненулевых слабых решений* $x(t)$, $t \in [0,\infty[$, *удовлетворяющих условиям* $x(t) \in M_V = \{x \in \mathbb{R}^d |\ BV(x)=0\}$, $E(\|x(t)\|^s) \leqslant b$ $\forall t \in$ $\in [0,\infty[$, *то нулевое решение асимптотически* s*-устойчиво.*