УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

М. В. Мендзив, Р. К. Романовский (Омск, Россия)

Работа является продолжением исследований, выполненных [1]. Рассмотрим в области $\Pi = [0,1] \times [0,\infty)$ краевую задачу

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + A(x,t)\frac{\partial}{\partial x} + B(x,t)\right)u = 0, \quad u|_{t=0} = h(x),$$

$$u^+(0,t) = P_0 u^-(0,t), \quad u^-(1,t) = P_1 u^+(1,t). \tag{1}$$

Здесь $u : \Pi \to \mathbb{C}^N$, $A = \operatorname{diag}(a_1 I_1, \ldots, a_n I_n)$, $a_1 > \ldots > a_m > 0 > a_{m+1} > \ldots > a_n$, I_k — единичная матрица порядка N_k, $\sum N_k = N$, a_k, B, $h \in C^1$, $a'_{k\,x}$ — ограничены в Π, a_k, $a'_{k\,x}$, $a'_{k\,t}$, B — почти периодичны (п. п.) по t при каждом $x \in [0,1]$, $u^+ = (u_1, \ldots, u_m)^\top$, $u^- = (u_{m+1}, \ldots, u_n)^\top$, u_k — строка размера N_k, P_k — постоянные матрицы соответствующих размеров, выполняются условия согласования нулевого и первого порядков. При этих условиях задача (1) однозначно разрешима в классе гладких функций.

Обозначим H линеал гладких функций $h : [0,1] \to \mathbb{C}^N$, удовлетворяющих условиям согласования, с нормой $\|h\| = (\int_0^1 h^* h\, dx)^{1/2}$. Ограничение $u(t)$ решения задачи (1) на каждую горизонталь $t = \text{const} \geqslant 0$ — элемент H.

Будем говорить, что решение $u = 0$ краевой задачи (1) экспоненциально устойчиво, если при некоторых $\mu, \nu > 0$ для решений (1) выполняется неравенство $\|u(t)\| \leqslant \leqslant \mu e^{-\nu(t-\tau)}\|h\|$, $t \geqslant \tau$.

Построим по фиксированной матрице $F = \operatorname{diag}(F_1, \ldots, F_n)$ с диагональными блоками порядков $N_1, \ldots, N_n$ со свойствами $F^* = F$, $F \in C^2$, F'_x, F'_t — ограничены в П, $m_1 I \leqslant F \leqslant m_2 I$ $(m_k > 0)$, F, F'_x, F'_t п. п. по t при каждом $x \in [0,1]$ матрицы $G(x,t) = F'_t + (FA)'_x - FB - B^*F$, $G_0(t) = [(FA)^- + P_0^*(FA)^+P_0]_{x=0}$, $G_1(t) = [(FA)^+ + P_1^*(FA)^-P_1]_{x=1}$, где $(FA)^+ = \operatorname{diag}(a_1F_1, \ldots, a_mF_m)$, $(FA)^- = \operatorname{diag}(a_{m+1}F_{m+1}, \ldots \ldots, a_nF_n)$.

Теорема. *Пусть существует матрица F с указанными свойствами такая, что:*

1 $G \leqslant 0$ $(t \geqslant 0)$, $G \leqslant -mI$ *хотя бы при одном* $t_0 \geqslant 0$,

2) $G_0 \leqslant 0$, $G_1 \geqslant 0$ $(t \geqslant 0)$.

Тогда решение $u = 0$ *задачи* (1) *экспоненциально устойчиво.*

Литература. 1. Мендзив М.В., Романовский Р.К. // Дифференц. уравнения. 2008. Т. 44, №2. С. 257–262.