ТОЧНОСТЬ РАЗНОСТНЫХ АППРОКСИМАЦИЙ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В ПРОИЗВОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

Ф. В. Лубышев, А. Р. Манапова (Уфа, Россия)

Пусть управляемый процесс описывается задачей Дирихле с переменными коэффициентами:

$$-\sum_{\alpha=1}^{2}\frac{\partial}{\partial\xi_\alpha}\left(k_\alpha(\xi)\frac{\partial u}{\partial\xi_\alpha}\right)+\sum_{\alpha=1}^{2}b_\alpha(\xi)\frac{\partial u}{\partial\xi_\alpha}+d(\xi)q(u)=f(\xi),\quad \xi\in\Omega, \qquad u(\xi)=0,\qquad \xi\in\Gamma, \tag{1}$$

в области $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ произвольной формы. Будем предполагать, что Ω – выпуклая область с границей Γ, принадлежащей классу C^2; k_α, b_α, d, q, $\alpha=1,2$ – заданные функции; $g=f\in H=L_2(\Omega)$ – управление. Относительно заданных функций будем предполагать: $k_\alpha\in W^1_\infty(\Omega)$ и $k_\alpha(\xi)\geqslant\nu>0$, $\alpha=1,2$, $\xi\in\Omega$, $b_\alpha\in L_\infty(\Omega)$: $\zeta_\alpha\leqslant b_\alpha(\xi)\leqslant\overline{\zeta}_\alpha$ п. в. на Ω, $\alpha=1,2$; $d\in L_\infty(\Omega)$: $\zeta_3\leqslant d(\xi)\leqslant\overline{\zeta}_3$ п. в. на Ω; q определена на $\mathbb{R}$ со значениями в $\mathbb{R}$, $q(0)=0$, $0\leqslant q_0\leqslant\big[q(s_1)-q(s_2)\big]/(s_1-s_2)\leqslant L_q<\infty$, для всех $s_1,s_2\in\mathbb{R}$, $s_1\neq s_2$.

Поставим следующую задачу: на решениях задачи, отвечающих всевозможным допустимым управлениям $g\in U\subset H=L_2(\Omega)$, $U=\{f\in L_2(\Omega):\zeta_4\leqslant f(\xi)\leqslant\overline{\zeta}_4$ п.в. на $\Omega\}$ или $U=\{f\in L_2(\Omega):\|f\|\leqslant R\}$ минимизировать функционал

$$J(g)=\int\limits_\Omega\|u(\xi,g)-u_0(\xi)\|^2d\Omega. \tag{2}$$

Здесь $u_0\in W^1_2(\Omega)$ – заданная функция, а R,ν, $\zeta_k,\overline{\zeta}_k$, $k=\overline{1,4}$ – заданные числа, $R>0$; п. в. – почти всюду. Предполагается выполнение следующих условий: $-m\leqslant\zeta_1\leqslant\overline{\zeta}_1\leqslant m$, $\quad -q\leqslant\zeta_2\leqslant\overline{\zeta}_2\leqslant q$, $\quad m,q=\mathtt{const}>0$; $\zeta_k\leqslant\overline{\zeta}_k$, $\quad \zeta_k,\overline{\zeta}_k=\mathtt{const}, k=3,4$;

$$\delta_0=\max_{\substack{\epsilon_1,\epsilon_2>0\\ \epsilon_1+\epsilon_2\leqslant\nu}}\left\{\frac{\nu-(\epsilon_1+\epsilon_2)}{D^2}+\zeta_3-\frac{m^2}{4\epsilon_1}-\frac{p^2}{4\epsilon_2}\right\}>0;\quad D=diam\,\Omega.$$

Проблема численного решения поставленных нелинейных оптимизационных задач приводит к необходимости их аппроксимаций последовательностями конечномерных задач минимизации. Задаче оптимального управления (1)–(2) поставим в соответствие следующую разностную аппроксимацию: минимизировать функционал

$$J_h(\Phi_h)=\sum_{x\in\omega}\left|y(x;\Phi_h)-u_0^h(x)\right|^2 mes\,e(x),$$

при условиях, что сеточная функция $y(\Phi_h)\in\overset{\circ}{W}{}^1_2(\omega)$, называемая решением разностной краевой задачи, удовлетворяет для $\forall\ v\in\overset{\circ}{W}{}^1_2(\omega)$ сумматорному тождеству

$$\sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{x'\in\omega'_\alpha}a_\alpha^{(+0.5_\alpha)}(x)\,y_{\overline{x}_\alpha}^{(+0.5_\alpha)}\,v_{\overline{x}_\alpha}^{(+0.5_\alpha)}h_\alpha^{(+0.5)}h_{3-\alpha}+$$

$$+\sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{\omega}b_\alpha^h(x)y_{\overset{\circ}{x}_\alpha}\,v\,mes\,e(x)+\sum_{\omega}d^h(x)\,q(y)\,v\,mes\,e(x)=\sum_{\omega}\Phi_h(x)\,v\,mes\,e(x),$$

а сеточное управление Φ_h таково, что $\Phi_h \in U_h \subset H_h = L_2(\omega)$, $U_h = \{\Phi_h(x) \in L_2(\omega) : \zeta_4 \leqslant \Phi_h(x) \leqslant \overline{\zeta}_4\}$ или $U_h = \{\Phi_h(x) \in L_2(\omega) : \|\Phi_h\|_{L_2(\omega)} \leqslant R\}$. Здесь $\alpha^{(\pm 0.5_\alpha)}(x)$, $\alpha = 1, 2$, u_0^h – сеточные аппроксимации функций $k_\alpha(\xi)$, $\alpha = 1, 2$, $u_0(\xi)$, $\xi \in \Omega$ в потоковых точках $x' = x^{(\pm 0.5_\alpha)} \in \omega'_\alpha$, $\alpha = 1, 2$, определяемые по формулам (см. [1])

$$a_\alpha^{(\pm 0.5_\alpha)}(x) = \frac{1}{l_\alpha^{(\pm 0.5_\alpha)}} \int\limits_{l_\alpha^{(\pm 0.5_\alpha)}} k_\alpha(\xi)\, dl \quad \text{для } l_\alpha^{(\pm .5_\alpha)} \neq 0,$$

$$a_\alpha^{(\pm 0.5_\alpha)}(x) = \frac{1}{\Delta l} \int\limits_{\Delta l} k_\alpha(\xi)\, dl \quad \text{для } l_\alpha^{(\pm 0.5_\alpha)} = 0,$$

$$u_0^h(x) = \frac{1}{mes\; e(x)} \int\limits_{mes\; e(x)} u_0(\xi)\, d\xi, \qquad x \in \omega.$$

Функции $\alpha^{(\pm 0.5_\alpha)}(x)$ вычисляются с помощью криволинейных интегралов первого рода вдоль $l_\alpha^{(\pm 0.5_\alpha)}$ и Δl, целиком лежащих в $\overline{\Omega}$. По поводу определения сеток, шагов сеток и соответствующих норм см. [1]-[2].

При построении разностных аппроксимаций задач оптимального управления основной задачей является исследование предельного перехода решений сеточных задач минимизации к решениям исходной задачи при сгущении сетки. В работе исследована корректность моделей оптимизации нелинейного типа и их конечномерных сеточных аппроксимаций, установлены оценки точности аппроксимаций по состоянию и функционалу и сходимость аппроксимаций по управлению. Проведена регуляризация построенных аппроксимаций, позволяющая строить минимизирующие последовательности для функционалов цели задач оптимального управления, сильно сходящиеся в пространствах управлений исходных постановок к множествам точек минимумов функционалов. Полученные результаты о сходимости конечномерных аппроксимаций не зависят от способа решения конечномерных сеточных задач оптимального управления и развивают результаты работы [3].

Литература

1. Самарский А. А., Лазаров Р. Д., Макаров В. П. *Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями.* М.: Высшая школа, 1987.

2. Лубышев Ф. В. *Разностные аппроксимации задач оптимального управления системами, описываемыми уравнениями в частных производных.* Уфа: БГУ, 1999.

3. Лубышев Ф. В., Манапова А. Р. *О некоторых задачах оптимального управления и их разностных аппроксимациях и регуляризации для квазилинейных эллиптических уравнений с управлениями в коэффициентах*// Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2007. Т. 47. № 3. С. 376-396.