СИМВОЛЬНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ В ИССЛЕДОВАНИЯХ УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОВЕСНЫХ РЕШЕНИЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ МНОГИХ ТЕЛ

А. Н. Прокопеня (Брест, Беларусь)

В ньютоновой задаче n тел существует частное решение, определяющее синхронное движение тел одинаковой массы по эллиптическим орбитам, расположенным в плоскости Oxy инерциальной барицентрической системы координат, причем в любой момент времени тела образуют правильный n-угольник (см. [1]). Добавление в систему $(n+1)$-ого тела P_0 пренебрежимо малой массы не влияет на движение n массивных тел, а проблема исследования его движения получила название "ограниченной задачи многих тел". Даже в простейшем случае $n=2$ общее решение ограниченной задачи не найдено и потому ее анализ обычно начинается с поиска равновесных решений и исследования их устойчивости.

При подходящих начальных условиях тело P_0 будет двигаться только вдоль оси Oz, которая является осью симметрии системы, а начало координат является одним из его равновесных положений. При $n=2$ К.А. Ситников доказал (см. [2]), что тело P_0 может совершать осциллирующее движение вдоль оси Oz с неограниченно возрастающей амплитудой, и этот случай получил название "задачи Ситникова". Целью данной работы является доказательство устойчивости равновесного положения тела P_0 по Ляпунову при различных значениях числа массивных тел n (обобщенная "задача Ситникова") и малых значениях эксцентриситета их орбит ε. Основной результат работы можно сформултровать в виде следующей теоремы, которая обобщает результаты работ [3,4]:

Теорема 1. *Равновесное решение обобщенной "задачи Ситникова" устойчиво по Ляпунову, если эксцентриситет ε орбит массивных тел достаточно мал.*

Идеи доказательства. Уравнения возмущенного движения тела P_0 в окрестности начала координат можно записать в гамильтоновой форме, причем функция Гамильтона имеет вид

$$H=\frac{p_z^2}{2}+\frac{\varepsilon\cos t}{1+\varepsilon\cos t}\frac{z^2}{2}-\frac{a}{1+\varepsilon\cos t}\frac{1}{\sqrt{1+z^2}}, \tag{1}$$

где параметр a определяется соотношением $4n=a\sum_{k=1}^{n-1}(\sin(\pi k/n))^{-1}$. Функция (1) является аналитической в окрестности положения равновесия $z=p_z=0$ и представима в виде ряда

$$H=H_2+H_4+H_6+\ldots, \tag{2}$$

где квадратичная форма H_2 и форма четвертого порядка H_4 имеют вид:

$$H_2=\frac{p_z^2}{2}+\frac{(a+\varepsilon\cos t)z^2}{2(1+\varepsilon\cos t)},\quad H_4=-\frac{3az^4}{8(1+\varepsilon\cos t)}.$$

В линейном приближении уравнения возмущенного движения сводятся к дифференциальному уравнению второго порядка с периодическими коэффициентами, которое подробно исследовано в [5]. Применение полученных в [5] результатов позволяет сделать вывод об отсутствии в системе резонансов второго порядка и устойчивости положения равновесия в первом приближении при малых значениях эксцентриситета ε, что, однако, не означает его устойчивости по Ляпунову.

Анализ устойчивости положения равновесия в строгой нелинейной постановке производится на основе теоремы Арнольда [6], применение которой требует нормализации функции Гамильтона (2), что связано с весьма громоздкими аналитическими вычислениями. Сначала, применяя алгоритм, описанный в [7], приводим к нормальной форме квадратичную часть гамильтониана:

$$H_2 = \frac{\omega}{2}(p^2 + q^2),$$

где величина ω находится в виде разложения по малому параметру ε с точностью до шестого порядка. Затем строится каноническое преобразование, нормализующее форму четвертого порядка H_4. В результате, используя переменные типа *действие-угол*, приводим функцию Гамильтона (2) к виду

$$\tilde{H} = \omega r + cr^2 + O(r^{5/2}),$$

который позволяет применить теорему Арнольда [6] и доказать устойчивость положения равновесия по Ляпунову при отсутствии в системе резонансов до четвертого порядка включительно.

Случаи, когда в системе появляются резонансы четвертого порядка, анализируются отдельно на основе теоремы Маркеева [8] и доказывается, что при достаточно малых значениях эксцентриситета ε резонансы не приводят к неустойчивости положения равновесия.

Отметим, что решение всех вышеописанных задач сопряжено с громоздкими символьными вычислениями. В докладе обсуждаются алгоритмы соответствующих вычислений и их реализация с помощью системы компьютерной алгебры Mathematica.

Литература

1. Гребеников Е. А. *Существование точных симметричных решений в плоской ньютоновой проблеме многих тел* // Математическое моделирование, 1998. Т. 10, Вып. 8. С. 74–80.

2. Ситников К. А. *Существование осциллирующих движений в задаче трех тел* // Докл. АН СССР, 1960. Т. 133, Вып. 2. С. 303–306.

3. Прокопеня А. Н. *Исследование устойчивости равновесных решений эллиптической ограниченной задачи многих тел методами компьютерной алгебры* // Математическое моделирование, 2006. Т. 18, Вып. 10. С. 102–112.

4. Прокопеня А. Н. *Об устойчивости равновесных решений обобщенной задачи Ситникова.* Сб.: Динамика неоднородных систем, Вып. 9(2) (Под ред. Ю. С. Попкова) М.: ИСА РАН, 2005. С. 63–72.

5. Grebenikov E. A., Prokopenya A. N. *Determination of the boundaries between the domains of stability and instability for the Hill's Equation* // Nonlinear Oscillations, 2003. Vol. 6, No. 1. P. 42–51.

6. Арнольд В. И. *Об устойчивости положений равновесия гамильтоновой системы обыкновенных дифференциальных уравнений в общем эллиптическом случае* // Докл. АН СССР, 1961. Т. 137, Вып. 2. С. 255–257.

7. Прокопеня А. Н. *Нормализация неавтономной линейной гамильтоновой системы с малым параметром* // Математическое моделирование, 2005. Т. 17, Вып. 6. С. 33–42.

8. Маркеев А. П. *Точки либрации в небесной механике и космодинамике.* М.: Наука, 1978.