ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ КВАНТОВЫХ СИСТЕМ ГЕГЕНБАУЭРА

В. И. Зеленков (Минск, Беларусь)

Динамика многоуровневой квантовой системы, которая возбуждается радиационным полем, описывается уравнением

$$-i\frac{da_n(t)}{dt} = f_{n+1}e^{-i\varepsilon_{n+1}t}a_{n+1}(t) + f_n e^{i\varepsilon_n t}a_{n-1}(t). \tag{1}$$

Здесь $a_n(t)$ — амплитуды вероятности, ε_n —- безразмерная частотная отстройка излучения от резонанса, t —- безразмерное время. Функция f_n характеризует изменение дипольного момента перехода с номером уровня: $\mu_{n-1,n} = f_n\mu_{0,1}$ (очевидно, что $f_1 \equiv 1$).

Будем искать решение уравнения (1) в форме

$$a_n(t) = \int\limits_A^B \sigma(x)\,\frac{p_0(x)}{d_0}\,\frac{p_n(x)}{d_n}\,\exp\left[it\left(rx + \Delta_n\right)\right]dx, \tag{2}$$

где $p_n(x)$ – полиномы, ортогональные на $[A,B]$ с весом $\sigma(x)$ и квадратичной нормой d_n, а $\Delta_n = \Delta_0 + \sum_{k=1}^n \varepsilon_k$, т.е. $\varepsilon_n = \Delta_n - \Delta_{n-1}$. Подставив (2) в (1), получаем

$$f_{n+1}\frac{p_{n+1}(x)}{d_{n+1}} + f_n\frac{p_{n-1}(x)}{d_{n-1}} = \left(rx + \Delta_n\right)\frac{p_n(x)}{d_n}, \tag{3}$$

что совпадает по виду с трехчленным рекуррентным соотношением, которому подчиняются ортогональные полиномы. Таким образом, подобрав соответствующий полином, можно построить математическую модель квантовой системы с заданными функцией дипольных моментов f_n и частотной отстройкой от резонанса ε.

Подобная задача ранее была решена [1] с использованием ортогональных полиномов Гегенбауэра (другое название – ультрасферические полиномы). В этом случае функция дипольных моментов имеет вид

$$f_n = \sqrt{\frac{n(n+2\lambda-1)(\lambda+1)}{2(n+\lambda-1)(n+\lambda)}}, \quad \lambda > -1/2. \tag{4}$$

а возбуждение является резонансным ($\varepsilon = 0$).

Выбрав теперь в качестве p_n полиномы Поллачека, ортогональные на конечном интервале [2], получим решение, описывающее трехпараметрическую нерезонансно возбуждаемую систему:

$$
\begin{aligned}
f_n &= \sqrt{\frac{n(2\lambda + a)(2\lambda + 2 + a)(n + 2\lambda - 1)}{2\lambda(2n + 2\lambda - 2 + a)(2n + 2\lambda + a)}}, \\
\Delta_n &= \frac{b}{(a + 2n + 2\lambda)}\sqrt{\frac{(a + 2\lambda)(a + 2\lambda + 2)}{2\lambda}}, \\
\varepsilon_n &= -\frac{2b}{(2n + 2\lambda + a)(2n + 2\lambda - 2 + a)}\sqrt{\frac{(a + 2\lambda)(a + 2\lambda + 2)}{2\lambda}}.
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Здесь $\lambda > 0$, $a \geqslant |b|$. Очевидно, что при $a = b = 0$ (5) переходит в (4) и $\varepsilon = 0$, а сами полиномы – в полиномы Гегенбауэра.

В работе изучены свойства такой квантовой системы, получены решения, описывающие динамику ее возбуждения при различных значениях параметров, рассмотрены разнообразные предельные случаи.!‘

Литература

1. Зеленков В. И., Савва В. А. *Аналитические решения задачи о многофотонном возбуждении многоуровневых частиц* // Доклады АН БССР. 1988. Т.32, №4. С. 313–316.

2. Pollaczek F. *Systémes de polynomes biorthogonaux qui généralisent les polynomes ultrasphériques* // C.R.Acad.Sci. Paris, 1949. Vol. 228. P. 1998–2000.