

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОВЕСНЫХ РЕШЕНИЙ ПЛОСКОЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ЗАДАЧИ ЧЕТЫРЕХ ТЕЛ В СЛУЧАЕ РЕЗОНАНСА ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Д. А. Будько, А. Н. Прокопеня (Брест, Беларусь)

Рассмотрена проблема устойчивости в смысле Ляпунова равновесных решений плоской ограниченной задачи четырех тел, сформулированной на основе известных треугольных решений Лагранжа. В этой модели три тела движутся по круговым орбитам вокруг центра масс системы, образуя равносторонний треугольник в любой момент времени. Нами исследуется движение четвертого тела пренебрежимо малой массы в гравитационном поле трёх массивных тел. Ранее в [1] были найдены равновесные решения рассматриваемой задачи и исследована их устойчивость в линейном приближении. Поскольку функция Гамильтона системы не является знакоопределенной, проблема устойчивости равновесных решений относится к критическому в смысле Ляпунова случаю (см. [2]) и может быть решена только в строгой нелинейной постановке на основе КАМ-теории. При этом причиной неустойчивости решений может быть наличие резонанса частот третьего порядка, который имеет место в рассматриваемой системе при определенных значениях ее параметров и требует отдельного исследования. Основным результатом проведенного анализа можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема. *Положения равновесия плоской ограниченной задачи четырех тел, сформулированной на основе треугольных решений Лагранжа, являются неустойчивыми для всех значений параметров μ_1, μ_2 , при которых выполняется условие резонанса частот третьего порядка вида $\sigma_1 = 2\sigma_2$.*

Идея доказательства. В работе производится нормализация функции Гамильтона системы с точностью до третьего порядка по возмущениям. Построено соответствующее каноническое преобразование Биркгофа и показано, что при отсутствии резонансов третьего порядка члены третьего порядка в разложении гамильтониана обнуляются. В этом случае для решения проблемы устойчивости равновесных решений требуется исследовать члены четвертого и более высоких порядков и использовать теорему Арнольда-Мозера [3,4] об устойчивости положений равновесия гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. При наличии резонанса третьего порядка условия теоремы Арнольда-Мозера не выполняются и проблема решается на основе теоремы Маркеева [5]. Для этого строится каноническое преобразование, которое приводит члены третьего порядка в выражении для гамильтониана к виду

$$H_3 = Br_2\sqrt{r_1} \cos(\varphi_1 + 2\varphi_2),$$

где $r_1, r_2, \varphi_1, \varphi_2$ – канонические переменные типа ”действие-угол”, а множитель B является функцией параметров системы μ_1, μ_2 . Исследование этой функции показало, что для всех значений параметров μ_1, μ_2 , принадлежащих резонансной кривой $\sigma_1 = 2\sigma_2$, выполняется условие $B > 0$, что означает неустойчивость равновесных решений.

Литература

1. Budzko D. A. *Linear stability analysis of equilibrium solutions of the restricted planar four-body problem.* In: Computer Algebra Systems in Teaching and Research. Evolution,

control and stability of dynamical systems (Eds. L. Gadomski et al.) Siedlce, The College of Finance and Management, 2009. P. 28–36.

2. Ляпунов А. М. *Общая задача об устойчивости движения*. (Под ред. Г. Мюнц) Череповец: Меркурий-Пресс, 2000.

3. Арнольд В. И. *Малые знаменатели и проблема устойчивости движения в классической и небесной механике* // Успехи матем. наук. 1963. Т. 18, Вып. 6. С. 91–192.

4. Мозер Ю. *КАМ-теория и проблемы устойчивости*. Ижевск, НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2001.

5. Маркеев А. П. *Точки либрации в небесной механике и космодинамике*. М.: Наука, 1978.