ИССЛЕДОВАНИЕ НЕМАРКОВСКОЙ RQ-СИСТЕМЫ С КОНФЛИКТОМ ЗАЯВОК

А. Назаров, Е. Судыко*

Томский государственный университет
Томск, Россия
* ESudyko@yandex.ru

В работе рассмотрена немарковская RQ-система (Retrial queue) с конфликтами заявок, при возникновении которых обе заявки, обслуживаемая и поступившая, переходят в источник повторных вызовов. Предложен метод асимптотических семиинвариантов для исследования RQ-системы.

Ключевые слова: RQ-система, источник повторных вызовов, конфликты заявок.

1. ВВЕДЕНИЕ

В данной статье рассмотрим однолинейную немарковскую RQ-систему (Retrial queues) с конфликтами заявок , на вход которой поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ. Требование, заставшее прибор свободным, занимает его для обслуживания в течение случайного времени, имеющего произвольную функцию распределения $B(x)$. Если прибор занят, то поступившая и обслуживаемая заявки вступают в конфликт и обе переходят в источник повторных вызовов (ИПВ), где осуществляют случайную задержку, продолжительность которой имеет экспоненциальное распределение с параметром σ. Из ИПВ после случайной задержки заявка вновь обращается к прибору с повторной попыткой его захвата. Если прибор свободен, то заявка из ИПВ занимает его для обслуживания.

2. ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Пусть $i(t)$- число заявок в ИПВ, $z(t)$ - длина интервала от момента t до момента окончания обслуживания заявки, стоящей на приборе в момент времени t, а $k(t)$ - определяет состояние прибора следующим образом:
$k(t) = 0$, если прибор свободен;
$k(t) = 1$, если прибор находится в состоянии обслуживания заявки.

Компонента $z(t)$ определяется только в те моменты, когда $k(t) = 1$. Обозначим

$$P\{k(t) = 0, i(t) = i\} = P(0, i, t)$$

вероятность того, что прибор в момент времени t свободен $(k(t) = 0)$и в источнике повторных вызовов находится i заявок, а

$$P\{k(t) = 1, z(t) < z, i(t) = i\} = P(1, z, i, t)$$

вероятность того, что прибор в момент времени t занят $(k(t)=1)$, до конца обслуживания заявки, стоящей на приборе в момент времени t, осталось время, меньшее, чем z и в источнике повторных вызовов находится i заявок.

Процесс $\{k(t), z(t), i(t)\}$ изменения во времени состояний описанной системы является марковским.

Для распределения вероятностей $P(k, z, i, t)$ состояний $\{k, z, i, t\}$ рассматриваемой RQ-системы составим, систему дифференциальных уравнений Колмогорова, которую запишем для стационарного случая

$$(\lambda+i\sigma)P(0,i)=\lambda P(1,\infty,i-2)+(i-1)\sigma P(1,\infty,i-1)+\frac{\partial P(1,0,i)}{\partial z},$$
$$(\lambda+i\sigma)P(1,z,i)=\lambda P(0,i)B(z)+(i+1)\sigma P(0,i+1)B(z)+\frac{\partial P(1,z,i)}{\partial z}-\frac{\partial P(1,0,i)}{\partial z}. \quad (1)$$

Систему (**??**) для функции $H(0,u)=\sum\limits_i \mathbf{e}^{jui}P(0,i)$, $H(1,z,u)=\sum\limits_i \mathbf{e}^{jui}P(1,z,i)$ можно записать следующим образом

$$\lambda H(0,u)-j\sigma\frac{\partial H(0,u)}{\partial u}=\lambda\mathbf{e}^{2ju}H(1,u)-j\mathbf{e}^{ju}\sigma\frac{\partial H(1,u)}{\partial u}+\frac{\partial H(1,0,u)}{\partial z},$$
$$\lambda H(1,z,u)-j\sigma\frac{\partial H(1,z,u)}{\partial u}=\lambda H(0,u)B(z)-$$
$$-j\mathbf{e}^{-ju}\sigma\frac{\partial H(0,u)}{\partial u}B(z)+\frac{\partial H(1,z,u)}{\partial z}-\frac{\partial H(1,0,u)}{\partial z}. \quad (2)$$

Эта система будет называться основной для дальнейшего исследования методом асимптотических семиинвариантов.

3. АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

3.1. Асимптотика первого порядка. Для нахождения асимптотики первого порядка в уравнении (2) выполним следующие замены

$$\sigma=\varepsilon,\quad u=\varepsilon w,\quad H(0,u)=F_1(0,w,\varepsilon),\quad H(1,z,u)=F_1(1,z,w,\varepsilon). \quad (3)$$

Тогда уравнения системы (2) примут вид

$$\lambda F_1(0,w,\varepsilon)-j\frac{\partial F_1(0,w,\varepsilon)}{\partial w}=\lambda\mathbf{e}^{2j\varepsilon w}F_1(1,w,\varepsilon)-j\mathbf{e}^{j\varepsilon w}\frac{\partial F_1(1,w,\varepsilon)}{\partial w}+\frac{\partial F_1(1,0,w,\varepsilon)}{\partial z},$$
$$\lambda F_1(1,z,w,\varepsilon)-j\frac{\partial F_1(1,z,w,\varepsilon)}{\partial w}=\lambda F_1(0,w,\varepsilon)B(z)-$$
$$-j\mathbf{e}^{-j\varepsilon w}\frac{\partial F_1(0,w,\varepsilon)}{\partial w}B(z)+\frac{\partial F_1(1,z,w,\varepsilon)}{\partial z}-\frac{\partial F_1(1,0,w,\varepsilon)}{\partial z}. \quad (4)$$

Теорема 1. *Предельное при* $\varepsilon \to 0$ *значение вектор-строки* $\{F_1(0,w), F_1(1,z,w)\}$ *решения* $\{F_1(0,w,\varepsilon), F_1(1,z,w,\varepsilon)\}$ *системы* (4) *имеет вид*

$$F_1(0,w) = R(0)\Phi_1(w) = R(0)\mathbf{e}^{jw\kappa_1},$$

$$F_1(1,z,w) = R(1,z)\Phi_1(w) = R(1,z)\mathbf{e}^{jw\kappa_1}, \tag{5}$$

где $R(0)$ *и* $R(1,z)$ *определяются равенствами*

$$R(0) = \frac{1}{2 - B^*(\lambda+\kappa_1)}, \tag{6}$$

$$R(1,z) = \left(1 - \mathbf{e}^{(\lambda+\kappa_1)z}\right)\frac{B^*(\lambda+\kappa_1)}{2 - B^*(\lambda+\kappa_1)} - \frac{\mathbf{e}^{(\lambda+\kappa_1)z}}{2 - B^*(\lambda+\kappa_1)}\int_0^z B(s)d\mathbf{e}^{-(\lambda+\kappa_1)s}, \tag{7}$$

а величина κ_1 *является решением нелинейного скалярного уравнения*

$$B^*(\lambda+\kappa_1)(2\lambda+\kappa_1) = 2\lambda, \tag{8}$$

где

$$\int_0^\infty \mathbf{e}^{-sx}dB(x) = B^*(s).$$

3.2. Асимптотика второго порядка. Для нахождения асимптотики второго порядка в уравнениях основной системы (2) выполним следующие замены

$$H(0,u) = H_2(0,u)\mathbf{e}^{\frac{ju}{\sigma}\kappa_1}, \qquad H(1,z,u) = H_2(1,z,u)\mathbf{e}^{\frac{ju}{\sigma}\kappa_1},$$

$$\sigma = \varepsilon^2, \quad u = \varepsilon w, \quad H_2(0,u) = F_2(0,w,\varepsilon), \quad H_2(1,z,u) = F_2(1,z,w,\varepsilon), \tag{9}$$

для неизвестных функций $\{F_2(0,w,\varepsilon), F_2(1,z,w,\varepsilon)\}$ получим уравнения

$$\begin{gathered}
(\lambda+\kappa_1)F_2(0,w,\varepsilon) - j\varepsilon\frac{\partial F_2(0,w,\varepsilon)}{\partial w} = \mathbf{e}^{j\varepsilon w}F_2(1,w,\varepsilon)\left(\mathbf{e}^{j\varepsilon w}\lambda + \kappa_1\right) - \\
-j\mathbf{e}^{j\varepsilon w}\varepsilon\frac{\partial F_2(1,w,\varepsilon)}{\partial w} + \frac{\partial F_2(1,0,w,\varepsilon)}{\partial z}, \\
(\lambda+\kappa_1)F_2(1,z,w,\varepsilon) - j\varepsilon\frac{\partial F_2(1,z,w,\varepsilon)}{\partial w} = \left(\lambda + \mathbf{e}^{-j\varepsilon w}\kappa_1\right)F_2(0,w,\varepsilon)B(z) - \\
-j\mathbf{e}^{-j\varepsilon w}\varepsilon\frac{\partial F_2(0,w,\varepsilon)}{\partial w}B(z) + \frac{\partial F_2(1,z,w,\varepsilon)}{\partial z} - \frac{\partial F_2(1,0,w,\varepsilon)}{\partial z}.
\end{gathered} \tag{10}$$

Теорема 2. *Предельное при* $\varepsilon \to 0$ *значение вектор-строки* $\{F_2(0,w), F_2(1,z,w)\}$ *решения* $\{F_2(0,w,\varepsilon), F_2(1,z,w,\varepsilon)\}$ *системы* (10) *имеет вид*

$$F_2(0,w) = R(0)\Phi_2(w) = R(0)\mathbf{e}^{\frac{(jw)^2}{2}\kappa_2},$$

$$F_2(1,z,w) = R(1,z)\Phi_2(w) = R(1,z)\mathbf{e}^{\frac{(jw)^2}{2}\kappa_2}, \tag{11}$$

где величина κ_2 определяется равенством

$$\kappa_2 = \frac{R(0)\kappa_1\Big(\theta + (\lambda+\theta)B^*(\theta)\Big) + R(1)\Big(\lambda\theta + (\lambda+\theta)^2\Big)}{R(0)\Big(\theta - (\lambda+\theta)(B^*(\theta)-1)\Big) - R(1)\Big(\lambda+2\theta\Big) - R^*(\theta)(\lambda+\theta)}, \tag{12}$$

а $\theta = \lambda + \kappa_1$ и $R^*(\theta)$ имеет вид:

$$R^*(s) = -s^2 \int_0^\infty \mathbf{e}^{-sx} x \Big\{R(0)(1-B(x)) - R(1)\Big\} dx. \tag{13}$$

Функция распределения числа заявок в источнике повторных вызовов имеет вид

$$h_2(u) = \mathbf{e}^{ju\frac{\kappa_1}{\sigma} + \frac{(ju)^2}{2}\frac{\kappa_2}{\sigma}}.$$

4. ЧИСЛЕННЫЕ РАСЧЕТЫ

При заданной функции распределения $B(x)$ времени обслуживания заявки на приборе решая уравнение (8), найдем значение κ_1 . Из равенства (12) определим значение скалярной величины κ_2.

4.1. Экспоненциальное время обслуживания заявки на приборе. В случае экспоненциального времени обслуживания заявки на приборе преобразование Лапласа-Стилтьеса $B^*(\lambda+\kappa_1)$ от функции $B(x)$ будет выглядеть следующим образом:

$$B^*(\lambda+\kappa_1) = \int_0^\infty \mathbf{e}^{-(\lambda+\kappa_1)s} dB(s) = \int_0^\infty \mathbf{e}^{-(\lambda+\kappa_1)s} \mu \mathbf{e}^{-\mu s} ds = \frac{\mu}{\mu+\lambda+\kappa_1}. \tag{14}$$

Определим значения параметров в виде

$$\lambda = 0,4; \quad j = \sqrt{-1}; \quad \mu = 1. \tag{15}$$

Получим следующие значения асимптотических семиинвариантов при помощи выражений (8) и (12) совместно с (13), $\kappa_1 = 1,6$ и $\kappa_2 = 8,8$ значения которых совпадают со значениями асимптотических семиинвариантов, полученных в [2].

4.2. Детерминированное время обслуживания заявки на приборе. В случае детерминированного времени обслуживания заявки на приборе преобразование Лапласа-Стилтьеса $B^*(\lambda+\kappa_1)$ от функции $B(x)$ будет выглядеть следующим образом:

$$B^*(\lambda+\kappa_1) = \int_0^\infty \mathbf{e}^{-(\lambda+\kappa_1)s} dB(s) = \mathbf{e}^{-(\lambda+\kappa_1)} \tag{16}$$

Подставляя это равенство в уравнение (8), получаем, что в зависимости от выбранного значения параметра λ имеет место три ситуации: когда уравнение (8) для определения скалярной величины κ_1 имеет 2 корня, 1 корень и не имеет ни одного корня. Эти ситуации можно наглядно представить при помощи таблицы значений параметра λ следующим образом:

λ	Число корней уравнения (8)
$\lambda < 0.2119$	2 корня
$\lambda = 0.2119$	1 корень
$\lambda > 0.2119$	нет корней

Если уравнение (8) имеет 2 корня, то большему из них соответствуют отрицательные значения κ_2 из равенств (12), в силу чего можно сделать вывод об отсутствии стационарного режима в системе. Об отсутствии стационарного режима свидетельствует и ситуация, когда уравнение (8) не имеет ни одного корня.

Таким образом стационарный режим в системе достигается только при наличии одного корня в уравнении (8), однако следует отметить, что такая ситуация не представляет практического интереса, так как реализуется лишь при единственном значении $\lambda = 0.2119$.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, в работе проведено исследование немарковской RQ-системы с конфликтами заявок, при возникновении которых обе заявки, обслуживаемая и поступившая, переходят в источник повторных вызовов, методом асимптотического анализа в условии растущего времени задержки заявки в источнике повторных вызовов. Сформулированы теоремы получения уравнения для определения семиинварианта первого порядка и формулу для получения семиинварианта второго порядка. Сформулировано следствие, определяющее значение характеристической функции числа заявок в источнике повторных вызовов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Назаров А. А., Терпугов А. Ф.* Теория массового обслуживания. Томск: Изд-во НТЛ, 2004.
2. *Назаров А. А., Судыко Е. А.* Метод асимптотических семиинвариантов для исследования математической модели сети случайного доступа // Проблемы передачи информации. 2010. № 1. С. 94–111.