ОПТИМАЛЬНАЯ ОЦЕНКА СОСТОЯНИЙ ОБОБЩЕННОГО ПОЛУСИНХРОННОГО ПОТОКА ПРИ НЕПРОДЛЕВАЮЩЕМСЯ МЕРТВОМ ВРЕМЕНИ

А. Калягин, Л. Нежельская

Томский Государственный Университет

Томск, Россия

redall@inbox.ru

Рассматривается задача оптимальной оценки состояний полусинхронного дважды стохастического потока с инициированием дополнительных событий (обобщенный полусинхронный поток событий) с двумя состояниями. Условия наблюдения за потоком таковы, что каждое событие порождает период мертвого времени, в течении которого другие события потока недоступны наблюдению и не вызывают продления его периода (непродлевающееся мертвое время). Находится явный вид апостериорных вероятностей состояний потока. Решение о состоянии потока выносится по критерию максимума апостериорной вероятности. Приводятся численные результаты, полученные с использованием расчетных формул и имитационного моделирования.

Ключевые слова: обобщенный полусинхронный поток событий, состояние потока, апостериорная вероятность состояния, оценка состояния, мёртвое время.

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей статье проводится дальнейшее исследование обобщенного полусинхронного потока событий, начатое в работе [1]. Обобщенный полусинхронный дважды стохастический поток событий (далее обобщенный полусинхронный поток либо просто поток) является одной из адекватных математических моделей информационных потоков заявок, функционирующих в цифровых сетях интегрального обслуживания [2]. Достаточно обширная литература по исследованию подобных потоков событий (асинхронных, синхронных и полусинхронных) приведена в [1, 3, 4].

Подавляющее число авторов рассматривает математические модели потоков событий, когда все события доступны наблюдению. Однако на практике возникают ситуации, когда наступившее событие может повлечь за собой ненаблюдаемость последующих событий. Одним из искажающих факторов при оценке состояний и параметров потока событий выступает мертвое время регистрирующих приборов [5], которое порождается зарегистрированным событием. Другие же события, наступившие в течение периода мертвого времени, недоступны наблюдению (теряются). Можно считать, что этот период продолжается некоторое фиксированное время T. Все устройства регистрации делятся на две группы. Первую группу составляют устройства с непродлевающимся мертвым временем, вторую - устройства с продлевающимся мертвым временем. Отметим, что одними из первых работ по оценке параметров в случайных потоках событий, функционирующих в условиях мертвого времени, являются работы [6, 7]. В работе [1] решена задача об оптимальной оценке состояний обобщенного полусинхронного потока событий в условиях отсутствия мертвого времени. В настоящей статье, являющейся непосредственным развитием работы [1], решается задача об оптимальной оценке состояний обобщенного полусинхронного потока событий в условиях его неполной наблюдаемости (при непродлевающемся мертвом времени). Предлагается алгоритм оптимальной оценки состояний, когда решение о состоянии обобщенного полусинхронного потока выносится по критерию максимума апостериорной вероятности, представляющей наиболее полную характеристику состояния потока, которую можно получить, располагая только выборкой наблюдений, и обеспечивающего минимум полной (безусловной) вероятности ошибки вынесения решения [8].

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается обобщенный полусинхронный поток событий, интенсивность которого есть кусочно-постоянный случайный процесс $\lambda(t)$ с двумя состояниями λ_1 и λ_2 ($\lambda_1 > \lambda_2$). В течение временного интервала, когда $\lambda(t) = \lambda_i$, имеет место пуассоновский поток событий с интенсивностью λ_i , $i = 1, 2$. Переход из первого состояния процесса $\lambda(t)$ во второе возможен только в момент наступления события, при этом переход осуществляется с вероятностью $p (0 < p \leq 1)$; с вероятностью $1 - p$ процесс $\lambda(t)$ остается в первом состоянии. Тогда длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ в первом состоянии есть случайная величина с экспоненциальной функцией распределения $F_1(\tau) = 1 - e^{-p\lambda_1\tau}$. Переход из второго состояния процесса $\lambda(t)$ в первое состояние может осуществляться в произвольный момент времени. При этом длительность пребывания процесса $\lambda(t)$ во втором состоянии распределена по экспоненциальному закону: $F_2(\tau) = 1 - e^{-\alpha\tau}$. При переходе процесса $\lambda(t)$ из второго состояния в первое инициируется с вероятностью δ $(0 \leq \delta \leq 1)$ дополнительное событие в первом состоянии (т.е. сначала осуществляется переход, а затем инициируется дополнительное событие). Очевидно, что в сделанных предпосылках $\lambda(t)$ - марковский процесс. После каждого зарегистрированного события в момент времени t_i наступает время фиксированной длительности T (мертвое время), в течение которого другие события исходного обобщенного полусинхронного потока событий недоступны наблюдению. События, наступившие в течение мертвого времени, не вызывают продления его периода (непродлевающееся мертвое время). По окончании мертвого времени первое наступившее событие снова создает период мертвого времени длительности T и т.д.

Так как процесс $\lambda(t)$ и типы событий (события пуассоновских потоков и дополнительные события) являются принципиально ненаблюдаемыми, а наблюдаемыми являются только временные моменты наступления событий наблюдаемого потока $t_1, t_2, \ldots$, то необходимо по этим наблюдениям оценить состояние процесса (потока) $\lambda(t)$ в момент окончания наблюдений.

Рассматривается установившийся (стационарный) режим функционирования наблюдаемого потока событий, поэтому переходными процессами на интервале наблюдения (t_0, t), где t_0 - начало наблюдений, t - окончание наблюдений (момент вынесения решения), пренебрегаем. Тогда без потери общности можно положить $t_0 = 0$. Для вынесения решения о состоянии ненаблюдаемого процесса $\lambda(t)$ в момент времени t необходимо определить апостериорные вероятности $w(\lambda_i \mid t) = w(\lambda_i \mid t_1, \ldots, t_m, t)$, $i = 1, 2$, того, что в момент времени t значение процесса $\lambda(t) = \lambda_i$ (m - количество наблюденных событий за время t), при этом $w(\lambda_1 \mid t) + w(\lambda_2 \mid t) = 1$. Решение о состоянии процесса $\lambda(t)$ выносится путем сравнения апостериорных вероятностей: если $w(\lambda_j \mid t) \geq w(\lambda_i \mid t)$, $i, j = 1, 2$, $i \neq j$, то оценка состояния процесса есть $\lambda(t) = \lambda_j$.

3. АЛГОРИТМ ОПТИМАЛЬНОЙ ОЦЕНКИ СОСТОЯНИЙ

Момент вынесения решения t будет принадлежать интервалу (t_i, t_{i+1}), $i = 0, 1, 2, \ldots$, между двумя соседними событиями наблюдаемого потока. Рассмотрим интервал времени (t_i, t_{i+1}), значение длительности которого есть $\tau_i = t_{i+1} - t_i$, $i = 0, 1, \ldots$. Так как моменты наступления событий в наблюдаемом потоке случайны, то длительность интервала (t_i, t_{i+1}) - случайная величина. С другой стороны, так как наблюдаемое в момент времени t_i событие порождает период мертвого времени длительности T, то $\tau_i = T + \eta_i$, где η_i - значение длительности интервала между моментом окончания периода мертвого времени и моментом t_{i+1}, т.е. интервал (t_i, t_{i+1}) разбивается на два смежных интервала: первый - $(t_i, t_i + T)$, второй - $(t_i + T, t_{i+1})$. Отметим одно важное обстоятельство: так как после каждого события в наблюдаемом потоке реализуется период мертвого времени длительности T, в течение которого последующие события обобщенного полусинхронного потока недоступны наблюдению (поток отсутствует), то условия нахождения апостериорной вероятности $w(\lambda_1 \mid t)$ на интервале $(t_i, t_i + T)$ длительности T и интервале $(t_i + T, t_{i+1})$, значение длительности которого есть η_i, принципиально разные. Кроме того, для нахождения апостериорной вероятности $w(\lambda_1 \mid t)$ необходимо точно знать значение длительности T мертвого времени либо, по крайней мере, предварительно осуществить её оценку $\widehat{T}$. В противном случае отсутствие информации о значении длительности T мертвого времени делает попытку строгого нахождения апостериорной вероятности $w(\lambda_1 \mid t)$ невозможной. Здесь предполагается, что значение T известно точно.

В [1] сформулирован алгоритм расчета апостериорной вероятности $w(\lambda_1 \mid t)$ для случая отсутствия мертвого времени ($T = 0$). При этом поведение вероятности

$w(\lambda_1 \mid t)$ на полуинтервале $[t_i, t_{i+1})$ между соседними наблюдаемыми событиями обобщенного полусинхронного потока определяются выражением (1)

$$w(\lambda_1 \mid t) = \frac{w[1 - w(\lambda_1 \mid t_i + 0)] - [w - w(\lambda_1 \mid t_i + 0)]e^{-b(t-t_i)}}{1 - w(\lambda_1 \mid t_i + 0) - [w - w(\lambda_1 \mid t_i + 0)]e^{-b(t-t_i)}} \tag{1}$$

где $t_i \le t < t_{i+1}$, $i = 0, 1, \ldots$; $b = \lambda_1 - \lambda_2 - \alpha$; $w = \alpha(1 - \delta)/(\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha\delta) \ne 0$, $0 \le \delta \le 1$.

В момент времени t_i (в момент наступления события обобщенного полусинхронного потока) апостериорная вероятность (1) претерпевает разрыв 1-го рода $(i = 1, 2, \ldots)$, поэтому в момент времени t_i имеет место формула пересчета (2):

$$w(\lambda_1 \mid t_i + 0) = \frac{\alpha\delta + [(1 - p)\lambda_1 - \alpha\delta]w(\lambda_1 \mid t_i - 0)}{\lambda_2 + \alpha\delta + (\lambda_1 - \lambda_2 - \alpha\delta)w(\lambda_1 \mid t_i - 0)}, i = 1, 2, \ldots . \tag{2}$$

где $w(\lambda_1 \mid t_i - 0)$ вычисляется по формуле (1) в момент времени $t = t_i$, когда t изменяется в полуинтервале $[t_{i-1}, t_i)$, соседнем с полуинтервалом $[t_i, t_{i+1})$. В качестве начального значения $w(\lambda_1 \mid t_0 + 0) = w(\lambda_1 \mid t_0 = 0)$ в (1) выбирается априорная финальная вероятность первого состояния процесса $\lambda(t)$: $\pi_1 = \alpha/(\alpha + p\lambda_1)$, которая находится из уравнений $p\lambda_1\pi_1 - \alpha\pi_2 = 0$, $\pi_1 + \pi_2 = 1$.

Таким образом, вычисление апостериорной вероятности $w(\lambda_1 \mid t)$ по формуле (1) в условиях, когда длительность мертвого времени $T \ne 0$, справедливо на интервале $(t_i + T, t_{i+1})$, значение длительности которого есть η_i. При этом начальное условие для $w(\lambda_1 \mid t)$ привязывается к моменту времени $t_i + T$, т.е. в формуле (1), во-первых, нужно $w(\lambda_1 \mid t_i{+}0)$ заменить на $w(\lambda_1 \mid t_i{+}T)$, во-вторых, $t_i{+}T \le t < t_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots$. Формула пересчета (2) остается при этом без изменения, так как она предназначена для вычисления апостериорной вероятности в момент времени t_i наступления наблюдаемого события, которое порождает мертвое время.

Можно показать, что на интервале $(t_i, t_i + T)$ апостериорные вероятности $w(\lambda_j \mid t)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений:

$$\frac{dw(\lambda_1 \mid t)}{dt} = -p\lambda_1 w(\lambda_1 \mid t) + \alpha w(\lambda_2 \mid t), \frac{dw(\lambda_2 \mid t)}{dt} = p\lambda_1 w(\lambda_1 \mid t) - \alpha w(\lambda_2 \mid t), \tag{3}$$

с граничными условиями: $w(\lambda_1 \mid t = t_i) = w(\lambda_1 \mid t_i + 0)$, $w(\lambda_2 \mid t = t_i) = w(\lambda_2 \mid t_i + 0)$, $i = 1, 2, \ldots$. Последнее вытекает из того, что на интервале $(t_{i-1} + T, t_i)$, $i = 2, 3, \ldots$, смежным интервалу $(t_i, t_i + T)$ апостериорная вероятность рассчитывается по формуле (1), где вместо $w(\lambda_1 \mid t_i{+}0)$ стоит $w(\lambda_1 \mid t_i{+}T)$; в точке $t = t_i$ происходит пересчет апостериорной вероятности по формуле (2), так что её значение в этой точке есть $w(\lambda_1 \mid t_i + 0)$. Для граничного интервала (t_0, t_1) расчет апостериорной вероятности $w(\lambda_1 \mid t)$ производится по формуле (1) с её последующим пересчетом по формуле (2) в точке $t = t_1$. Решая систему (3), находим

$$w(\lambda_1 \mid t) = \pi_1 + (w(\lambda_1 \mid t_i + 0) - \pi_1)e^{-(\alpha + p\lambda_1)(t-t_i)}, \tag{4}$$

где $t_i \le t \le t_i + T$, $i = 1, 2, \ldots$; вероятность π_1 определена в (1). Тогда из (4) следует, что

$$w(\lambda_1 \mid t_i + T) = \pi_1 + (w(\lambda_1 \mid t_i + 0) - \pi_1)e^{-(\alpha + p\lambda_1)T}, i = 1, 2, \ldots. \qquad (5)$$

Полученные формулы позволяют сформулировать алгоритм расчета апостериорной вероятности $w(\lambda_1 \mid t)$ и алгоритм принятия решения о состоянии процесса $\lambda(t)$ в любой момент времени t: 1) в момент времени $t_0 = 0$ задается $w(\lambda_1 \mid t_0 + 0) = w(\lambda_1 \mid t_0 = 0) = \pi_1$; 2) по формуле (1) для $i = 0$ рассчитывается вероятность $w(\lambda_1 \mid t)$ в любой момент времени t $(0 \le t < t_1)$, где t_1 - момент наблюдения первого события наблюдаемого потока; 3) по формуле (1) для $i = 0$ рассчитывается вероятность $w(\lambda_1 \mid t)$ в момент времени $t_1 : w(\lambda_1 \mid t_1) = w(\lambda_1 \mid t_1 - 0)$; 4) i увеличивается на единицу и по формуле (2) для $i = 1$ производится пересчет апостериорной вероятности $w(\lambda_1 \mid t)$ в момент времени $t = t_1$, при этом $w(\lambda_1 \mid t_1 + 0)$ является начальным значением для $w(\lambda_1 \mid t)$ в формуле (4); 5) по формуле (4) для $i = 1$ рассчитывается вероятность $w(\lambda_1 \mid t)$ в любой момент времени t $(t_1 < t < t_1 + T)$; 6) по формуле (5) для $i = 1$ рассчитывается вероятность $w(\lambda_1 \mid t)$ в момент времени $t = t_1 + T$, т.е. $w(\lambda_1 \mid t_1 + T)$; при этом $w(\lambda_1 \mid t_1 + T)$ является начальным условием для $w(\lambda_1 \mid t)$ на следующем шаге алгоритма;

7) для $i = 1$ по формуле

$$w(\lambda_1 \mid t) = \frac{w[1 - w(\lambda_1 \mid t_i + T)] - [w - w(\lambda_1 \mid t_i + T)]e^{-b(t - t_i - T)}}{1 - w(\lambda_1 \mid t_i + T) - [w - w(\lambda_1 \mid t_i + T)]e^{-b(t - t_i - T)}} \qquad (6)$$

$(t_i + T \le t < t_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots$; w, b определены в (1)) рассчитывается вероятность $w(\lambda_1 \mid t)$ в любой момент времени t $(t_1 + T < t < t_2)$, где t_2 - момент наблюдения второго события наблюдаемого потока; 8) по формуле (6) для $i = 1$ рассчитывается вероятность $w(\lambda_1 \mid t)$ в момент времени $t = t_2 : w(\lambda_1 \mid t_2) = w(\lambda_1 \mid t_2 - 0)$; 9) алгоритм переходит на шаг 4, после чего шаги 4-8 повторяются для $i = 2$ и т.д.

Параллельно по ходу вычисления апостериорной вероятности $w(\lambda_1 \mid t)$ в любой момент времени t выносится решение о состоянии процесса $\lambda(t)$: если $w(\lambda_1 \mid t) \ge w(\lambda_2 \mid t)$ $(w(\lambda_1 \mid t) \ge 1/2)$, то оценка $\widehat{\lambda}(t) = \lambda_1$, в противном случае $\widehat{\lambda}(t) = \lambda_2$.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные путем имитационного моделирования экспериментальные результаты показывают возможность оценивания состояний обобщенного полусинхронного потока событий в условиях непродлевающегося мертвого времени по результатам текущих наблюдений (в течение некоторого временного интервала) за потоком. Это, в свою очередь, позволяет изменять режимы функционирования системы массового обслуживания в зависимости от того или иного состояния обобщенного полусинхронного потока событий (адаптироваться к изменяющейся интенсивности входящего потока событий). Выражения апостериорных вероятностей для оценки состояний потока получены в явном виде, что позволяет производить вычисления без привлечения численных методов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Горцев А.М., Калягин А.А., Нежельская Л.А.* Оптимальная оценка состояний обобщенного полусинхронного потока событий // Вестник ТГУ. Управление, вычислительная техника и информатика. 2010. №2(11). С. 66-81.
2. *Дудин А.Н., Клименок В.И.* Системы массового обслуживания с коррелированными потоками. Мн.: Издательство БГУ, 2000. 175 С.
3. *Горцев А.М., Леонова М.А.* Оптимальная оценка состояний обобщенного асинхронного дважды стохастического потока // Вестник ТГУ. Управление, вычислительная техника и информатика. 2010. №1(10). С. 33-47.
4. *Горцев А.М., Зуевич В.Л.* Оптимальная оценка состояний асинхронного дважды стохастического потока событий с произвольным числом состояний // Вестник ТГУ. Управление, вычислительная техника и информатика. 2010. №2(11). С. 44-65.
5. *Апанасович В.В., Коляда А.А., Чернявский А.Ф.* Статистический анализ случайных потоков в физическом эксперименте. Мн.: Издательство "Университетское 1988. 254 С.
6. *Горцев А.М., Климов И.С.* Оценка интенсивности пуассоновского потока событий в условиях частичной его ненаблюдаемости // Радиотехника. 1991. №12. С. 3-7.
7. *Горцев А.М., Климов И.С.* Оценивание параметров знакопеременного пуассоновского потока событий // Радиотехника. 1994. №8. С. 3-9.
8. *Хазен Э.М.* Методы оптимальных статистических решений и задачи оптимального управления. М.: Сов. радио, 1968. 256 С.