ПОСТРОЕНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ НЕОДНОРОДНОГО ДОРОЖНОГО ТРАФИКА

М. Федоткин*, Е. Кудрявцев

Нижегородский госуниверситет им. Лобачевского
национальный исследовательский университет
г. Нижний Новгород, Россия
*fma5@rambler.ru

В работе изучена случайная последовательность моментов пересечения автомобилями некоторой поперечной линии магистрали при плохих погодных и дорожных условиях. Интервалы между такими моментами являются зависимыми и имеют различные распределения. Рассмотрен нетрадиционный способ описания потока машин такой сложной вероятностной структуры. Этот способ основан на изучении распределении величины транспортной пачки и на распределении потока, так называемых, медленных или головных в автоколонне машин. При этом предполагается интенсивное движение другого типа машин – быстрых машин.

Ключевые слова: транспортная пачка, поток Пуассона, бесконечная система дифференциальных уравнений Колмогорова, предельное распределение.

1. ВВЕДЕНИЕ

Математической теории транспортных потоков посвящено большое число монографий и статей [1]. При этом предполагается, что транспортный поток сотоит из однородных или однотипных машин. Для реального транспортного потока машин это ограничение, как правило, не выполняется. Более того, каждый автомобиль осуществляет движение в экстремальных погодных и дорожных условиях, скорость которого является случайной величиной. В силу этого транспортный поток машин на магистралях существенно отличается от потока случайных событий, который рассматривается в классической теории массового обслуживания. Например, всегда требуется определить эргодическое распределение случайного числа машин в транспортной пачке. Для транспортного потока, как правило, не удается изучить вероятностные свойства последовательности из случайных моментов пересечения машинами, так называемой, виртуальной стоп-линии. В этой работе рассматриваются вероятностные модели транспортных потоков с учетом пространственных и временных свойств процессов движения автомобилей на автомагистрали. На реальных примерах показана эффективность предложенного подхода при построении и изучении моделей транспортных потоков.

2. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТРАНСПОРТНОЙ ПАЧКИ

При удовлетворительном состоянии дорожного полотна и хороших метеорологических условиях движение разного типа автомобилей по магистрали может оказаться беспрепятственным и пуассоновским. При плохих погодных условиях (туман, снег, гололед и т. д.) обгон быстрыми машинами медленных является уже рискованным, зависимым и занимает значительное время. В этом случае на интенсивных магистралях будут возникать автоколонны (группы) машин, или транспортные пачки, т. е. транспортные потоки уже не будут пуассоновскими. С такой ситуацией впервые столкнулся в 1963 году Бартлетт [2] при наблюдении за движением машин вблизи Лондона. Для такого типа транспортного потока Бартлетту и другим исследователям не удалось найти подходящего закона распределения для зависимых промежутков времени между двумя последовательными пересечениями автомобилями виртуальной стоп-линии. Один из авторов данной работы приблизительно в это же время решал задачу [3] об оптимальном управлении транспортными потоками в городе Горьком (Нижний Новгород). По наблюдениям за движением машин на магистралях вблизи Горького и других крупных городов было подмечено, что транспортная пачка состоит из головной машины с медленным движением и очереди из быстрых машин, которые догнали медленную и ожидают возможности обгона. Здесь возникает проблема построения модели пространственного расположения машин на магистрали. С этой целью был предложен простой механизм образования транспортных пачек при интенсивном движении машин в плохих погодных условиях. Для большого числа магистралей оказалось, что быстрые машины поступают в транспортную пачку, или, другими словами, догоняют медленную машину, по закону Пуассона с интенсивностью $\lambda > 0$. Это означает, что быстрые машины осуществляют относительно свободное движение на протяженных участках дороги, где нет медленных машин. Подробно такой транспортный поток был изучен в задаче о свободном движении автомобилей по магистрали [1]. Если $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}(\cdot))$ — основное вероятностное пространство, то далее через ω обозначим произвольный элемент достоверного события Ω. В некоторых случаях символ ω будем опускать. В соответствии с этой задачей обозначим через $\xi(\omega; t)$ случайное число быстрых машин, которые поступают по закону Пуассона в транспортную пачку за промежуток времени $[0, t)$. Аналогично обозначим через $\xi(\omega; t, \Delta t)$ случайное число быстрых машин, которые поступают по закону Пуассона в транспортную пачку за промежуток времени $[t, t + \Delta t)$.

Каждую машину с медленным движением можно интерпретировать как обслуживающий прибор для машин с быстрым движением. При этом под временем обслуживания, естественно, понимается случайное время обгона. На практике среднее время обслуживания (обгона) существенно зависит от числа машин в транспортной пачке. Пусть случайная величина $\chi(\omega; t)$ измеряет число всех типов машин в транспортной пачке в момент времени $t \geq 0$. Обозначим теперь через $\eta(\omega; t, \Delta t)$ случайное число быстрых машин, которые могу обогнать медленную за промежуток времени $[t, t + \Delta t)$. Вполне естественно предположить, что при малых значениях $\Delta t > 0$ условные вероятности событий, которые порождаются дискретной случайной величиной $\eta(\omega;t,\Delta t)$, определяются следующими соотношениями:

$$\begin{gathered}
\mathbf{P}(\{\omega\colon \eta(\omega;t,\Delta t)=0\}|\{\omega\colon \chi(\omega;t)=2,\xi(\omega;t,\Delta t)=0\})=1-\mu_1\Delta t+o(\Delta t),\\
\mathbf{P}(\{\omega\colon \eta(\omega;t,\Delta t)=1\}|\{\omega\colon \chi(\omega;t)=2,\xi(\omega;t,\Delta t)=0\})=\mu_1\Delta t-o(\Delta t),\\
\mathbf{P}(\{\omega\colon \eta(\omega;t,\Delta t)=0\}|\{\omega\colon \chi(\omega;t)=3,\xi(\omega;t,\Delta t)=0\})=1-\mu_2\Delta t+o(\Delta t),\\
\mathbf{P}(\{\omega\colon \eta(\omega;t,\Delta t)=1\}|\{\omega\colon \chi(\omega;t)=3,\xi(\omega;t,\Delta t)=0\})=\mu_2\Delta t-o(\Delta t),\\
\mathbf{P}(\{\omega\colon \eta(\omega;t,\Delta t)=0\}|\{\omega\colon \chi(\omega;t)=m,\xi(\omega;t,\Delta t)=0\})=1-\mu_3\Delta t+o(\Delta t),\\
\mathbf{P}(\{\omega\colon \eta(\omega;t,\Delta t)=1\}|\{\omega\colon \chi(\omega;t)=m,\xi(\omega;t,\Delta t)=0\})=\mu_3\Delta t-o(\Delta t),\\
\mathbf{P}(\{\omega\colon \eta(\omega;t,\Delta t)=0\}|\{\omega\colon \chi(\omega;t)=m-3,\xi(\omega;t,\Delta t)=1\})=1-O(\Delta t),\\
\mathbf{P}(\{\omega\colon \eta(\omega;t,\Delta t)=1\}|\{\omega\colon \chi(\omega;t)=m-3,\xi(\omega;t,\Delta t)=1\})=O(\Delta t),\\
\mathbf{P}(\{\omega\colon \eta(\omega;t,\Delta t)\geq 2\}|\{\omega\colon \chi(\omega;t)=m-2,\xi(\omega;t,\Delta t)=1\})=o(\Delta t),\\
m=4,5,\ldots
\end{gathered} \tag{1}$$

Здесь и далее $o(\Delta t)$ есть бесконечно малая неотрицательная величина по сравнению с Δt при $t\to 0$. В равенствах (1) параметры μ_1^{-1} и μ_2^{-1} задают среднее время обгона каждой быстрой машиной медленную в случае, когда транспортная пачка состоит из двух и трех машин соответственно. Аналогично параметр μ_3^{-1} в равенствах (1) определяет среднее время обгона каждой быстрой машиной медленную, если транспортная пачка состоит из четырех и более машин. Параметры μ_1,μ_2,μ_3 будем называть интенсивностями обгона. Таким способом моделируется зависимость среднего времени обгона от числа машин в транспортной пачке. Вероятности в (1) не зависят от времени t. Поэтому в дальнейшем ради упрощения записи будем опускать символ t и обозначать величину $\eta(\omega;t,\Delta t)$ через $\eta(\omega;\Delta t)$.

Восьмое и последнее равенства соотношения (1) можно проинтерпретировать следующим образом. При заданном размере транспортной пачки условная вероятность того, что за (где угодно расположенный) промежуток Δt по меньшей мере две машины обгонят медленную, есть величина бесконечно малая по сравнению с Δt. Обозначим теперь через $Q(t,m)$ вероятность $\mathbf{P}(\{\omega\colon \chi(\omega;t)=m\})$ при фиксированных $t>0$ и $m=1,\ 2,\ \ldots$ Итак, набор вероятностей $Q(t,m)$, $m=1$, $2,\ldots$ определяет распределение числа машин в транспортной пачке в момент $t\geq 0$.

Рассуждениями, аналогичными тем, которые обычно используются в теории массового обслуживания, мы можем получить бесконечную систему линейных дифференциальных уравнений первого порядка для вероятностей вида $Q(t,m)$, $t\geq 0$, $m=1,\ 2,\ \ldots$ При каждом фиксированном $m=1,\ 2,\ \ldots$ для случайного события $\{\omega\colon \chi(\omega;t+\Delta t)=m\}$ нетрудно показать следующее равенство в событиях

$$\{\omega\colon \chi(\omega;t+\Delta t)=m\}=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=0}^{\infty}\{\omega\colon \chi(\omega;\Delta t)=k,\xi(\omega;\Delta t)=n,\eta(\omega;\Delta t)=k+n-m\}.$$

Используя это соотношение и формулы (1), легко получить бесконечную систему линейных дифференциальных уравнений Колмогорова:

$$
\begin{gathered}
dQ(t,1)/dt = -\lambda Q(t,1) + \mu_1 Q(t,2),\\
dQ(t,2)/dt = \lambda Q(t,1) - (\lambda+\mu_1)Q(t,2) + \mu_2 Q(t,3),\\
dQ(t,3)/dt = \lambda Q(t,2) - (\lambda+\mu_2)Q(t,3) + \mu_3 Q(t,4),\\
dQ(t,m)/dt = \lambda Q(t,m-1) - (\lambda+\mu_3)Q(t,m) + \mu_3 Q(t,m+1), m \geq 4.
\end{gathered} \tag{2}
$$

Будем дополнительно предполагать, что в момент $t = 0$ число машин в транспортной пачке равно i. Тогда динамика распределения числа машин в транспортной пачке определяется решением системы дифференциальных уравнений (2) с начальными условиями $Q(0,i) = 1$, $Q(0,m) = 0$ при $m \geq 1$ и $m \neq i$.

Явное решение системы дифференциальных уравнений (2) может быть найдено с помощью вывода и последующего решения дифференциального уравнения в частных производных для производящей функции $\Pi_{\chi(t)}(t,z) = \sum_{m=1}^{\infty} z^m Q(t,m)$, как это делается в большинстве задач теории массового обслуживания. Однако в этом случае процесс решения является очень громоздким и далеко нетривиальным. К счастью, нам потребуется здесь только свойства распределения числа машин в транспортной пачке при $t \to \infty$, т. е. некоторые свойства решений системы (2) при $t \to \infty$. Общие свойства решений такого рода систем дифференциальных уравнений детально изучены в работах Колмогорова, Феллера, Ледермана, Карлина, Кларка, Мак-Грегора, Рейтера, Федоткина. В частности, если $\lambda < \mu_3$, то существует единственное решение системы уравнений (2), удовлетворяющее при $m = 1, 2, \ldots$ условиям: $\sum_{m=1}^{\infty} Q(t,m) = 1, \lim_{t\to\infty} Q(t,m) = Q(m) > 0, \sum_{m=1}^{\infty} Q(m) = 1$. При этом указанные пределы не зависят от начальных условий и могут быть получены путем решения бесконечной системы линейных алгебраических уравнений

$$
\begin{gathered}
0 = -\lambda Q(1) + \mu_1 Q(2), \quad 0 = \lambda Q(1) - (\lambda+\mu_1)Q(2) + \mu_2 Q(3),\\
0 = \lambda Q(2) - (\lambda+\mu_2)Q(3) + \mu_3 Q(4),\\
0 = \lambda Q(m-1) - (\lambda+\mu_3)Q(m) + \mu_3 Q(m+1), \quad m = 4,\ 5,\ \ldots
\end{gathered} \tag{3}
$$

Распределение $\{Q(m); m = 1, 2, \ldots\}$ называется предельным или эргодическим для числа $\chi(\omega)$ всех типов машин в транспортной пачке. Это распределение характеризует так называемый установившийся или стационарный режим движения автоколонн по магистрали. На содержательном уровне условие $\lambda < \mu_3$ означает, что интенсивность, с которой быстрые машины догоняют медленную, должна быть меньше интенсивности обгона. При $\lambda < \mu_3$ система (3) получается с помощью предельного перехода при $t \to \infty$ одновременно во всех уравнениях системы (2) с учетом равенств $\lim_{t\to\infty}(dQ(t,m)/dt) = 0, \lim_{t\to\infty} Q(t,m) = Q(m), m \geq 1$. Отметим, что при каждом фиксированном $m \geq 1$ предел $\lim_{t\to\infty}(dQ(t,m)/dt)$ существует. Более того, каждый такой предел равен нулю. В противном случае модуль величины $Q(t,m)$ при $t \to \infty$ возрастал бы неограниченно, что невозможно в силу смысла величины $Q(t,m)$ как вероятности. Перейдем теперь к решению системы (3).

Пусть при $m = 3, 4, \ldots$ величина $u_m = -\lambda Q(m) + \mu_3 Q(m+1)$. Из первых трех уравнений системы (3) получим, что $Q(2) = \lambda\mu_1^{-1}Q(1)$, $Q(3) = \lambda^2\mu_1^{-1}\mu_2^{-1}Q(1)$ и

$Q(4) = \lambda^3\mu_1^{-1}\mu_2^{-1}\mu_3^{-1}Q(1)$. Поэтому $u_3 = -\lambda Q(3) + \mu_3 Q(4) = 0$. Из системы (3) найдем $u_m - u_{m-1} = 0, m \geq 4$. Отсюда $u_m = 0$ для $m \geq 3$. Значит, для $m \geq 3$ вероятность $Q(m) = \lambda^2\mu_1^{-1}\mu_2^{-1}(\lambda\mu_3^{-1})^{m-3}Q(1)$. Замена $\alpha = \lambda\mu_1^{-1}, \beta = \lambda\mu_2^{-1}, \gamma = \lambda\mu_3^{-1}$, условие $\sum_{m=1}^{\infty} Q(m) = 1$ и неравенство $\lambda < \mu_3$ окончательно дает:

$$\begin{gathered} Q(1) = (1+\alpha+\alpha\beta/(1-\gamma))^{-1}, Q(2) = \alpha(1+\alpha+\alpha\beta/(1-\gamma))^{-1}, \\ Q(m) = \alpha\beta\gamma^{m-3}(1+\alpha+\alpha\beta/(1-\gamma))^{-1}, m \geq 3. \end{gathered} \tag{4}$$

Производящая функция $\Pi_\chi(t,z) = \sum_{m=1}^{\infty} z^m Q(m) = p(z+\alpha z^2+\alpha\beta z^3(1-\gamma z)^{-1})$, где $p = (1+\alpha+\alpha\beta/(1-\gamma))^{-1}$. Отсюда $M\chi(\omega) = p(1+2\alpha+\alpha\beta[2(1-\gamma)^{-1}+(1-\gamma)^{-2}])$, $D\chi(\omega) = (\alpha+\alpha\beta[(1-\gamma)^{-1}+(1-\gamma)^{-2}+2(1-\gamma)^{-3}]+\alpha^2\beta[-(1-\gamma)^{-2}+2(1-\gamma)^{-3}])p^2+$ $+p^2\alpha^2\beta^2[-(1-\gamma)^{-3}+(1-\gamma)^{-4}]$. Вид формулы (4) и равенство $\gamma = \lambda\mu_3^{-1}$ позволяет дать следующий простой смысл параметра γ для задачи о групповом движении машин по магистрали. Параметр γ задает степень насыщения транспортной магистрали быстрыми машинами и его можно назвать коэффициентом заполнения или загрузкой транспортной магистрали. В самом деле, если $\mu_3 > \lambda$ и $\mu_3 \to \lambda$, то легко выводим, что параметры $p \to 0, \gamma \to 1$. Поэтому при $\mu_3 > \lambda$ и $\mu_3 \to \lambda$ математическое ожидание числа всех типов машин в транспортной пачке для стационарного режима растет неограниченно. Это обстоятельство постоянно наблюдают автомобилисты при существенном ухудшении погодных условий, когда на дорогах образуются транспортные заторы значительной протяженности. Теперь можно сделать одно важное замечание. Легко видеть, что при $\alpha = \beta = \gamma$ данное распределение совпадает с геометрическим распределением. Из равенств $\alpha = \lambda\mu_1^{-1}, \beta = \lambda\mu_2^{-1}, \gamma = \lambda\mu_3^{-1}$ находим, что это возможно только при $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$. Другими словами, если среднее время обгона каждой быстрой машиной медленную не зависит от числа машин в транспортной пачке, то мы имеем дело с геометрическим законом распределения.

3. СВОЙСТВА НЕОРДИНАРНОГО ПОТОКА

В реальном транспортном потоке плотность медленных машин (число медленных машин на единичном по длине участке автомагистрали) значительно меньше плотности быстрых. В тоже время можно допустить, что движение медленных машин в стационарном режиме происходит независимым образом. В связи с этим можно предположить, что транспортный поток из медленных машин в стационарном режиме будет пуассоновским с интенсивностью μ. Пусть максимальная длина участка дороги, на котором располагается среднее число $M\chi(\omega)$ автомобилей в транспортной пачке, много меньше среднего расстояния между соседними автомобилями с медленным движением. Тогда можно считать, что все машины каждой движущейся автоколонны в стационарном режиме пересекают некоторую поперечную линию автомагистрали одновременно. Для данного потока обозначим теперь через $\varkappa(\omega;t)$ случайное число всех типов машин, которые пересекают фиксированную поперечную линию автомагистрали за промежуток времени $[0,t)$. Для $\varkappa(\omega;t)$ введем производящую функцию $\Pi_{\varkappa(t)}(t,z) = \sum_{m=0}^{\infty} z^m \mathbf{P}(\{\omega\colon \varkappa(\omega;t) = m\})$.

Теорема 1. *Для функции* $\Pi_{\varkappa(t)}(t,z)$ *справедливо равенство* $\Pi_{\varkappa(t)}(t,z) = e^{-\mu t} \times$ $\times \sum_{k=0}^{\infty} z^k \left\{ \sum_{n=0}^{[\frac{k}{2}]} \alpha^n \left[\frac{(\mu tp)^{k-n}}{n!(k-2n)!} + \sum_{m=1}^{min\{k-2n,n\}} \beta^m \sum_{l=0}^{k-2n-m} \gamma^l \frac{(\mu tp)^{k-n-m-l} C_{m+l-1}^l}{(n-m)!m!(k-2n-m-l)!} \right] \right\}$, *где* $\left[\frac{k}{2}\right]$ *обозначает целую часть числа* $\frac{k}{2}$.

Из теоремы следует, что поток определяется параметрами μ, α, β и γ.

Теорема 2. *Для распределения* $\mathbf{P}(\{\omega\colon \varkappa(\omega;t) = k\})$, $k \geq 0$ *случайного потока* $\{\varkappa(\omega;t)\colon t \geq 0\}$ *имеет место:* $\mathbf{P}(\{\omega\colon \varkappa(\omega;t) = 0\}) = e^{-\mu t}, \mathbf{P}(\{\omega\colon \varkappa(\omega;t) = k\}) =$

$$= e^{-\mu t} \sum_{n=0}^{[\frac{k}{2}]} \alpha^n \left[\frac{(\mu tp)^{k-n}}{n!(k-2n)!} + \sum_{m=1}^{min\{k-2n,n\}} \beta^m \sum_{l=0}^{k-2n-m} \gamma^l \frac{(\mu tp)^{k-n-m-l} C_{m+l-1}^l}{(n-m)!m!(k-2n-m-l)!} \right].$$

Лемма 1. *Пусть* $M\varkappa(\omega;t)$ *и* $D\varkappa(\omega;t)$ *суть математическое ожидание и дисперсия* $\varkappa(\omega;t)$. *Тогда имеет место:* $M\varkappa(\omega;t) = \mu tp \left(1 + 2\alpha + \alpha\beta \left[\frac{2}{1-\gamma} + \frac{1}{(1-\gamma)^2}\right]\right)$, $D\varkappa(\omega;t) = \mu tp \left(1 + 4\alpha + \alpha\beta \left[\frac{4}{1-\gamma} + \frac{3}{(1-\gamma)^2} + \frac{2}{(1-\gamma)^3}\right]\right)$.

Лемма 2. *Для того чтобы сумма* n *независимых потоков данного вида с параметрами* μ_i, α_i, β_i *и* γ_i, $i = \overline{1,n}$, *являлась таким же потоком, необходимо и достаточно, чтобы* $\gamma_1 = \gamma_2 = ... = \gamma_n$. *При этом суммарный поток имеет параметры:* $\mu = \sum_{i=1}^n \mu_i, \alpha = \sum_{i=1}^n \mu_i\alpha_i p_i / \sum_{i=1}^n \mu_i p_i, \beta = \sum_{i=1}^n \mu_i\alpha_i\beta_i p_i / \sum_{i=1}^n \mu_i\alpha_i p_i, \gamma = \gamma_1$.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Была решена проблема построения и изучения математической модели пространственной и временной характеристик неоднородного транспортного потока на магистрали при большой плотности быстрых машин и значительном расстоянии между последовательными медленными машинами. При этом для построения вероятностной модели пространственной характеристики транспортного потока используется нелокальный способ [3] описания потоков неоднородных заявок. Показано, что локальное описание временной характеристики стационарного движения транспортного потока неоднородных машин можно выполнить неординарным пуассоновским потоком, когда в каждый вызывающий момент с вероятностью единица поступает лишь конечное число автомобилей. Подробно изучены вероятностные свойства и свойства числовых характеристик такого потока.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Haight F. A.* Mathematical theories of traffic flow. New York London: Academic press, 1963.
2. *Bartlett M. S.* The spectral analysis of point processes // J. R. Statist. Soc. B. 1963. V. 25. № 2. P. 264–296.
3. *Федоткин М. А.* Нелокальный способ задания управляемых случайных процессов // Математические вопросы кибернетики, 1998. № 7. С. 332–344.