Пешля-Теллера [2]) и асимметричными (Морса, Кратцера [3]) потенциалами. Тестирование показало преимущества данного алгоритма перед существующими программами [4] в отношении стабильности, надежности, точности и универсальности при сравнимой скорости работы.

**Литература**


1. F. Stern, S. D. Sarma. //Phys. Rev. B. 1984. Vol. 30, N 2. P. 840.

2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Квантовая механика: нерелятивистская теория.* М.: Наука. 1989.

3. Флюгге З. *Задачи по квантовой механике.* Т.1. М.: Мир. 1974.

4. http://demonstrations.wolfram.com/ Quantized Solutions Of The 1D Schrodinger Equation For A Harmonic Osc.


## НАХОЖДЕНИЕ ПРИБЛИЖЕННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ЛИНЕАРИЗОВАННОГО ПО СКОРОСТИ УРАВНЕНИЯ НАВЬЕ-СТОКСА НА ПРИМЕРЕ СТАЦИОНАРНОГО ОБТЕКАНИЯ НАГРЕТОЙ СФЕРЫ


Н. В. Малай, А. В. Глушак (Белгород, Россия)


Уравнения Навье-Стокса — это система дифференциальных уравнений в частных производных, описывающая движение вязкой ньютоновской жидкости. Система состоит из уравнения движения и уравнения непрерывности. Уравнения Навье-Стокса являются одними из важнейших в гидро- и газовой динамике и применяются при описании многих природных явлений и технических задач [1]. Эти уравнения имеют и большой интерес с точки зрения математики. В частности, весьма важны доказательства существования глобального гладкого решения задачи Коши для трехмерных уравнений Навье-Стокса, нахождение общего аналитического решения системы Навье-Стокса для пространственного или плоского потока и т.д. До сих пор решения этих уравнений найдены лишь для некоторых частных случаях [2, 3]. При описании движения частиц в разнотемпературных каналах, при зондировании атмосферы лазерным излучением и т.д. средняя температура поверхности частиц может существенно отличаться от температуры окружающей среды вдали от них. Поэтому систему уравнений Навье-Стокса решают совместно с уравнениями тепло- и массопереноса. Это вызвано тем, что коэффициенты молекулярного переноса (вязкости, теплопроводности и диффузии) уже нельзя считать постоянными величинами. В результате мы получаем довольно сложную краевую задачу.

Проведенные исследования на примере стационарного обтекания неподвижной неравномерно нагретой сферы плоскопараллельным потоком газа показали, что линеаризованное по скорости уравнение Навье-Стокса можно свести к однородному уравнению четвертого порядка. В нашем конкретном случае это уравнение имеет вид

$$y^4\frac{\mathrm{d}^4G(y)}{dy^4}+y^3\left(8+\alpha_1\ell\left(y\right)\right)\frac{d^3G(y)}{dy^3}+y^2\left(8+\alpha_2\ell\left(y\right)+\alpha_3\ell^2\left(y\right)\right)\frac{d^2G(y)}{dy^2}+$$

$$+y\big(-8+\ +\alpha_4\ell\left(y\right)+\alpha_5\ell^2\left(y\right)+\alpha_6\ell^3\left(y\right)\big)\frac{dG(y)}{dy}+\big(\alpha_7\ell^2\left(y\right)+\alpha_8\ell^3\left(y\right)+\alpha_6\ell^4\left(y\right)\big)\,G(y)=0,$$

в котором $\ell(y) = \Gamma_0/(y+\Gamma_0)$, $\Gamma_0$ — положительная постоянная,

$$\alpha_1 = \frac{1-2\beta}{1+\alpha},\ \alpha_2 = -\frac{8\beta}{1+\alpha},\ \alpha_3 = \frac{\beta^2-3\beta-\alpha\beta+3+3\alpha}{(1+\alpha)^2},\ \ \alpha_4 = 2\frac{\beta-1}{\alpha+1},\ \ \alpha_8 = -2\alpha_6,$$

$$\alpha_5 = 2\frac{\beta^2+\beta-\alpha\beta-3\alpha-3}{(1+\alpha)^2},\ \alpha_6 = \frac{6+12\alpha+6\alpha^2+\beta^2-5\beta-5\alpha\beta}{(1+\alpha)^3},\ \alpha_7 = 2\frac{2+2\alpha-\beta}{(1+\alpha)^2},$$

с краевыми условиями

$$G(1) = F_1, \quad \lim_{y\to\infty} G(y) = 1, \quad g(1) = F_2, \quad \lim_{y\to\infty} g(y) = 1.$$

Здесь $G(y)$ и $g(y)$ — произвольные функции, зависящие от радиальной координаты $y = r/R$ сферической системы координат $r, \theta, \varphi$. Связь между этими функциями устанавливается с помощью уравнения непрерывности. Через эти функции выражаются компоненты массовой скорости и давление газообразной среды. $F_1$ и $F_2$ — постоянные вид, которых определяется конкретной физической задачей. Например, в случае классической задачи Стокса имеем $F_1 = F_2 = 0$, что соответствует условию прилипания на поверхности сферы радиуса $R$.

Решение краевой задачи ищется в виде обобщенного степенного ряда [4]

$$G(y) = y^{\rho}\sum_{n=0}^{\infty} C_n \ell^n(y), \quad C_0 \neq 0,$$

Для $\rho$ получается определяющее уравнение $\rho(\rho+3)(\rho+1)(\rho-2) = 0$, имеющее корни $\rho_1 = -3$, $\rho_2 = -1$, $\rho_2 = 0$, $\rho_3 = 2$. Заметим, что разность корней равна целому числу. Следовательно, согласно общей теории решения дифференциальных уравнений в виде обобщенных степенных рядов, во всех остальных решениях, кроме первого, соответствующего $\rho_1 = -3$, появляется дополнительное слагаемое содержащее множитель $\ln y$, умноженный на первое решение.

Учитывая неравенство $\ell(y) = \Gamma_0/(y+\Gamma_0) \leqslant \Gamma_0/(1+\Gamma_0) < 1$, показано, что ряды, определяющие функции $G_i(y)$, $i = 1,\ 2,\ 3$ равномерно сходятся при $y \geqslant 1$ и определяют ограниченные функции, которые можно дифференцировать нужное число раз. Доказана теорема существования и единственности полученного решения.

В работе при описании свойств газообразной среды рассматривался степенной вид зависимости динамической вязкости и теплопроводности от температуры [5] $\mu_e = \mu_{e\infty} t_e^{\beta}$, $\lambda_e = \lambda_{e\infty} t_e^{\alpha}$, $\rho_e = \rho_{e\infty}/t_e$, $\lambda_i = \lambda_{i\infty} t_i^{\omega}$, $\mu_{e\infty} = \mu_e(T_{e\infty})$, $\rho_{e\infty} = \rho_e(T_{e\infty})$, $\lambda_{e\infty} = \lambda_e(T_{e\infty})$, $\lambda_{i\infty} = \lambda_i(T_{e\infty})$, $t_k = T_k/T_{e\infty}$, $k = e,\ i$, $0{,}5 \leqslant \alpha,\ \beta \leqslant 1$, $-1 \leqslant \omega \leqslant 1$. Индексы «$e$» и «$i$» относятся соответственно к газообразной среде и частице.

Получены аналитические выражения для силы, действующей на нагретую твердую частицу сферической формы, а также и для скорости ее движения в поле силы тяжести при произвольных относительных перепадах температуры. Указанные выражения являются аналогом формул Стокса.

Проведенный с помощью полученных формул численный анализ показал, что сила и скорость гравитационного движения существенно зависят от средней температуры поверхности частицы и показателей теплопроводности $\alpha$ и вязкости $\beta$. Сравнение полученных результатов с экспериментом показало, что различие с экспериментальными данными (относительная погрешность) составляет не более 15%, что подтверждает правомерность разработанного метода.

**Литература**

1. Хаппель Дж., Бреннер Г. *Гидродинамика при малых числах Рейнольдса.* М.: Мир, 1960.

2. Ладыженская О. А. *Математические вопросы динамики вязкой жидкости.* М.: Наука, 1970.

3. Акыш А. Ш. *О решении уравнении Навье-Стокса*// Изв. НАН РК. Сер. физ.-мат., 2007. Т. 1. С. 30–35.

4. Коддингтон Э. А., Левинсон Н., *Теория обыкновенных дифференциальных уравнений.* М.: Иностр. лит-ра, 1958.

5. Бретшнайдер С. *Свойства газов и жидкостей. Инженерные методы расчета.* Химия, Москва, 1966.

## ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ МЕТАМАТЕРИАЛОВ

С. В. Малый (Минск, Беларусь)

Метаматериалы имеют большой потенциал для использования в различных областях оптики и микроволновой техники. В настоящее время прямое моделирование электродинамических систем с учетом всех особенностей внутренней структуры метаматериалов практически невозможно. Для описания электромагнитных свойств таких сред применяются усредненые эффективные значения материальных параметров (диэлектрическая и магнитная проницаемости, коэффициент киральности), которые в зависимости от внутренней структуры метаматериала могут быть скалярными или тензорными величинами.

На базе метода минимальных автономных блоков (МАБ) [1] разработан комплексный подход к анализу электромагнитных свойств метаматериалов и устройств на их основе. Он включает в себя следующие направления:

1. Прямое решение электродинамической задачи с полным учетом внутренней структуры метаматериала на основе итерационного или рекомпозиционного варианта метода МАБ.

2. Определение эффективных значений диэлектрической и магнитной проницаемостей метаматериала в рамках решения прямой и обратной модельной задачи. Использование эффективных материальных параметров для численного электродинамического анализа систем на базе метода МАБ или других численных методов.

3. Выделение в составе декомпозиционной схемы типовых макроблоков и расчет для каждого из них многоканальной матрицы рассеяния. Использование этих матриц при решении электродинамических задач методом МАБ.

4. Определение усредненных матриц рассеяния макроблоков. Порядок усредненной матрицы рассеяния макроблока равен порядку матрицы рассеяния обычного МАБ. Использование усредненных матриц рассеяния в рамках метода МАБ.