УДК 33:517.925

Б.С. КАЛИТИН, Т.Б. СУЩ

ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОИЗВОДСТВА И РЕАЛИЗАЦИИ ПРОДУКЦИИ

The mathematical model of production and offtake is built as a system of nonlinear differential equations the second order. Stability of economic equilibrium of market price and issue of products is probed.

1. Добровольное взаимодействие производителей (продавцов) и потребителей (покупателей), подчиняющееся установленным государством требованиям, создает основу для обеспечения нормального функционирования рынка. Следовательно, рынок – это место, где сталкиваются интересы трех сторон. Во-первых, это продавцы, предлагающие свой товар на продажу, которым приходится учитывать и спрос покупателей, и давление со стороны конкурентов, и обязательную выплату налогов, кредитов, а возможно, и другие непредвиденные расходы, обусловленные наличием неявных структур. Во-вторых, это покупатели, делающие свой выбор относительно вида товара и объема покупок по подходящей для них цене. Их действия основываются на потребности в том или ином товаре, его полезности и на возможности, ограниченной их финансовыми ресурсами. При взаимодействии двух указанных групп участников рынка и возникают равновесные цены на реализуемые товары. Третьим из официальных партнеров по рынку является государство. Оно устанавливает определенные правила отношений между производителями и потребителями в торговле друг с другом и взимает налоги с продавцов в виде некоторой части от полученной денежной выручки за проданный товар или оказанную услугу. Тем самым государство, ставя продавцов и покупателей в определенную зависимость, опосредованно влияет на установление ценовой ситуации на рынке.

Очевидно, что каждая из указанных трех сторон-участников рынка оказывает свое специфическое влияние на изменение рыночных цен. Для анализа происходящих событий удобно применить качест-венную оценку такого влияния. Используемые в работе [1] понятия экономических сил позволяют не только построить подходящую этому случаю математическую модель, но и провести необходимые исследования динамических характеристик цены и объема продаж. Тем самым становится возмож-ным взвесить вклад каждой стороны или отдельного ее участника в ценовую политику. Возникнове-ние подобных экономических сил продиктовано желанием групп людей или индивидуумов достичь своих целей.

В настоящей работе построена математическая модель выпуска продукции и его цены на рынке товаров и услуг во времени и исследования устойчивости экономического равновесия. Конструкция модели основывается на учете характеров взаимодействия основных участников торговли – продавцов и покупателей, а также на учете эффектов от вмешательства внешних структур. При построении модели будем исходить из следующих допущений относительно производства и торговли [1].

1.1. *Рынок*. На каждый товар «действуют» *экономические силы*, порожденные суммарным воздействием участников рынка, способных изменить его цену в ту или иную сторону. К ним относятся следующие силы:

F_V – продавца, возникающая из его желания вести торговлю оптимальным образом, предлагая товар по цене выше себестоимости;

F_D – воздействия покупателей на цену в соответствии с законом спроса;

F_G – отражающая эффект оказываемого влияния на цену со стороны правительства (государственные налоги и законодательные акты, различные непредвиденные выплаты и т. п.).

2. *Выпуск продукции*. Будем исходить из того, что на изменение объема продаж влияют три экономические силы:

$F_П$ – отклонения цен (или закон спроса) [1];

F_M – отклонения объемов продаж (эффект насыщения) [1];

F_C – взаимодействия издержек производства и объема продаж.

К общим требованиям как для производства, так и для торговли отнесем следующие предположения [1].

1) Имеет место *принцип независимости действия экономических сил*. Результат изменения цены товара или услуги под действием этих сил эквивалентен суммарному воздействию «приложенных» к ним экономических сил.

2) Все действующие на рынке экономические силы приходят в равновесие. Другими словами, в каждый момент времени существует величина объема выпуска и значение цены предлагаемого товара или услуги, при которых планы покупателей и продавца полностью совпадают.

Выполняется следующий закон: *скорость изменения цены товара или услуги (соответственно величины объема продаж) пропорциональна взвешенной сумме всех действующих экономических сил*.

2. Экономические силы. В соответствии с обозначениями [1] положим: $p(t)$ – агрегированная цена единицы товара или услуги в момент времени t; p^0 – равновесная цена; $q(t)$ – количество единиц товара, реализуемого в момент t; q^0 – равновесное количество единиц товара или услуги; p^* – нижнее, пороговое, значение цены товара, связанное с осуществленными затратами со стороны продавца; p^{**} – верхнее, потолочное, значение цены, выше которого покупатели отказываются приобретать данный товар или услугу; $p' = p^0 - p^*$ – излишек цены продавца; $p'' = p^{**} - p^0$ – излишек цены покупателей.

2.1. *Влияние производителей и потребителей*. На основании введения экономических сил продавцов (F_V) и покупателей (F_D) [1] используем функциональную зависимость таких сил согласно следующим формулам:

$$F_V(p^*, p^0, p) = -\frac{vp'(p - p^0)}{p - p^*},\ \ p > p^*;\ \ F_D(p^{**}, p^0, p) = -\frac{dp''(p - p^0)}{p^{**} - p},\ \ p < p^{**},$$

где $v > 0$ и $d > 0$ – постоянные параметры, характеризующие степень реакции продавцов и покупателей соответственно на отклонение цены от равновесного значения p^0.

2.2. *Построение модели выпуска продукции.* Для создания модели, как и в [1], определим экономические силы, воздействующие на скорости $\dot{q}$ переменной объема продаж q.

Выделим экономическую силу, соответствующую учету информации об издержках производства продукции в стоимостном выражении. Точнее, используем механизм нащупывания производителем точки равновесия между ценой и предельными издержками по выпуску. Предполагается, что равновесие постоянно нарушается и поэтому необходимо корректировать объем производства. При этом обычно руководствуются известным экономическим принципом (см., например, работу [2]). Пусть величина $C(q)$ означает производственные издержки (в стоимостном выражении), связанные с выпуском q единиц продукции. Если цена выше изменения издержек $C'(q)$, то прибыль производителя $(pq - C(q))$ растет при увеличении выпуска, а значит, выгодно наращивать производство; в противном случае следует сокращать производственную активность.

Соответствующую этому экономическую силу предлагаем выразить формулой

$$F_C(C) = \sigma q^0 \left(p - C'(q)\right) / p^0,\ \sigma > 0,$$

где σ – коэффициент интенсивности этой силы.

Ясно, что в точке экономического равновесия такая сила равна нулю:

$$p^0 = C'(q^0). \tag{1}$$

Поскольку эта сила вводится впервые, дадим ее неформальное пояснение.

Под *экономической силой влияния эффекта взаимодействия издержек производства и величины выпуска продукции* будем понимать *определенный пакет конкретных намерений, средств и действий или координационных механизмов решения проблемы выгоды в соотношении производство – реализация данного товара или услуги.*

Такая сила зависит от нижнего (q^*) и верхнего (q^{**}) значений объемов выпуска q, связанных с рентабельностью масштабов производства и производственными возможностями предприятия.

2.3. *Влияние государства.* Роль правительства в формировании ценовой ситуации рынка, как и в [1], выражаем существованием экономической силы (функции F_G), зависящей от величин p, p^0, q и q^0 и прямо пропорциональной доходу предприятия. В отличие от работы [1] учтем влияние издержек для данной модели, положив

$$F_G(p, p^0, q, q^0) = r(pq - C(q) - p^0q^0 + C(q^0)) / q^0,$$

где r – постоянный коэффициент, отражающий процент обязательных выплат продавцом товара или услуги внешним структурам. Такая сила означает: чем больше доход $(pq - qC(q))$ от продажи q единиц товара по цене p, тем больше величина силы, способная поднимать цену на этот товар.

3. Математическая модель рынка. При формировании математической модели экономики используем изложенные принципы построения уравнений динамики с учетом введенных экономических сил и формулы издержек. Опираясь на [1], приходим к следующей системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{p} = -\dfrac{\nu p'(p-p^0)}{p-p^*} - \dfrac{dp''(p-p^0)}{p^{**}-p} + \dfrac{r}{q^0}(pq - C(q) - p^0q^0 + C(q^0)), \\ \dot{q} = -g\dfrac{q^0}{p^0}(p-p^0) - m(q-q^0) + \sigma\dfrac{q^0}{p^0}\left(p - C'(q)\right), \end{cases} \tag{2}$$

определенной в области $p^* < p < p^{**}$, $p^* < p^0 < p^{**}$, $q^* \le q \le q^{**}$, $q^* \le q^0 \le q^{**}$. Здесь $\nu > 0$, $d > 0$, $r > 0$, $g \ge 0$, $m \ge 0$, $\sigma > 0$ – параметры модели, характеризующие интенсивности экономических сил, экономический смысл которых дан в [1].

Как и в работе [2], будем считать, что в стоимостном выражении издержки определяются квадратичной функцией выпуска

$$C(q) = p^0\left(\frac{a}{q^0}q^2 + (1-2a)q + \frac{C_0}{p^0}\right),\ q^* \le q \le q^{**}, \tag{3}$$

где a – параметр издержек, а C_0 – изначальные издержки модели. Эта функция удовлетворяет условию экономического равновесия (1). Напомним [2], что $a < 0$ означает позитивный эффект масштабов производства. При $a > 0$ производство является ресурсоемким, а именно рост издержек опережает производство (т. е. в системе доминирует закон падающей отдачи факторов производства).

Вычисляя производную функции издержек, для слагаемых второго уравнения системы (2) можем записать

$$\sigma\frac{q^0}{p^0}\left(p - C'(q)\right) = \sigma\frac{q^0}{p^0}\left(p - p^0\left(\frac{2a}{q^0}q + (1-2a)\right)\right) =$$

$$= \sigma\frac{q^0}{p^0}\left(p - p^0 - 2p^0a\left(\frac{1}{q^0}q - 1\right)\right) = \sigma\frac{q^0}{p^0}\left(p - p^0 - 2p^0a\frac{q-q^0}{q^0}\right) =$$

$$\sigma\frac{q^0}{p^0}(p-p^0) - 2a\sigma(q-q^0) = \sigma q^0\left(\frac{p-p^0}{p^0} - 2a\frac{q-q^0}{q^0}\right);$$

$$pq - C(q) - p^0q^0 + C(q^0) = pq - p^0\left(\frac{a}{q^0}q^2 + (1-2a)q + \frac{C_0}{p^0}\right) - p^0q^0 + C(q^0) =$$

$$= pq - p^0q^0 - p^0\left(\frac{a}{q^0}q^2 + (1-2a)q + \frac{C_0}{p^0}\right) + p^0\left(aq^0 + (1-2a)q^0 + \frac{C_0}{p^0}\right) =$$

$$= pq - p^0q^0 - p^0\left(\frac{a}{q^0}q^2 + (1-2a)q\right) + p^0\left(aq^0 + (1-2a)q^0\right) =$$

$$= pq - p^0q^0 - \frac{ap^0}{q^0}(q^2 - (q^0)^2) - p^0(1-2a)(q - q^0) =$$

$$= pq - p^0q^0 - \frac{ap^0}{q^0}(q - q^0)(q + q^0) - p^0(1-2a)(q - q^0) =$$

$$= q^0(p - p^0) + p^0(q - q^0) + (p - p^0)(q - q^0) - p^0(q - q^0)\left(\frac{a}{q^0}(q + q^0) + (1-2a)\right).$$

Таким образом, для функции (3) математическая модель имеет вид

$$\begin{cases} \dot{p} = -\dfrac{vp'(p - p^0)}{p - p^*} - \dfrac{dp''(p - p^0)}{p^{**} - p} + \\ +rp^0\left(\dfrac{p - p^0}{p^0} + \dfrac{p - p^0}{p^0}\dfrac{q - q^0}{q^0} - \dfrac{q - q^0}{q^0}\left(\dfrac{a}{q^0}(q + q^0) - 2a\right)\right), \\ \dot{q} = -q^0(g - \sigma)\dfrac{p - p^0}{p^0} - (m + 2a\sigma)(q - q^0), \end{cases} \tag{4}$$

$$p^* < p < p^{**},\ q^* \le q \le q^{**}.$$

Очевидно, точка $p = p^0$, $q = q^0$ является равновесием этой системы. Для исследования ее устойчивости удобно сделать замену переменных по формулам $x = (p - p^0)/p^0$ и $y = (q - q^0)/q^0$. Тогда приходим к новой системе уравнений относительно компонент вектора (x, y), не имеющих физических размерностей:

$$\begin{cases} \dot{x} = -\dfrac{vp'x}{p^0(\overline{p} + x)} - \dfrac{dp''x}{p^0(\overline{\overline{p}} - x)} + rx + ry\left(x - ay\right), \\ \dot{y} = -(g - \sigma)x - (m + 2a\sigma)y, \end{cases} \quad -\overline{p} < x < \overline{\overline{p}},\ -\overline{q} \le y \le \overline{\overline{q}}, \tag{5}$$

где положено $\overline{p} = p'/p^0$, $\overline{\overline{p}} = p''/p^0$, $\overline{q} = q'/q^0$, $\overline{\overline{q}} = q''/q^0$, а экономическому равновесию $p = p^0$, $q = q^0$ соответствует точка покоя $x = 0$, $y = 0$.

4. Состояния равновесия модели. Равновесия модели определяются решениями системы уравнений (4) (или (5)), где правые части обращаются в нуль. Несложный анализ правых частей системы показывает, что при определенных соотношениях между параметрами модели в такой экономической системе возможно одно, два или три состояния покоя. При этом равновесия (x^*, y^*), отличные от исследуемой точки (0,0), связаны условием: $y^* = -\dfrac{g - \sigma}{m + 2a\sigma}x^*,\ < -\overline{p} < x^* < \overline{\overline{p}}.$

5. Линейная модель. Разложив правую часть системы (5) в ряд Тейлора в окрестности начала координат, приходим к линейной модели

$$\begin{cases} \dot{x} = -(v + d - r)x\ , \\ \dot{y} = -(g - \sigma)x - (m + 2a\sigma)y, \end{cases} \quad -\overline{p} < x < \overline{\overline{p}},\ -\overline{q} \le y \le \overline{\overline{q}}. \tag{6}$$

Корни характеристического уравнения этой системы вещественны и представляются выражениями: $\lambda_1 = -(v + d - r)$, $\lambda_2 = -(m + 2a\sigma)$. Поэтому условия асимптотической устойчивости нулевого решения системы (6) определяются неравенствами [3]:

$$r < v + d;\ m + 2a\sigma > 0. \tag{7}$$

При выполнении этих условий начало координат – особая точка типа «устойчивый узел» (см., например, [1, гл. 1]).

Отметим некоторые выводы экономического характера:

- *закон спроса не оказывает влияния на устойчивость торговли, поскольку условия* (7) *не зависят от коэффициента g*;
- *устойчивость экономического равновесия может быть обеспечена двумя фактами: уровнем налоговой ставки* (*коэффициент r*) *и экономической силой влияния эффекта взаимодействия издер-*

жек производства и величины выпуска продукции (*коэффициент* σ), *поскольку параметры v*, *d и m положительны*;

- *эффект насыщения* (*коэффициент m*), *а также интенсивности экономических сил продавцов и потребителей* (*коэффициенты v и d*) *играют стабилизирующую роль для устойчивого развития рынка*, *а именно их рост влечет увеличение скорости сходимости к равновесию*.

Кроме того, в силу специфики модели (6) (такие системы называются треугольными) можно утверждать, что начало координат асимптотически устойчиво или неасимптотически устойчиво относительно координаты x (т. е. относительно цены p) тогда и только тогда, когда $r < v + d$ или $r = v + d$ соответственно; при $r > v + d$ исследуемое равновесие неустойчиво относительно цены p.

Если имеет место одно из следующих условий:

$$r = v + d;\ m + 2a\sigma > 0 \text{ либо } r < v + d;\ m + 2a\sigma = 0, \tag{8}$$

то экономическое равновесие устойчиво неасимптотически.

В остальных случаях равновесие неустойчиво.

Замечание 1. Для нелинейной модели (4) ситуации (8) соответствуют критическим случаям [3]. В силу известной теоремы об устойчивости по первому приближению [1] указанные утверждения об асимптотической устойчивости и неустойчивости в некритических случаях справедливы и для исходной нелинейной системы (4). Отметим также, что в некритическом случае особая точка «устойчивый узел» для линейной системы имеет тот же тип и для нелинейной системы.

6. Случай $g = \sigma$, $m + 2a\sigma \neq 0$. Эта ситуация характеризуется тем, что цена не оказывает существенного влияния на изменение величины выпуска продукции (например, товары повседневного спроса). Модель принимает вид уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = -f(x) + ry\left(x - ay\right), \\ \dot{y} = -(m + 2a\sigma)y, \end{cases} \tag{9}$$

где положено $f(x) = \left(\dfrac{vp'}{p^0(\bar{p} + x)} + \dfrac{dp''}{p^0(\bar{\bar{p}} - x)} - r\right)x.$

Для данного случая функция Ляпунова $V(y) = y^2$ имеет при условии $m + 2a\sigma > 0$ знакоотрицательную производную по времени $\dot{V}(y) = -(m + 2a\sigma)y^2.$ Более того, на множестве, где $\dot{V}(y) = 0,$ система (9) описывается дифференциальным уравнением $\dot{x} = -f(x).$ Поэтому легко видеть, что согласно теореме 2.8 [1, гл. 1] нулевое решение системы (9) будет глобально асимптотически устойчивым, если выполнено неравенство

$$f(x)x > 0,\ x \neq 0,\ -\bar{p} < x < \bar{\bar{p}}. \tag{10}$$

Нарушение условия (10) происходит, начиная с существования отличного от нуля корня уравнения $\varphi(x) \equiv \dfrac{vp'}{p^0(\bar{p} + x)} + \dfrac{dp''}{p^0(\bar{\bar{p}} - x)} - r = 0$ на отрезке $-\bar{p} < x < \bar{\bar{p}}$. Вычисления показывают, что производная $\varphi'(x)$ функции $\varphi(x)$ обращается в нуль в точке ее минимума, равной

$$x^* = \frac{\bar{\bar{p}}\sqrt{v\,\bar{p}} - \bar{p}\sqrt{d\,\bar{\bar{p}}}}{\sqrt{v\,\bar{p}} + \sqrt{d\,\bar{\bar{p}}}} \equiv \frac{p''\sqrt{vp'} - p'\sqrt{dp''}}{p^0\left(\sqrt{vp'} + \sqrt{dp''}\right)} \in \left]-\bar{p}, \bar{\bar{p}}\right[.$$

Этот минимум определяется величиной $\varphi(x^*) = \left(\sqrt{vp'} + \sqrt{dp''}\right)^2 / \left(p' + p''\right) - r.$ Нетрудно убедиться в том, что имеет место неравенство $v + d > \left(\sqrt{vp'} + \sqrt{dp''}\right)^2 / (p' + p''),$ и, следовательно, если $0 < r < \left(\sqrt{vp'} + \sqrt{dp''}\right)^2 / (p' + p''),$ то $\varphi(x) > 0\quad \forall x \in]-\bar{p}, \bar{\bar{p}}[,$ а значит, в этом случае неравенство (10) всегда выполняется.

При $m + 2a\sigma < 0$ экономическое равновесие очевидно неустойчиво.

При $m + 2a\sigma = 0$ равновесие устойчиво неасимптотически относительно координаты y. Если, кроме того, $v + d - r > 0$, то неасимптотическая устойчивость будет иметь место и для состояния равновесия (0,0).

При $m + 2a\sigma = 0$ и $v + d - r < 0$ экономическое равновесие неустойчиво.

7. Критические случаи. Исследуем ситуации (8), когда один из корней характеристического уравнения системы первого приближения (6) равен нулю.

7.1. *Случай* $g \neq \sigma,\ m + 2a\sigma = 0$. Экономически эта ситуация характеризуется тем, что произведенные ранее потребителями закупки не влияют на последующий спрос данного товара или услуги. Система принимает вид

$$\begin{cases} \dot{x} = -f(x) + ry\left(x - ay\right), \\ \dot{y} = -(g-\sigma)x. \end{cases}$$

Сделаем здесь замену переменных $x = x,\ z = (g-\sigma)x - Sy$, где $S = v + d - r$ – запас прочности рынка [1]. Тогда $y = ((g-\sigma)x - z)/S$ и мы получим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = -f(x) + r((g-\sigma)x - z)\left(x - a((g-\sigma)x - z)/S\right)/S, \\ \dot{z} = (g-\sigma)\left(Sx - f(x) + r((g-\sigma)x - z)\left(x - a((g-\sigma)x - z)/S\right)\right)/S, \end{cases}$$

в которой второе уравнение уже не содержит линейного члена переменной x.

Согласно алгоритму исследования критического случая одного нулевого корня [3] ищем функцию в виде ряда $x = \alpha z + \beta z^2 + \ldots$ из уравнения в неявных функциях

$$-f(x) + r((g-\sigma)x - z)\left(x - a((g-\sigma)x - z)/S\right)/S = 0.$$

Подставляя сюда искомый ряд, находим $\alpha = 0,\ \ \beta = -ar/S^3$. Теперь, подставляя выражение $x = \alpha z + \beta z^2 + \ldots$ с найденными коэффициентами $\alpha, \beta, \ldots$ во второе (критическое) уравнение предыдущей системы, получаем скалярное дифференциальное уравнение $\dot{z} = (g-\sigma)\left(-arz^2/S^2 + o(z^2)\right)$, где $o(z^2)$ означает слагаемые более высокого порядка малости, чем z^2 при $z \to 0$. Так как в правой части этого уравнения первый отличный от нуля коэффициент разложения по z стоит при четной степени, то с учетом требований $g \neq \sigma,\ m + 2a\sigma = 0$ это означает неустойчивость начала координат [3].

7.2. *Случай* $r = v + d,\ m + 2a\sigma > 0$. Мы имеем критический случай одного нулевого корня. Отметим, что здесь справедливо равенство $f(x) = -x^2 H_1 + x^3 H_2 - o(|x|^3)$, где использованы следующие обозначения:

$$H_1 = \frac{v}{\overline{p}} - \frac{d}{\overline{\overline{p}}},\ \ H_2 = \frac{v}{(\overline{p})^2} + \frac{d}{(\overline{\overline{p}})^2}.$$

Поэтому в окрестности начала координат система принимает вид уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 H_1 + (v+d)y\left(x - ay\right) - x^3 H_2 + o(|x|^3), \\ \dot{y} = -(g-\sigma)x - (m + 2a\sigma)y. \end{cases} \tag{11}$$

Процедура исследования данного критического случая [3] предлагает рассмотреть первое из уравнений (критическое уравнение) при условии, что y как функция переменной x определяется соотношениями

$$-(g-\sigma)x - (m + 2a\sigma)y = 0 \ \Leftrightarrow \ y = -\frac{g-\sigma}{m + 2a\sigma}x.$$

В результате приходим к дифференциальному уравнению одной переменной

$$\dot{x} = x^2\left(H_1 - \frac{(v+d)(g-\sigma)(m + a(g+\sigma))}{(m+2a\sigma)^2}\right) - x^3 H_2 + o(|x|^3).$$

Отсюда получаем утверждение об устойчивости экономического равновесия [3]:

- если $\dfrac{v}{\overline{p}} - \dfrac{d}{\overline{\overline{p}}} - \dfrac{(v+d)(g-\sigma)(m + a(g+\sigma))}{(m+2a\sigma)^2} = 0$, то так как $H_2 > 0$, то экономическое равновесие асимптотически устойчиво;
- если же $\dfrac{v}{\overline{p}} - \dfrac{d}{\overline{\overline{p}}} - \dfrac{(v+d)(g-\sigma)(m + a(g+\sigma))}{(m+2a\sigma)^2} \neq 0$, то равновесие неустойчиво.

7.3. *Случай* $r = v + d,\ m + 2a\sigma = 0$. Здесь оба корня характеристического уравнения системы первого приближения равны нулю. Модель (11) описывается уравнениями

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 H_1 + (v+d)y\left(x - ay\right) - x^3 H_2 + o(|x|^3) \ , \\ \dot{y} = -(g-\sigma)x. \end{cases}$$

Сделав замену переменной $z = -y/(g-\sigma)$, приходим к системе

$$\begin{cases} \dot{x} = x^2 H_1 - (v+d)(g-\sigma)\left(zx + a(g-\sigma)z^2\right) - x^3 H_2 + o(|x|^3), \\ \dot{z} = x. \end{cases}$$

Опираясь на теорему 3 [4, с. 35] относительно исследования критического случая с двумя нулевыми корнями, убеждаемся, что нулевое решение неустойчиво.

В результате проведенных исследований получили следующее утверждение.

Теорема. Экономическое равновесие $p = p^0$, $q = q^0$ модели (4) является:

- *глобально асимптотически устойчивым*, если

1) $m + 2a\sigma > 0,\ g = \sigma,\ r < \dfrac{\left(\sqrt{vp'} + \sqrt{dp''}\right)^2}{p' + p''}$;

- *асимптотически устойчивым* в каждом из следующих случаев:

2) $r < v + d$; $m + 2a\sigma > 0$;

3) $r = v + d,\ m + 2a\sigma > 0,\ \dfrac{v}{\overline{p}} - \dfrac{d}{\overline{\overline{p}}} = \dfrac{(v+d)(g-\sigma)(m + a(g+\sigma))}{(m+2a\sigma)^2}$;

- *неасимптотически устойчивым*, если

4) $r < v + d$, $m + 2a\sigma = 0,\ g = \sigma$;

- *неустойчивым* в каждом из следующих случаев:

5) $r > v + d$;

6) $m + 2a\sigma < 0$;

7) $r < v + d,\ m + 2a\sigma = 0,\ g - \sigma \neq 0$;

8) $r = v + d,\ m + 2a\sigma > 0,\ \dfrac{v}{\overline{p}} - \dfrac{d}{\overline{\overline{p}}} \neq \dfrac{(v+d)(g-\sigma)(m + a(g+\sigma))}{(m+2a\sigma)^2}$;

9) $r = v + d,\ m + 2a\sigma = 0$.

Общий вывод проведенного исследования устойчивости равновесия (условия 1) – 9)) сводится к следующему. Благоприятный климат функционирования рынка может быть обеспечен, во-первых, относительно невысокой налоговой ставкой (коэффициент r), во-вторых, уровнем влияния издержек на выпуск продукции (коэффициент σ). При этом в благоприятном случае изучаемая точка покоя имеет тип «устойчивый узел», а значит, в системе отсутствуют колебательные движения. Следовательно, в случае асимптотической устойчивости сходимость к равновесию носит регулярный характер.

Глобальная асимптотическая устойчивость экономического равновесия возможна лишь в том случае, когда изменение выпуска продукции не зависит от цены ($g - \sigma = 0$). Такая ситуация означает определенное равновесие между силой действия закона спроса и экономической силой взаимодействия издержек производства и величины выпуска продукции.

1. Калитин Б.С. Математические модели экономики. Мн., 2007.

2. Балацкий Е.В. Издержки и полезность как факторы ценообразования // Вестн. МГУ. Сер. 6. Экономика. 2000. № 4. С. 37.

3. Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. М., 1966.

4. Каменков Г.В. Устойчивость движения. Колебания. Аэродинамика: в 2 т. М., 1972. Т. 1.

Поступила в редакцию 13.04.11.

Борис Сергеевич Калитин – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры методов оптимального управления.

Татьяна Борисовна Сущ – ведущий инженер Главного управления платежной системы Национального банка Республики Беларусь.