

# КОМПЬЮТЕРНАЯ АНИМАЦИЯ В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ И КОНЦЕПТУАЛЬНОЕ ПОНИМАНИЕ

С. И. Сергеев

---

Национальный институт образования

Минск, Беларусь

E-mail: innovation@tut.by

В статье рассматриваются вопросы создания новых компьютерных инструментов для обучения математике в средней школе. Эти инструменты в значительной степени основаны на компьютерной анимации с использованием динамического связывания объектов разного рода. Представлена серия интерактивных компьютерных моделей, спроектированных с учетом анализа когнитивных трудностей, возникающих при изучении тригонометрии. Работа с моделями помогает установить устойчивые связи – ассоциации между математическими объектами, образующими сложную систему, что способствует концептуальному пониманию учеником базиса тригонометрии.

*Ключевые слова:* компьютерная анимация, компьютерные интерактивные модели, тригонометрия.

## ВВЕДЕНИЕ В ПРОБЛЕМУ

Исследования по использованию анимации в обучении установили тесную зависимость эффективности ее применения от контента, то есть содержания изучаемого материала и способов представления знаний [6, с. 10]. Поэтому сначала проведем анализ объективно трудной для изучения области школьной математики – тригонометрии, в которой, по нашему мнению, использование компьютерной анимации может принести существенную пользу.

Остановимся на ключевых для концептуального понимания базиса курса тригонометрии функциях синуса и косинуса. Рассмотрим, как они определяются в математике, имея в виду научную, а не учебную дисциплину. Пусть  $R^+$  – аддитивная группа поля вещественных чисел  $R$ ,  $C^*$  – мультипликативная группа поля комплексных чисел  $C$ . В  $C$  возьмем окружность единичного радиуса  $S$ , которая, очевидно, является подгруппой  $C^*$ . Рассмотрим непрерывный гомоморфизм  $e: R^+ \rightarrow S$ , такой, что  $e(2\pi) = 1$ . Это так называемая экспонента с основанием  $2\pi$ , обычно обозначаемая через  $e_{2\pi}$ . Синус и косинус определяются из диаграммы [3, с. 50] (рис. 1)

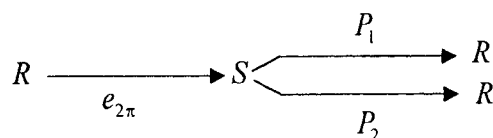


Рис. 1. Определение синуса и косинуса

то есть  $\cos x = P_1(e_{2\pi}(x))$ ,  $\sin x = P_2(e_{2\pi}(x))$ , где  $P_1$  и  $P_2$  – естественные проекции из  $C$  в  $R$ .

Мы не рассматриваем, естественно, другие определения тригонометрических функций, например, при помощи степенных рядов, дифференциальных уравнений, как не относящихся к школьной математике. Гомоморфизм  $e_{2\pi}$  «наматывает» прямую на окружность, не растягивая при этом прямую. Равенство  $e_{2\pi}(0)=1$  определяет начальную точку наматывания: положение «три часа» для часовой стрелки.

С психолого-педагогической точки зрения правильное формирование понятий синуса и косинуса, несомненно, представляет значительные трудности для учащихся и преподавателей. Природа этих трудностей заключается в том, что ученику необходимо осознать новую «непривычную модель (числовая окружность) и непривычный способ введения функции (синус как ордината, косинус как абсцисса точки числовой окружности) ... Более того, на самом деле школьникам приходится изучать не одну, а две новые модели: первая – собственно числовая окружность, а вторая – числовая окружность на координатной плоскости» [1, с. 9]. Добавим к этому еще числовую прямую для числового аргумента функции, а также еще одну координатную плоскость для построения графиков функций. Ученику необходимо: 1) не только познакомиться со всеми этими математическими объектами и понять, как они устроены; 2) осознать, хотя бы на эмпирическом уровне причину, заставившую ввести эти новые объекты в рассмотрение; 3) но, что самое важное, он должен установить и «прочувствовать» отношения, связывающие эти объекты и объединяющие их в некоторую систему, формализованную диаграммой (рис. 1.); 4) ученику также необходимо интегрировать в новую схему полученные ранее знания о тригонометрических функциях острых углов.

По нашему мнению, выполнение этих условий ведет к тому, что можно назвать концептуальным пониманием учеником базиса тригонометрии, на основе которого естественным образом строится теория тригонометрических уравнений, неравенств, обратных функций и т. д.

Чтобы понять, каким образом компьютерная анимация может помочь ученику преодолеть означенные трудности, рассмотрим некоторые психолого-педагогические аспекты проблемы, отмеченные К. М. Бескиным в [2].

1. Недостаточное внимание к тригонометрическим функциям числового аргумента приводит к тому, что ученик считает эти функции «обязательно функциями угла... Школьник смотрит совсем по-разному на функции  $\lg x$  и  $\sin x$ ; он понимает, что значит логарифм числа, но не понимает, что значит синус числа». В этой ситуации ученик неизбежно столкнется с когнитивными трудностями. «Как, например, можно рассматривать функцию  $y = x + \sin x$ , если  $x$  считать углом, а  $\sin x$  – отвлеченной величиной? ... Как понимать выражение  $\sin(x^2)$ , если рассматривать только синус угла? Придется приписать  $x$  размерность «квадратный корень из угла»» [2, с. 11–12].

2. «Трудности, возникающие в начале гониометрии, носят чисто психологический характер. Они заключаются не в логических тонкостях, а в том, что надо усвоить большое количество связей, относящихся к определению тригонометрических функций. При этом их надо не просто усвоить, а усвоить абсолютно прочно. Ассоциации, связанные с изменениями тригонометрических функций при изменении угла, должны быть чрезвычайно прочны. Ученик должен представлять ход тригонометрических функций при изменении угла быстро, безошибочно и без всякого обращения к каким-либо рассуждениям... Если ассоциации, связанные с тригонометрическими функциями будут недостаточно прочны, то это явится тормозом для всего курса тригонометрии. Выработка этих ассоциаций – самая ответственная задача учителя. При [их] недостаточной прочности дальнейшее изуче-

ние тригонометрии обречено на неуспех» [2, с. 29–30]. Мы позволили себе привести достаточно длинную цитату из книги К. М. Бескина [2], поскольку в ней очень точно сформулирована педагогическая задача, стоящая перед учителем. Для ее решения мы предложили новые компьютерные инструменты, реализованные в программно-методическом комплексе «Алгебра – 10» [4].

## КОМПЬЮТЕРНАЯ АНИМАЦИЯ В ТРИГОНОМЕТРИИ

1. Поскольку модель числовой окружности на координатной плоскости играет ключевую роль в определении тригонометрических функций, то для всестороннего знакомства с ней нами разработана серия компьютерных интерактивных тренажеров. Ученику предлагается: 1) найти на числовой окружности точки, соответствующие заданным числам, причем необязательно выраженным в долях числа  $\pi$ ; 2) по заданному числу найти абсциссу или ординату соответствующей точки; 3) по одной из декартовых координат найти одну или две точки окружности; 4) по двум координатам найти точку окружности. Ученик может пользоваться подсказкой, правильность ответа проверяется немедленно, количество правильных ответов и ошибок фиксируется.

Для формирования устойчивой связи – ассоциации между числовой прямой и числовой окружностью разработаны две компьютерные интерактивные модели:

а) первая модель (рис. 2) фактически является прямой анимацией гомоморфизма  $e_{2\pi}$ . Прямая «наматывается» на окружность. Ученик может регулировать скорость «наматывания», фиксировать на прямой точки с тем, чтобы определить их образ на числовой окружности;

б) вторая модель (рис. 3) в одном режиме (стрелка вверх) задает гомоморфизм  $e_{2\pi}$ , а в другом (стрелка вниз) – обратное ему многозначное отображение.

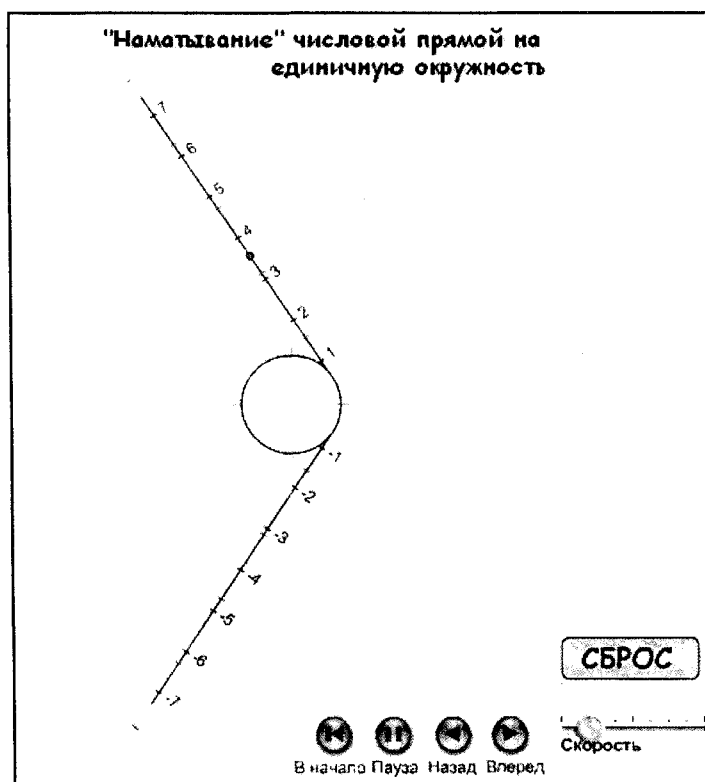


Рис. 2



Рис. 3

Важной особенностью является то, что в качестве прообразов и образов этих отображений могут рассматриваться не только точки, но также отрезки и дуги. В конструкции этой модели применен так называемый принцип динамического связывания: в каждом из отображений образ и прообраз зависимы, то есть изменение положения прообраза ведет к изменению образа. Принцип динамического связывания несет важную дидактическую функцию формирования устойчивых связей – ассоциаций между изучаемыми объектами.

Отметим, что две описанные модели вместе с моделью, в которой фиксируются декартовы координаты точек числовой окружности, позволяют ввести определение тригонометрических функций без явной апелляции к понятию угла.

2. Следующая компьютерная интерактивная анимация (рис. 4) должна помочь ученику установить связь между двумя координатными плоскостями, на одной из которых расположена числовая окружность, а на другой строятся графики тригонометрических функций.

Эта модель может быть использована как для демонстрации на уроке в режиме простой анимации, так и во время индивидуальной работы ученика в компьютерном классе в интерактивном режиме.

Таким образом, рассматриваемый набор компьютерных моделей и тренажеров позволяет изучить все объекты диаграммы (рис. 1), установить между ними существенные связи – ассоциации. Пожалуй, самое важное, что работа с интерактивными компьютерными моделями поможет ученику сформировать устойчивые ментальные образы, которые будут служить ему опорой в дальнейшем.

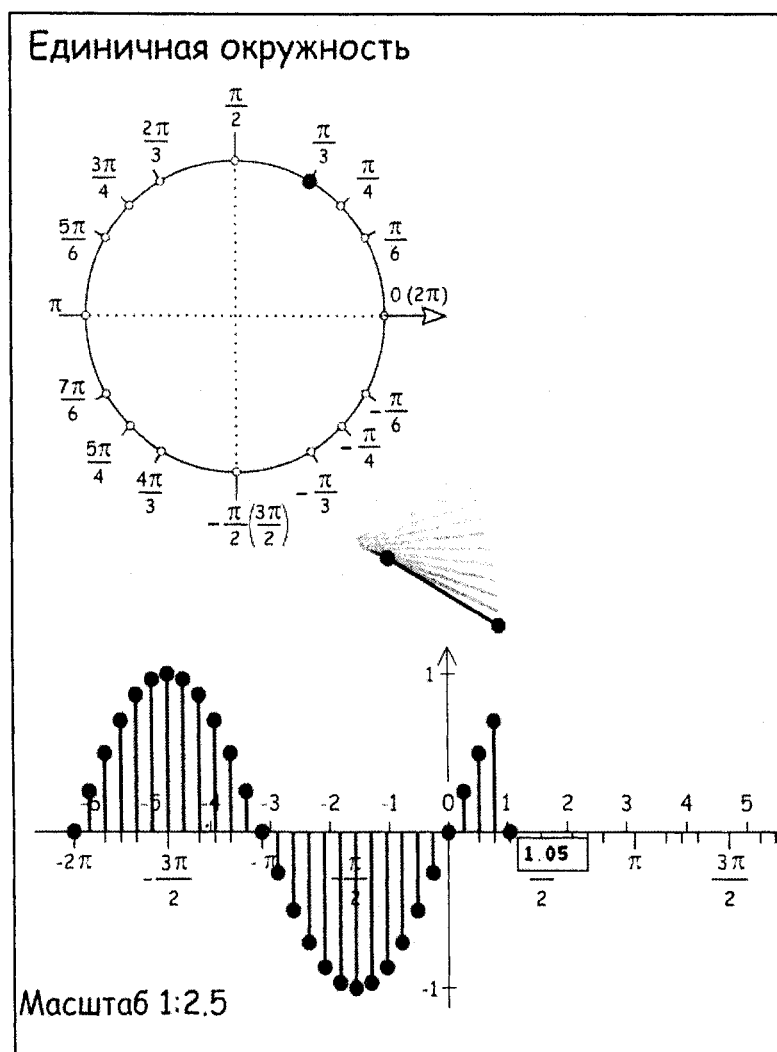


Рис. 4

Отдельно рассмотрим вопрос мотивации. В ПМК «Алгебра – 10» содержатся компьютерные модели механизмов, «оправдывающих» необходимость изучения движения точки по окружности. Это модель поршневого двигателя и модель, имитирующая работу передачи. Кроме этого, имеется компьютерная модель, позволяющая при помощи сложения трех синусоид получать нетривиальные графики периодических функций, например, «кардиограммы».

Одним из преимуществ компьютерной анимации перед статической графикой является возможность использования чувственного опыта самих учащихся при объяснении сложных тем. Например, изображенная на рис. 5 модель хорошо иллюстрирует тот факт, что не всегда положение точки на окружности определяет состояние некой системы. Важно и то, каким образом эта точка заняла свое положение. Таким образом, «оправдывается» не только введение понятия угла поворота, но и становится понятно, зачем вводить для этих углов разные знаки с учетом их направления.

## Угол вращения

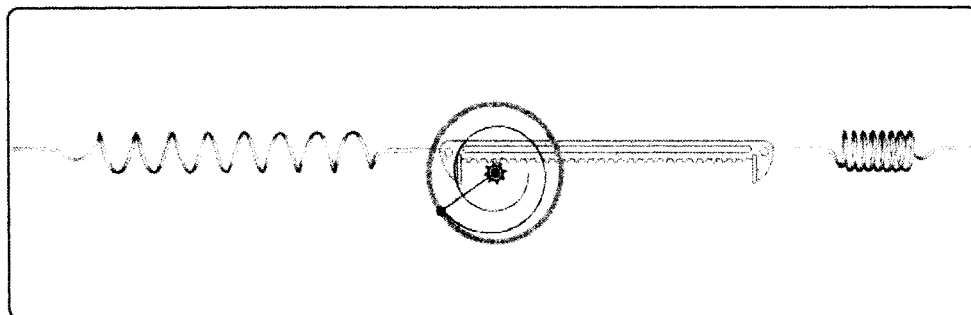


Рис. 5

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Тригонометрия – это та область школьной математики, где концептуальное понимание базисных идей и связей играет исключительную роль в успешном овладении материалом. Хорошо усвоив эти идеи, ученики будут иметь гораздо меньшие трудности с пониманием природы тригонометрических уравнений, неравенств, обратных функций. В частности, не вызовет страха сам вид выражения  $\sin(\arcsin x)$ , как это часто бывает у учеников, которые усвоили понятия формально. Опыт использования компьютерных интерактивных моделей показывает, что компьютерная анимация в сочетании с интерактивностью способна существенным образом улучшить понимание учениками тригонометрии. Ранее нами было показано, как применение специально сконструированных компьютерных инструментов может повлиять на методику формирования новых понятий [5]. Отметим, что компьютерная анимация может сыграть важную роль при изучении таких важных тем, как «функции», «преобразования графиков» и т. д., что заслуживает отдельной публикации.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Мордкович, А. Г. Алгебра и начала анализа. 10–11 кл.: метод. пособие для учителя / А. Г. Мордкович. – М. : Мнемозина, 2001. – 143 с.
2. Бескин, Н. М. Вопросы тригонометрии и ее преподавания / Н. М. Бескин. – М. : Учпедгиз, 1950. – 140 с.
3. Любецкий, В. А. Основные понятия элементарной математики / В. А. Любецкий. – М. : Айрис-пресс, 2004. – 624 с.
4. Алгебра – 10. – Минск : Инфотриумф, 2004.
5. Сергеев, С. И. Формирование понятия периодической функции с использованием компьютерных моделей / С. И. Сергеев // Матэматыка. Праблемы выкладання. – 2004. – № 4(37). – С. 3–16.
6. Lowe, R. Beyond «eye-candy»: improving learning with animations / R. Lowe // Proceedings of AUC Academic and Developers Conference. – Townsville, Queensland, 2001.