ИССЛЕДОВАНИЕ RQ-СИСТЕМЫ M|GI|1 МЕТОДОМ АСИМПТОТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА В УСЛОВИИ БОЛЬШОЙ ЗАГРУЗКИ

Е. Моисеева*, А. Назаров

Томский государственный университет
Томск, Россия
* moiskate@mail.ru

В работе рассмотрена однолинейная система массового обслуживания M|GI|1 с источником повторных вызовов. Исследование проведено методом асимптотического анализа в условии большой загрузки, с помощью которого было показано, что характеристическая функция числа заявок в источнике повторных вызовов имеет вид гамма распределения.

Ключевые слова: RQ-система, большая загрузка, метод асимптотического анализа.

1. ВВЕДЕНИЕ

Одной из наиболее актуальных задач теории массового обслуживания является проблема исследования RQ-систем (Retrial Queueing System), которые характеризуются ситуациями повторных обращений требований из источника повторных вызовов (ИПВ) к обслуживающему прибору.

В реальных информационных и экономических системах достаточно часто встречаются такие процессы. Одним из ярких примеров является блокировка в условиях доступа к общим ресурсам.

Первые системы такого рода были рассмотрены Вилкинсоном [1] и Коэном [2]. Основные подходы к описанию систем с ИПВ были рассмотрены Гоштони [3], Элдином [4]. Наиболее полное и глубокое исследование различных процессов в системах с повторными вызовами проведено в работах Г. И. Фалина и Артоледжо [5, 6]. Ими получены допредельные характеристические функции для RQ-систем M|M|1, M|GI|1, M|M|c и т.д., а также рассмотрены разнообразные методы для исследования таких систем.

Многие из поставленных задач в моделях RQ-систем решались численно [7], в данной же работе применяется альтернативный способ их решения - метод асимптотического анализа.

2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ

Рассмотрим (рис. 1) однолинейную систему с ИПВ, на вход которой поступает простейший поток заявок с параметром λ, а время обслуживания каждой заявки имеет произвольную функцию распределения $B(x)$. Если поступившая заявка застает прибор свободным, то оно занимает его для обслуживания. Если прибор занят, то заявка переходит в ИПВ, где осуществляет случайную задержку, продолжительность которой имеет экспоненциальное распределение с параметром σ. Из ИПВ после случайной задержки заявка вновь обращается обслуживающему прибору с повторной попыткой его захвата. Если прибор свободен, то заявка из ИПВ занимает его для обслуживания, в противном случае заявка мгновенно возвращается в источник повторных вызовов для реализации следующ

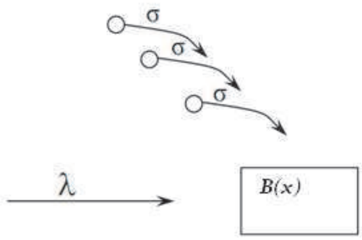

Рис. 1. Однолинейная RQ-система

Пусть $i(t)$ – число заявок в ИПВ, $z(t)$ – длина интервала от момента t до момента окончания обслуживания заявки, а $k(t)$ – определяет состояние прибора следующим образом: $k(t) = 0$, если прибор свободен, $k(t) = 1$, если прибор занят.

Обозначим $P\{k(t) = 0, i(t) = i\} = P(0, i, t)$ вероятность того, что прибор свободен в момент времени t и в источнике повторных вызовов находится i заявок; а $P\{k(t) = 1, i(t) = i, z(t) < z\} = P(1, i, z, t)$ вероятность того, что в момент времени t прибор занят, в источнике повторных вызовов находится i заявок и оставшееся время обслуживания меньше z.

Причем процесс $\{k(t), i(t), z(t)\}$ изменения состояний данной системы во времени является Марковским с переменным числом компонент.

Тогда ставится задача нахождения распределения вероятностей числа заявок в источнике повторных вызовов такой системы.

Для распределения вероятностей $P(1, i, z, t)$, и $P(0, i, t)$ состояний рассматриваемой RQ-системы составим систему дифференциальных уравнений Колмогорова.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P(0,i,t)}{\partial t} = \dfrac{\partial P(1,i,0,t)}{\partial z} - (\lambda + i\sigma)P(0,i,t), \\ \dfrac{\partial P(1,i,z,t)}{\partial t} = \dfrac{\partial P(1,i,z,t)}{\partial z} - \dfrac{\partial P(1,i,0,t)}{\partial z} - \lambda P(1,i,z,t) + \\ +(i+1)\sigma P(0,i+1,t)B(z) + \lambda P(0,i,t)B(z) + \lambda P(1,i-1,z,t). \end{cases} \tag{1}$$

В стационарном режиме система (1) примет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P(1,i,0)}{\partial z} - (\lambda + i\sigma)P(0,i) = 0, \\ \dfrac{\partial P(1,i,z)}{\partial z} - \dfrac{\partial P(1,i,0)}{\partial z} - \lambda P(1,i,z) + (i+1)\sigma P(0,i+1)B(z) + \\ +\lambda P(0,i)B(z) + \lambda P(1,i-1,z) = 0, \end{cases} \tag{2}$$

где $P(k,i,z,t) \equiv P(k,i,z)$.

Перейдем к характеристическим функциям:

$$H(k,u,z)=\sum_i e^{jui}P(k,i,z),$$

где $\sqrt{-1}=j$ – мнимая единица.

Учитывая, что

$$\frac{\partial H(k,u,z)}{\partial u}=j\sum_i ie^{jui}P(k,i,z),$$

система уравнений (2) для характеристических функций перепишется в виде:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H(1,u,0)}{\partial z}-\lambda H(0,u)+j\sigma\dfrac{\partial H(0,u)}{\partial u}=0,\\ \dfrac{\partial H(1,u,z)}{\partial z}-\dfrac{\partial H(1,u,0)}{\partial z}-e^{-ju}j\sigma\dfrac{\partial H(0,u)}{\partial u}B(z)+\lambda H(0,u)B(z)+\\ +(e^{ju}-1)\lambda H(1,u,z)=0. \end{cases}$$

Введем параметр $\rho=\lambda b$, характеризующий загрузку системы, где b – среднее время обслуживания заявки. Тогда получим следующую систему:

$$\begin{cases} b\dfrac{\partial H(1,u,0)}{\partial z}-\rho H(0,u)+j\sigma b\dfrac{\partial H(0,u)}{\partial u}=0,\\ b\dfrac{\partial H(1,u,z)}{\partial z}-b\dfrac{\partial H(1,u,0)}{\partial z}-e^{-ju}j\sigma b\dfrac{\partial H(0,u)}{\partial u}B(z)+\rho H(0,u)B(z)+\\ +(e^{ju}-1)\rho H(1,u,z)=0. \end{cases}\tag{3}$$

3. ВЫВОД АСИМПТОТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Решим полученную систему методом асимптотического анализа в условиях большой загрузки, то есть при $\lambda b=\rho\uparrow 1$ или при $\varepsilon\downarrow 0$, где $\varepsilon=1-\rho>0$ – бесконечно малая величина.

Введем обозначения: $u=\varepsilon w$, $H(0,u)=\varepsilon G(w,\varepsilon)$, $H(1,u,z)=F(w,z,\varepsilon)$. Тогда система (3) перепишется в виде:

$$\begin{cases} b\dfrac{\partial F(w,0,\varepsilon)}{\partial z}-(1-\varepsilon)\varepsilon G(w,\varepsilon)+j\sigma b\dfrac{\partial G(w,\varepsilon)}{\partial w}=0,\\ b\dfrac{\partial F(w,z,\varepsilon)}{\partial z}-b\dfrac{\partial F(w,0,\varepsilon)}{\partial z}-e^{-jw\varepsilon}j\sigma b\dfrac{\partial G(w,\varepsilon)}{\partial w}B(z)+\\ +(1-\varepsilon)\varepsilon G(w,\varepsilon)B(z)+(e^{jw\varepsilon}-1)(1-\varepsilon)F(w,z,\varepsilon)=0. \end{cases}\tag{4}$$

Из этой системы выведем следующие уравнения.

Совершив предельный переход в (4) при $\varepsilon\downarrow 0$ и обозначив

$$F(w,z)=\lim_{\varepsilon\to 0}F(w,\varepsilon,z),$$

$$G(w)=\lim_{\varepsilon\to 0}G(w,\varepsilon),$$

получим:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F(w,0)}{\partial z} + j\sigma \dfrac{dG(w)}{dw} = 0, \\ \dfrac{\partial F(w,z)}{\partial z} - \dfrac{\partial F(w,0)}{\partial z} - j\sigma \dfrac{dG(w)}{dw} B(z) = 0. \end{cases}$$

Тогда справедливо следующее:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F(w,0)}{\partial z} = -j\sigma \dfrac{dG(w)}{dw}, \\ \dfrac{\partial F(w,z)}{\partial z} - \dfrac{\partial F(w,0)}{\partial z}(1 - B(z)) = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Запишем разложения функций:

$$G(w,\varepsilon) = G(w) + \varepsilon g(w) + O(\varepsilon^2), \quad (6)$$

$$F(w,\varepsilon) = F(w) + \varepsilon g(w) + O(\varepsilon^2), \quad (7)$$

где $O(\varepsilon^2)$– бесконечно малая величина порядка ε^2.

Подставим разложения (6), (7) в систему (4) и в результате несложных преобразований можно записать:

$$\begin{cases} b\frac{\partial F(w,0)}{\partial z} + b\varepsilon \frac{\partial f(w,0)}{\partial z} - (1-\varepsilon)\varepsilon G(w) - (1-\varepsilon)\varepsilon^2 g(w) + j\sigma b \frac{dG(w)}{dw} + j\sigma b\varepsilon \frac{dg(w)}{dw} = O(\varepsilon^2), \\ b\dfrac{\partial F(w,z)}{\partial z} + b\varepsilon \dfrac{\partial f(w,z)}{\partial z} - b\dfrac{\partial F(w,0)}{\partial z} - b\varepsilon \dfrac{\partial f(w,0)}{\partial z} - e^{-jw\varepsilon} j\sigma b \dfrac{dG(w)}{dw} B(z) - \\ -e^{-jw\varepsilon} j\sigma b\varepsilon \dfrac{dg(w)}{dw} B(z) + (1-\varepsilon)\varepsilon G(w) B(z) + (1-\varepsilon)\varepsilon^2 g(w) B(z) + \\ +(e^{jw\varepsilon} - 1)(1-\varepsilon) F(w,z) + (e^{jw\varepsilon} - 1)(1-\varepsilon)\varepsilon f(w,z) = O(\varepsilon^2). \end{cases}$$

Преобразуем систему с учетом (5) и совершим в ней придельный переход при $\varepsilon \downarrow 0$:

$$\begin{cases} b\dfrac{\partial f(w,0)}{\partial z} - G(w) + j\sigma b \dfrac{dg(w)}{dw} = 0, \\ b\dfrac{\partial f(w,z)}{\partial z} - b\dfrac{\partial f(w,0)}{\partial z} + jw \cdot j\sigma b \dfrac{dG(w)}{dw} B(z) - j\sigma b \dfrac{dg(w)}{dw} B(z) + \\ +G(w) B(z) + jwF(w,z) = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Суммируя уравнения системы (4), имеем:

$$b\frac{\partial F(w,z,\varepsilon)}{\partial z} + (1 - e^{-jw\varepsilon} B(z)) j\sigma b \frac{\partial G(w,\varepsilon)}{\partial w} + \\ + (1-\varepsilon)\varepsilon G(w,\varepsilon)(B(z) - 1) + (e^{jw\varepsilon} - 1)(1-\varepsilon) F(w,z,\varepsilon) = 0. \quad (9)$$

Перепишем выражение при условии $z \to \infty$:

$$(1 - e^{-jw\varepsilon}) j\sigma b \frac{\partial G(w,\varepsilon)}{\partial w} + (e^{jw\varepsilon} - 1)(1-\varepsilon) F(w,\varepsilon) = 0.$$

Сократим на общий множитель и подставим разложения (6), (7):

$$j\sigma b \frac{dG(w)}{dw} + j\sigma b\varepsilon \frac{dg(w)}{dw} + (1 + jw\varepsilon)(1-\varepsilon) F(w) + (1 + jw\varepsilon)(1-\varepsilon)\varepsilon f(w) = 0. \quad (10)$$

Совершив придельный переход при $\varepsilon \downarrow 0$, получим:

$$j\sigma b\frac{dG(w)}{dw} + F(w) = 0. \tag{11}$$

Тогда подставив (11) в (10), можно записать:

$$j\sigma b\frac{dg(w)}{dw} + (jw-1)F(w) + f(w) = 0. \tag{12}$$

Объединяя (11), (12) и системы (5) и (8), получим систему из шести уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F(w,0)}{\partial z} = -j\sigma\dfrac{dG(w)}{dw}, \\ \dfrac{\partial F(w,z)}{\partial z} - \dfrac{\partial F(w,0)}{\partial z}(1-B(z)) = 0, \\ b\dfrac{\partial f(w,0)}{\partial z} - G(w) + j\sigma b\dfrac{dg(w)}{dw} = 0, \\ b\dfrac{\partial f(w,z)}{\partial z} - b\dfrac{\partial f(w,0)}{\partial z} + jw\cdot j\sigma b\dfrac{dG(w}{dw}B(z) - j\sigma b\dfrac{dg(w)}{dw}B(z) + \\ +G(w)B(z) + jwF(w,z) = 0, \\ j\sigma b\dfrac{dG(w)}{dw} + F(w) = 0. \\ j\sigma b\dfrac{dg(w)}{dw} + (jw-1)F(w) + f(w) = 0. \end{cases} \tag{13}$$

Допредельная характеристическая функция $H(u) = H(1,u,\infty) + H(0,u)$ в условиях большой загрузки может быть приближенно определена равенством:

$$H(u) \approx h(u) = F(w).$$

Поэтому для решения поставленной задачи из системы (13) достаточно найти лишь функцию F(w). Процедуру ее нахождения реализуем в три этапа.

4. ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМЫ ПОЛУЧЕННЫХ УРАВНЕНИЙ

1) Будем искать $F(w,z)$ в виде произведения:

$$F(w,z) = R(z)\Phi(w). \tag{14}$$

При этом очевидно, что

$$F(w,z) = \lim_{z\to\infty} F(w,z) = \Phi(w).$$

Тогда из второго уравнения системы (13) получим: $R'(z) - R'(0)(1-B(z)) = 0$. Решение такого уравнения:

$$R(z) = R'(0)\int_0^z (1-B(x))dx.$$

Найдем $R'(0)$. Так как $R(\infty) = 1$, то $R'(0)\int_0^\infty (1 - B(x))dx = 1$. Отсюда $R'(0) = \frac{1}{b}$. Тогда получаем:

$$R(z) = \frac{1}{b}\int_0^z (1 - B(x))dx. \tag{15}$$

Из первого уравнения системы (13) выразим производную функции $G(w)$через $\Phi(w)$:

$$j\sigma\frac{dG(w}{dw} = \Phi(w)R'(0),$$

$$\frac{dG(w}{dw} = \frac{j}{\sigma b}\Phi(w). \tag{16}$$

2) Выразим $\frac{dg(w)}{dw}$ из третьего уравнения системы (13) и заменим его в четвертом уравнении:

$$\frac{\partial f(w,z)}{\partial z} + \frac{\partial f(w,0)}{\partial z}(B(z) - 1) + jw \cdot j\sigma\frac{dG(w)}{dw}B(z) + \frac{jw}{b}F(w,z) = 0,$$

Подставим в полученное выражение (14) и (16) и проинтегрируем:

$$f(w,z) = \frac{\partial f(w,0)}{\partial z}\int_0^z (1 - B(x))dx - \frac{jw}{b}\Phi(w)\int_0^z (R(x) - B(x))dx. \tag{17}$$

Решение $f(w,z)$ этого уравнения будем искать в виде:

$$f(w,z) = \frac{jw}{b}\Phi(w)v(z). \tag{18}$$

Тогда справедливо

$$\frac{\partial f(w,0)}{\partial z} = \frac{jw}{b}\Phi(w)v'(0).$$

Перепишем уравнение (17) при условии $z \to \infty$.

$$f(w) = \frac{\partial f(w,0)}{\partial z} - \frac{jw}{b}\Phi(w)\int_0^\infty (R(x) - B(x))dx.$$

$$f(w) = jw\Phi(w)v'(0) - \frac{jw}{b}\Phi(w)\int_0^\infty (R(x) - B(x))dx.$$

Рассмотрим $\int_0^\infty (R(x) - B(x))dx$.

$$\int_0^\infty (R(x) - B(x))dx = \int_0^\infty (1 - B(x))dx - \int_0^\infty (1 - R(x))dx = b + \int_0^\infty xR(x)dx.$$

Учитывая выражение (15), получим:

$$\int_0^\infty xR(x)dx = \frac{1}{b}\int_0^\infty x(1 - B(x))dx = -\frac{1}{b}\int_0^\infty \frac{x^2}{2}dB(x) = -\frac{b_2}{2b},$$

где b_2– момент второго порядка времени обслуживания. Тогда $\int_0^\infty (R(x) - B(x))dx = b - \frac{b_2}{2b}$, а $f(w) = jw\Phi(w)v'(0) - \frac{jw}{b}\Phi(w)(b - \frac{b_2}{2b})$.
С другой стороны: $f(w) = f(w, \infty) = \frac{jw}{b}\Phi(w)v(\infty)$. Получаем, что

$$bv'(0) - v(\infty) = (b - \frac{b_2}{2b}).$$

3) Из третьего уравнения системы (13) следует:

$$j\sigma\frac{dg(w)}{dw} = -\frac{\partial f(w,0)}{\partial z} + \frac{1}{b}G(w) = -\frac{jw}{b}\Phi(w)v'(0) + \frac{1}{b}G(w).$$

Подставляя выражения для $j\sigma\frac{dg(w)}{dw}$ и $f(w)$ из (18) в последнее уравнение системы (13), получим:

$$-jw\Phi(w)v'(0) + G(w) + (jw - 1)\Phi(w) + \frac{jw}{b}\Phi(w)v(\infty) = 0.$$

Продифференцировав это уравнение и учитывая (16), можно записать

$$\Phi(w)(-jv'(0)+j+\frac{j}{b}v(\infty)+\frac{j}{\sigma b})+\Phi'(w)(-jwv'(0)+jw-1+\frac{jw}{b}v(\infty)) = 0. \quad (19)$$

Обозначим $\alpha = 1 + \frac{1}{\sigma(v(\infty) - bv'(0) + b)}, \beta = \frac{b}{v(\infty) - bv'(0) + b}$.
Подставляя известное значение: $v(\infty) - bv'(0) = b - \frac{b_2}{2b}$, получим

$$\alpha = 1 + \frac{2b}{\sigma b_2}, \beta = \frac{2b^2}{b_2}. \quad (20)$$

Тогда уравнение (19) перепишется в виде:

$$\Phi'(w)(jw - \beta) + j\Phi(w)\alpha = 0,$$

причем решение этого уравнения:

$$\Phi(w) = (1 - \frac{jw}{\beta})^-\alpha.$$

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, было показано, что асимптотическая характеристическая функция $H(u) \approx h(u) = F(w)$ в условиях большой загрузки имеет вид гамма – распределения с параметрами α и β, определяемыми описанными выше равенствами (20).

Найденное распределение числа заявок в ИПВ совпадает с результатом исследования системы M|GI|1 Фалиным [5], полученным предельным переходом в формуле для допредельной характеристической функции. Такая формула также выведена Г. И. Фалиным в [5].

Следовательно, предлагаемый в данной работе метод асимптотического анализа в условии большой загрузки может быть применен для исследования более сложных систем (например, MMPP|GI|1, MAP|GI|1), для которых формула для допредельной характеристической функции не известна.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Wilkinson R.I.* Theories for toll traffic engineering in the USA. // The Bell System Technical Journal. 1956. № 2. P. 421-507.
2. *Коэн Дж., Бонсма О.* Граничные задачи в теории массового обслуживания / Пер. с англ. А.Д. Вайнштейна;. М.: Мир, 1987. Р. 272.
3. *Гоштони Г.* Сравнение вычисленных и моделированных результатов для пучков соединительных линий при наличии повторных попыток установления связи // 8-ой ITC, 1977. № 1. P. 1-16.
4. *Эллдин А.* Подход к теоретическому описанию повторных попыток вызова //Ericssion Technics 1967. № 3. P. 345-407.
5. *Falin G.I., Templeton J.G.C.* Retrial queues. . London: Chapman & Hall, 1997.
6. *Artolejo J.R., Gomez-Corral A.* Retrial Queueing Systems //A Computational Approach, Springer 2008.
7. *Дудин А.Н.* Об одной системе с повторными вызовами и изменяемым режимом работы // Ред. журн. "Известия АН СССР. Техническая кибернетика М.: 1985.