# ИССЛЕДОВАНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК И СВОЙСТВ СЕТЕЙ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ. САМОСОГЛАСОВАННАЯ СИСТЕМА МОДЕЛЕЙ

**И. Гуревич**
*ИПУ РАН,*
*Россия, Москва*
iggurevich@gmail.com

Повсеместное распространение в корпоративных систем и сетей, сделали необходимыми точные методы расчета характеристик систем и сетей, методы, к созданию которых приложило значительные интеллектуальные усилия целое поколение ученых и инженеров. Теперь созданы «кубики» (компьютеры, средства хранения данных, маршрутизаторы, коммутаторы, модемы,...) из которых легко собрать необходимую Заказчику систему, сеть, характеристики которой следует оценивать. Детальные расчеты тем более необходимы для систем специального назначения, уникальных систем и сетей. Актуальна также задача исследования свойств систем и сетей, например, устойчивости. Оценка характеристик и исследование свойств систем и сетей требует использования моделей. В настоящей работе излагаются сведения о самосогласованной системе моделей сетевых систем используемых для изучения и проектирования систем и сетей.

*Ключевые слова:* система, сеть, модель, статика, динамика, потоки, плотность распределения, характеристики, свойства.

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Повсеместное распространение в корпоративных систем и сетей, сделали необходимыми точные методы расчета характеристик систем и сетей, методы, к созданию которых приложило значительные интеллектуальные усилия целое поколение ученых и инженеров. Теперь созданы «кубики» (компьютеры, средства хранения данных, маршрутизаторы, коммутаторы, модемы,...) из которых легко собрать необходимую Заказчику систему, сеть, характеристики которой следует оценивать. Развитие Интернет часто делает ненужным само создание корпоративной сети — достаточно обратиться к провайдеру... Но тем более Заказчику необходимо знать, как поведет себя система или сеть. Детальные расчеты тем более необходимы для систем специального назначения, уникальных систем и сетей. По-прежнему актуален вопрос исследования свойств систем и сетей, например, устойчивости. Оценка характеристик и исследование свойств систем и сетей требует использования моделей. В настоящей работе излагаются сведения о самосогласованной системе моделей сетевых систем используемых для оценки корпоративных систем и Интернет.

Логика функционирования сетевой системы, ее конструкция, параметры элементов определяют, задают свойства сетевой системы и значения ее характеристик. Описание логики сети осуществляется логическими матрицами, описывающими условия прохождения сообщений по очередям, узлам сети и каналам связи. Отображение из пространства логических матриц в пространство стохастических матриц дает возможность построить самосогласованную вычисли-тельную модель сетевой системы. В самосогласованную систему моделей сетевых систем входят модели, как разной степени детализации, так и разного функционального назначения.

По степени детализации выделяются три группы (уровня) моделей:

- микроописание;
- промежуточное описание;
- макроописание.

Микроописание (уровень очередей) используется для моделирования очередей системы; промежуточное описание (уровень узла), как правило, используется для моделирования совокупностей очередей, между которыми в узлах сетевой системы распределяются сообщения; макроописание (сетевой уровень используется для моделирования сетевой системы в целом).

Между различными уровнями описания имеется взаимосвязь, а именно:

- ряд выходных характеристик микроописания (интенсивности выходных потоков, вероятности образования очередей заданных длин, функции распределения времен пребывания в очередях) являются входными характеристиками для промежуточного описания;
- ряд выходных характеристик промежуточного описания (вероятности передачи сообщений между очередями, узлами сети, функции распределения времен пребывания в узлах сети) являются входными данными для макроописания;
- и, наконец, выходные характеристики макроописания (интенсивности входных потоков) являются входными характеристиками для микроописания.

По функциональному назначению выделяются три группы моделей (рисунок 1):

- статические модели;
- динамические потоковые модели;
- модели эволюции функций (плотностей) распределения времен пребывания.

Описание сетевой системы осуществляется в пространстве интенсивностей потоков $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n), \lambda \geq 0$. Эволюция, движение сетевой системы описывается изменением вектора интенсивностей потоков. Статическая модель описывает равновесные состояния сетевой системы. В равновесных состояниях фиксируются значения потоков, поступающих в систему извне, параметры и характеристики элементов сетевой системы, правила выбора маршрутов движения сообщения и т.п.

Интенсивности потоков в узлах и очередях сети также принимают установившиеся фиксированные значения, как и характеристики очередей, узлов и системы в целом. Статическая модель описывает стационарные процессы передачи сообщений

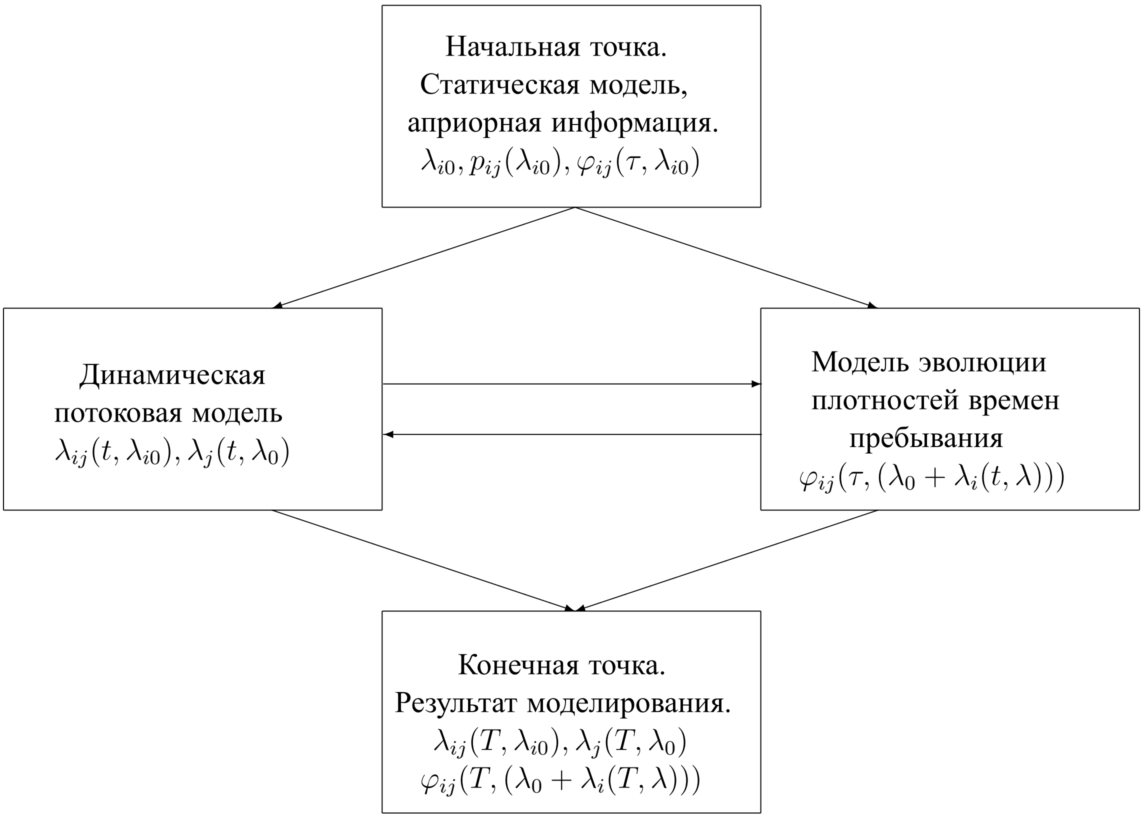


*Рис. 1.* Самосогласованная система моделей сетевых систем

по сетевой системе. Стационарными состояниями, как правило, являются либо начальные, либо конечные состояния сетевой системы. Динамическая потоковая модель на интервале описывает изменение интенсивностей потоков в узлах и очередях сети при изменении интенсивности внешней нагрузки. Начальным состоянием в момент $t_0$ может являться состояние, описываемое статической моделью. Вместе с тем, в качестве начального состояния можно рассматривать произвольное состояние сетевой системы. Изменение интенсивностей потоков в момент $t_0$ зависит от вероятностей передачи сообщений между узлами и очередями сети и плотностей распределения времен пребывания сообщений в очередях сети.

Модель эволюции функций (плотностей) распределения времен пребывания описывает динамику изменений функций (плотностей) времен пребывания сообщений, поступивших в очередь в момент времени $t$ при изменении интенсивности входного потока. Все три класса моделей взаимосвязаны.

Выходные данные статической модели определяют начальную точку, как для динамической потоковой модели, так и для модели эволюции функций (плотностей) распределения.

Выход динамической потоковой модели (интенсивности потоков на выходе очередей системы) является входом для модели эволюции функций (плотностей) распределения.

Выход модели эволюции (плотности распределения времен пребывания в очередях системы) является входом в динамическую потоковую модель.

## 2. СТАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Предлагаемая трехуровневая модель сети включает модели сетевого уровня, модели уровня узла, модели уровня очередей. Модели сетевого уровня отображают процессы передачи информации по сети связи в целом, описывают вероятностно-временные и прочие характеристики сети. Модели уровня узла отображают процедуры выбора маршрутов и управления потоками, процедуры распределения потоков между очередями. Описывают вероятностно-временные характеристики узлов сети. Модели уровня очередей отображают процедуры обслуживания информационных потоков в очередях, формируемых в узлах сети. Описывают вероятностно-временные характеристики очередей.

В общем случае, в модели могут различаться потоки с учетом всего предыдущего и будущего маршрута передачи информации и таких параметров входных потоков как приоритет, длина сообщения и т.п. Поток в общем случае идентифицируется набор индексов: $si_1 \dots i_k, fpqj_1 \dots j_m, t\alpha\beta \dots$, где $s$ — номер узла отправителя информации; $i_1, \dots, i_k$ — номера узлов ранее пройденных информацией; $f$ — номер узла смежного с узлом $p$ , из которого информация направляется в рассматриваемую очередь $pq$; $p$ — номер узла, в котором сформирована рассматриваемая очередь; $q$ — номер смежного узла с узлом $p$, в который направляется информация потока из рассматриваемой очереди $pq$; $j_1 \dots j_m$ — номер узлов, которые пройдет информация потока в дальнейшем движении по сети из рассматриваемой очереди $pq$; $t$ — номер узла-адресата; $\alpha, \beta, \dots$ — параметры входных потоков (приоритет, интенсивность и т.п.). Если необходимо рассматривать внутренние потоки на узлах, то в идентификаторы очередей необходимо добавить индексы дополнительных фиктивных узлов.

Введение в рассмотрение потоков $ipqjt$ достаточно для исследования весьма сложных сетевых алгоритмов. Если узел $j$ совпадает с узлом $t$ $j \equiv t$, то потоки идентифицируются четырь-мя индексами $ipqt$.

Для класса сетевых алгоритмов, составляющих способы коммутации сообщений, пакетов и способ коммутации каналов при установлении соединении служебным сообщением, узел $i$ совпадает с узлом $p$, узел $j$ совпадает с узлом $q$ — $i \equiv p$, $j = q$ и потоки идентифицируются тремя индексами $pqt$.

Потоки, направленные на вход очередей $pq$, будем обозначать символом $\lambda$ с соответствующими идентификаторами: $\lambda_{pq}^{ijt}, \lambda_{pq}^{it}, \lambda_{pq}^{t}$ соответственно.

Законы сохранения в сетях находят свое выражение, прежде всего в системе потоковых уравнений. Системы потоковых уравнений составляются относительно интенсивности потоков, поступающих на вход элементов, фрагментов сети и отражают тот факт, что информация в процессе её передачи по сети связи не может самопроизвольно появляться и исчезать, что информация в соответствии с реализуемыми сетью сетевыми алгоритмами из данного узла (очереди) будет доведена до адресата или передана в другой узел (очередь), или будет «потеряна» вследствие отказов в поступлении в очереди, истечение допустимого времени пребывания в сети и т.п. Потоковые уравнения могут составляться как для суммарных потоков, обладающих определенными свойствами или отличительными признаками, например, для потоков заданных приоритетов, потоков, идущих в определенные адреса, очереди. Потоковые уравнения могут взаимосвязывать потоки в смежных и в произвольных элементах сети.

Системы потоковых уравнений составляются на всех уровнях рассматриваемой модели сети. Системы потоковых уравнений сетевого уровня $\lambda_j^t = \sum_i P_{ij}\lambda_i + \bigvee_j^t$, где $i, j, t = 1, \ldots, n$.

Данная система уравнений говорит о том, что интенсивность информационного потока, идущего по адресу $t$ и поступающего на узел $j$, равна сумме интенсивности информационных потоков, поступающих в данный узел $j$ из других узлов $i - P_{ij}^t \cdot \lambda_i$. и внешнего потока, поступающего в данный узел $j - V_j^t$. В состав рассматриваемых узлов включаются узлы сети, которым соответствуют состояния конечных полумарковских процессов $P_t$, а также дополнительные (фиктивные) состояния, в которые в модели направляются «потерянные» сообщения. $P_{ij}^t$ — элементы матриц переходных вероятностей процессов $P_t$. Для однопродукто-вой сети индекс $t$ можно опустить и получим системы уравнений: $\lambda_j = \sum P_{ij}\lambda_i + \bigvee_j$.

Вид систем потоковых уравнений определяется видом матриц переходных вероятностей $P_t$, сетевыми алгоритмами и правилами обслуживания очередей. Если, например, в сети используются сетевые алгоритмы передачи информации по фиксированным маршрутам или случайные процедуры выбора направлений передачи, а очереди бесконечны, то $P_{ij}^t = const$ и системы потоковых уравнений являются линейными системами уравнений. Если в сети используются простые или адаптивные алгоритмы, то в рамках рассматриваемой модели, системы потоковых уравнений являются нелинейными алгебраическими уравнениями.

Размерность систем потоковых уравнений сетевого уровня определяется числом узлов сети, числом адресатов и пропорциональна $n \cdot t$ ($n$ — для однопродуктовой сети).

Модели сетевого уровня отображают процессы передачи информации по сети в целом. Модели сетевого уровня взаимосвязывают значения сетевых характеристик с сетевыми алгоритмами (задаваемыми моделями уровня узла), правилами обслуживания очередей и параметрами элементов сети (задаваемыми моделями уровня очередей). Сетевой уровень представляется совокупностью $P$ конечных полумарковских процессов (КПП). Каждому узлу адресату $t(I \geq t \geq n)$ ставится в соответствии один и только конечный полумарковский процесс $P_t : P = U_t P_t$. Состояния КПП $P_t$ в общем случае отождествляются с узлами сети. Как правило, все процессы $P_t$ определенны на одних и тех же состояниях. Каждому узлу может ставиться в соответствие несколько состояний КПП. При необходимости, состояниями КПП могут объявляться определенные совокупности элементов сети, очереди, события. Могут также вводиться дополнительные или фиктивные состояния (в которые, например, будут направляться потерянные по разным причинам сообщения).

Определение множеств(а) состояний процессов $P_t$ производится Исследователем или Конструктором в соответствии со стоящей перед ним задачей.

В качестве сетевых моделей используются как поглощающие КПП (в этом случае узлыадресаты в каждом КПП $P_t$ объявляются поглощающими состояниями), так и регулярные КПП.

Элементы матриц переходных вереоятностей и значения процессов на состояниях КПП (узлах сети) вычисляются моделями уровня узла. Формулы для вычисления сетевых характеристик приведены ниже.

Модели уровня узла отображают процедуры выбора маршрутов и управления потоками, процедуры распределения потоков между очередями. Модели уровня узла взаимосвязывают значения вероятностей $P^t_{ij}$ передачи информации между узлами сети ($P^t_{ij}$ являются элементами переходных вероятностей $P_t$ КПП $P_t$), значения вероятностей $P^{ijt}_{pq}$ выбора направлений $pq$ (направления $pq$ отождествляются с очередями $pq$ , организуемыми перед направлениями $pq$ ) при передаче информации по адресу $t$ из узла $i$ в узел $j$ , времени пребывания информации в узлах сети с вероятностями $a_{mf}$ направления информации в очереди $mf$ и временем обслуживания информации в очередях. Кроме того, модели уровня узла определяют зависимости вероятности $a_{mf}$ направления информации в очередь (направление $mf$) от вероятностно-временных характеристик очередей и сетевых констант $\alpha$, влияющих на выбор направлений передачи. Последние модели могут быть выделены в отдельный уровень. В данном случае это несущественно и мы будем придерживаться трехуровневой модели.

Сетевые процедуры (алгоритмы) задаются в виде совокупности булевых функций $F^t_{ij}$, определяющих условия передачи информации между узлами сети. Аргументами булевых функций $F^t_{ij}$ являются булевы переменные $X_{mf}$ , описывающие состояния элементов сети (очередей). Если $X_{mf} = 1$, то информация в узле $m$ направляется по направлению $mf$, в противном случае по одному из других направлений (на вход одной из других очередей).

Булевы функции $F^t_{ij}$ задаются для всех адресатов и всех пар узлов. Если передачи информации, идущей по адресу $t$ из узла $i$ в узел $j$, нет, то $F^t_{ij} = 0$. Условия передачи информации обладают свойством полноты $UF^t_{ij} = 1$. Состояния булевых переменных $X_{mf}$ могут иметь разнообразный физический смысл — «работоспособен», «не работоспособен», «свободен», «занят», «очередь не превышает заданной длины», «длина очереди плюс константа, плюс время доставки — минимально из заданной совокупности очередей» и т.п. Состояния могут также составлять комбинации вышеописанных состояний разных элементов сети и любых очередей.

Вероятность передачи информации, идущей в адрес $t$ из узла $i$ в узел $j$, есть вероятность того, что булева функция $F^t_{ij}$ принимает значение единицы и определяется вероятностями принятия переменными $X_{mf}$ значения единицы $a_{mf} = P(X_{mf} = 1)$ : $P^t_{ij} = P(F^t_{ij} = 1) = F_{ij}(a_{mf})$. Из условия полноты функций $F^t_{ij}$ следует, что $\sum P^t_{ij} = 1$. Вероятности $P^{ijt}_{pq}$ определяют долю потока сообщений, идущего по адресу $t$ из узла $i$ в узел $j$, которая направляется в очередь $pq$. Вероятности $P^{ijt}_{pq}$ используются для составления системы потоковых уравнений.

Модели уровня очередей могут быть заданы в виде формулы, систем уравнений, решение которых производится в ходе вычисления значений сетевых характеристик, в виде параметров или функциональных зависимостей, полученных в результате имитационного моделирования или статистических измерений. В настоящее время модели очередей в виде формул получены, главным образом, в предположениях о пуассоновости входных потоках и экспоненциальности обслуживания.

Приведем ряд основных формул теории конечных цепей Маркова, с использованием которых производится оценка сетей СМО. $N = (I - Q)^{-1}$ — фундаментальная матрица системы, где $Q$ — матрица, получаемая из матрицы переходных вероятностей системы $P$ вычеркиванием строки и столбца соответствующих части системы, отождествленной с поглощающим состоянием; $I$ — единичная матрица; $N = (n_{ij})$, где $n_{ij}$ — число попаданий потока выходящего из части $i$ системы в часть $j$; $\tau = N\Theta$, где $\tau = (\tau_i)$ — вектор-столбец средних значений произвольной аддитивной характеристики системы $\Theta = (\Theta_i)$. $(\Theta_i)$ — значение аддитивной характеристики системы на $i$-й её части. $D = (d_i) = (2N - I)N \cdot \Theta_{sq} - \tau_{sq}$, где $(d_i)$ — вектор-столбец дисперсией аддитивной характеристики $\tau$. $A_{sq}$ матрица, полученная из матрицы $A$ возведением её элементов в квадрат. $B = (b_{ij}) = NR$, где $b_{ij}$ — вероятность попадания потока выходящего из части $i$ в часть системы $j$ (доля потока попавшего в $j$-ю часть системы); $R$ — вектор-столбец вероятностей перехода из частей системы в часть отождествленную с поглощающим состоянием. $H = (h_{ij}) = (N - I)N_{dq}^{-1}$, где $h_{ij}$ — вероятность попадания потока, выходящего из части $i$ системы в часть $j$; $A_{dq}$ — матрица, полученная из матрицы $A$, заменой всех недиагональных элементов нулями. Объем вычислений по приводимым формулам пропорционален $n^3$.

Отметим, что оценку систем можно производить также с использованием теории регулярных цепей Маркова. Оценка функций распределения характеристик систем производится с использованием аппарата полумарковских процессов, с вложенными КЦМ, определяемыми, как и ранее. Использование предлагаемого аппарата адекватно для стационарных систем в случае алгоритмов обмена не использующих информацию о предыдущем и последующем пути потока, а также в случаях, когда смена состояний связей $x_{ke}$ происходит много быстрее продолжительности циклов. В противном случае получаемые оценки являются оценками сверху.

## 3. ДИНАМИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СЕТЕВОЙ СИСТЕМЫ

Реальные сетевые элементы систем связи и управления являются нестационарными объектами. Их нестационарность определяется, в частности, изменениями нагрузки, перемещениями абонентов сети, выходом из строя и восстановлением элементов сети, ее реконфигурацией и т. п. Отсутствие адекватного, по возможности несложного, аппарата исследования нестационарных сетей приводит к тому, что сети рассчитываются на максимальные пиковые нагрузки. Кроме того, при проектировании сетей не проводится анализ их устойчивости, времени и качества переходных процессов.

Динамические свойства сети (изменение потоков в узлах) в точке $\lambda_0 = (\lambda_{i0})$ определяются статическими характеристиками сети, стационарными интенсивностями $\lambda_{i0}$ потоков в узлах сети, вероятностями $p_{ij}(\lambda_{i0})$ передачи сообщений между узлами сети, плотностями времен пребывания сообщений в очередях сети $\varphi_{ij}(t, \lambda_{i0})$ и изменением интенсивностей входных потоков $v_j(t)$.

Рассмотрим очередь $ij$. Предположим, что на вход очереди в момент времени $t_0$ поступает стационарный поток сообщений на обслуживание $\lambda_i^0$, на выходе очереди — стационарный поток обслуживание заявок $\lambda_{ij}^0$. Пусть $\Phi_{ij}(\tau)$ — функция распределения времени пребывания сообщений в очереди. $\Phi_{ij}(\tau)$ обладает следующими свойствами:

1) Функция распределения времени пребывания в очереди $\Phi_{ij}(\tau)$ зависит от интенсивности $\lambda_i^0$ потока сообщений, поступающих на вход очереди $ij$ $\Phi_{ij}(\tau) = \Phi_{ij}(\tau, \lambda_i^0)$. Эта зависимость, как правило, является нелинейной.
2) $\Phi_{ij}(\tau, \lambda_i^0) = 0$, при $\tau \leq 0$.
3) $\lim \Phi_{ij}(\tau, \lambda_i^0) = 1$ при $\tau \to \infty$.

Свойства 2, 3 выполняются во всей области $\Omega_i$ существования функции распределения $\lambda_i^0 \subset \Omega_i$. Предполагаем существование плотности распределения времени пребывания сообщений в очереди $\varphi_{ij}(\tau, \lambda_i^0) = \partial\Phi_{ij}(\tau, \lambda_i^0)/\partial\tau = \Phi'_{ij}(\tau, \lambda_i^0)$.

Рассмотрим очередь под воздействием ступенчатого изменения интенсивности входного потоки. Предположим, что в момент времени $t_0$ на вход очереди $ij$ подается ступенчатое приращение входного потока $\Delta\lambda_i^0 = \lambda_i(t)$. Будем считать, что $\lambda_i(t) \ll \lambda_i^0$.

$$\lambda_i^0 = \begin{cases} 0 & t \leq 0, \\ \Delta\lambda_i^0 = \lambda_i(0) & t \geq 0. \end{cases}$$

Как описать изменение интенсивности выходного потока под действием ступенчатого изменения входного потока?

В теории автоматического управления изменение выходных сигналов системы под действием ступенчатого сигнала описывается с использованием переходной функции. Переходной функцией называется функция, которая определяет выходной сигнал системы как функцию времени, если входной сигнал имеет вид единичной функции и при условии, что до момента подачи сигнала система находилась в равновесии. Каким образом определить переходную функцию очереди? Основная идея предлагаемого метода построения динамической модели очереди, а также сетевой системы в целом заключается в том, что в качестве переходной функции очереди при малых изменениях интенсивности входного потока предлагается использовать функцию распределения времени пребывания сообщений в очереди.

В самом деле, по нашему предположению очередь до момента $t_0$ находилась в равновесии. Изменение интенсивности выходного потока в момент времени $\tau > t_0$ равно изменению входного потока, умноженному на вероятность того, что это изменение дойдет до выхода очереди. Но функция распределения времени пребывания сообщений в системе массового обслуживания определяет вероятность обслуживания сообщений за заданное время и, тем самым, вероятность прохождения изменения интенсивности через очередь.

Итак, функции распределения времени обслуживания сообщений в очереди $ij-$ $\Phi_{ij}(\tau,\lambda_i^0)$ есть переходная функция очереди $\lambda_{ij}(\tau,\lambda_i^0)=\Phi_{ij}(\tau,\lambda_i^0)\cdot\lambda_i(0)$.

Рассмотрим изменения интенсивности выходного потока $\lambda_{ij}(t)$ очереди $ij$. При $t\le t_0$ $\lambda_{ij}(t)=0$; при $t>t_0$ $\lambda_{ij}(t)>0$; при $t\to\infty$ $\lambda_{ij}(t)\to\lambda_i^0$.

Теперь рассмотрим очередь под воздействием произвольного малого изменения входного потока. Использование $\Phi_{ij}(\tau)=\Phi_{ij}(\tau,\lambda_i^0)$ в качестве переходной функции позволяет описать изменение выходного потока при произвольном (но малом) изменении входного. Для этого достаточно использовать представление выходного потока в виде интеграла Дюамеля

$$\lambda_{ij}(t)=d/dt\int_0^t\Phi_{ij}(t-\tau)\lambda_i(\tau)d\tau=d/dt\int_0^t\Phi_{ij}(\tau)\lambda_i(t-\tau)d\tau.$$

Последнее выражение удобнее представить в следующем виде:

$$\lambda_{ij}(t)=\Phi_{ij}(0,\lambda_i^0)\lambda_i(t)+\int_0^t\Phi'_{ij}(t-\tau)d\tau.$$

Ввиду того, что $\Phi_{ij}(0,\lambda_i^0)=0$ и $\Phi'_{ij}(\tau)=\varphi_{ij}(\tau)$, получаем выражение, которое и будет использоваться в дальнейшем, $\lambda_{ij}(t)=\int_0^t\varphi_{ij}(t-\tau)\lambda_i(\tau)d\tau$.

Изменение интенсивности выходного потока очереди без потерь равно свертке плотности распределения времени пребывания сообщений в очереди и изменения интенсивности входного потока. Если плотность распределения времени пребывания сообщений в очереди есть $\delta$-функция, что соответствует простой задержке сообщений, $\varphi_{ij}(t-\tau)=\delta_{ij}(t-\tau)$, то $\lambda_{ij}(t)=\int_0^t\delta_{ij}(t-\tau)\ \lambda_i(\tau)d\tau=\lambda_i(t-\tau)$.

Изменение интенсивности выходного потока при задержке сообщений на время $\tau$, как и следовало ожидать, равно изменению интенсивности входного потока задержанному на $\tau$. Таким образом, учет временной задержки сообщений в очередях сети приводит к интегральным уравнениям Вольтерра второго рода $\lambda_{ij}(t,v_j(t))=\int_0^t\varphi_{ij}(t-\tau,\lambda_{i0})\lambda_i(\tau,\lambda_{i0})d\tau$. Динамика сетевой системы в целом описывается системой нелинейных интегральных уравнений Вольтерра второго рода $\lambda_j(t,\lambda_{i0})=\Sigma_i\lambda_{ij}(t,\lambda_{i0})=\Sigma_ip_{ij}(\lambda_{i0})\int_0^t\varphi_{ij}(t-\tau,\lambda_{i0})\lambda_i(\tau,\lambda_{i0})d\tau+v_j(t)$.

В ряде случаев возможно представление динамической модели в виде системы дифференциальных уравнений.

# 4. МОДЕЛИ ЭВОЛЮЦИИ ФУНКЦИЙ (ПЛОТНОСТЕЙ) РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Как уже отмечалось, предложенная система уравнений Вольтерра второго рода описывает сетевую систему в окрестности точки равновесия. Это связано с необходимостью использования в виде ядер интегральных уравнений плотностей распределения времен пребывания сообщений в соответствующих очередях $ij-\varphi_{ij}(\tau,\lambda_i^0)$, которые, в свою очередь зависят от интенсивностей входных потоков $\varphi_{ij}(\tau,\lambda_i^0)=\varphi_{ij}(\tau,\lambda_i^0(t))$. Поэтому, для описания динамики сети на интервале $[t_0,t_1]$ необходимо задать эволюцию плотностей распределения времен пребывания. $\lambda_j(t)=\Sigma_i(p_{ij}\int_0^t\varphi_{ij}(t-$

$\tau,(\lambda_i^0(t))\lambda_i(\tau)d\tau)+v_j$. Это можно сделать разными способами, например, продолжением решения на интервале или с помощью «термодинамического» приближения. В последнем случае необходимо положить $\varphi_{ij}(t-\tau,(\lambda_i^0(t))=\varphi_{ij}(t-\tau,(\lambda_i^0+\lambda_i(t))$. Тогда будет получена система уравнений для приближенного (термодинамического) описания динамики сетевой системы на интервале $[t_0,t_1]$ $\lambda_j(t)=\Sigma_i(p_{ij}\int_o^t\varphi_{ij}(t-\tau,(\lambda_i^0+\lambda_i(t))\lambda_i(\tau)d\tau)+v_j$.

Естественными моделями эволюции функций (плотностей) распределения являются уравнения Колмогорова. Для многоканальных систем следует использовать уравнения Колмогорова в общем виде. Для этого необходимо научиться вычислять структурные коэффициенты, исходя из системы потоковых уравнений. Для одноканальных систем массового обслуживания M/G/1 уравнение Колмогорова получено Такачем и носит его имя [2].

$$\partial\Phi_{ij}(\omega,t)\partial t=\partial\Phi_{ij}(\omega,t)\partial\omega-(\lambda_{ij0}+\lambda_{ij}(t))\Phi_{ij}(\omega,t)+(\lambda_{ij0}+\lambda_{ij}(t))\int_0^t B(\omega-x)dx\Phi_{ij}(x,t).$$

Здесь $\Phi_{ij}(\omega,t)$ — текущая функция распределения времени пребывания сообщений в очереди $ij$; $B(\omega)$ — функция распределения времени обслуживания сообщений в очереди $ij$. $\lambda_{ijo}$ — интенсивность потока сообщений на входе очереди $ij$ в начальный момент времени. Определяется с помощь статической модели сетевой системы. $\lambda_{ij}(t)$ — изменение интенсивности потока сообщений на входе очереди $ij$ в момент времени $t$. Определяется с помощь динамической модели сетевой системы. Приведенное уравнение связывает изменение во времени функции (плотности) распределения времени пребывания сообщения, поступившего в очередь в момент $t$, с изменением интенсивности потока сообщений, поступающего на вход очереди. Система таких уравнений для всех очередей сети $ij$ позволяет определить все функция распределения времени пребывания сообщений во всех очередях сети и использовать их в системе динамических уравнений сети.

## 5. СВОЙСТВА СТАЦИОНАРНЫХ СЕТЕЙ

**Теорема 1.** *Пусть сеть с потерями задана трехуровневой моделью. Тогда для произвольных стационарных значений интенсивностей входных потоков существует и единственно стационарное распределение интенсивностей потоков в узлах сети.*

**Следствие 1.** *В сети с потерями существует и единственно распределение потоков в очередях сети и каналах связи* $\lambda_{ij}=p_{ij}(\lambda_i)*\lambda_i$.

**Следствие 2.** *Стационарное распределение потоков может быть получено итерационной процедурой, причем скорость сходимости определяется выражением*

$$(\beta^n/(1-\beta))p(\lambda_1,\lambda_2)\Pi_i\|Q(\lambda_i)\|\geq p(\lambda_{k+1},\lambda^*),\ \beta=\max_\lambda\Pi_i\|Q(\lambda_i)\|.$$

**Теорема 2.** *В устойчивых системах массового обслуживания интенсивность потока на выходе есть монотонновозрастающая функция интенсивности потока на входе.*

**Теорема 3.** *При увеличении интенсивности потока на входе одной из очередей сети, интенсивности потоков на входе остальных очередей не уменьшаются.*

**Следствие 3.** *Следствие 3. При увеличении интенсивности входных потоков, поступающих извне в сеть, интенсивности потоков, поступающих в очереди всех узлов сети, не уменьшаются.*

**Теорема 4.** *Пусть сеть без потерь задана трехуровневой моделью. Тогда итерационная процедура $\lambda_1 = v,\ \lambda_2 = Q(\lambda_1)\lambda_1 + v,\ \ldots$ (*) позволяет установить существование стационарного распределения потоков в узлах сети. В случае ее сходимости стационарное распределение потоков в узлах сети существует и единственно. Если последовательность (*) расходится или выходит за область допустимых значений, то стационарного распределения потоков в узлах сети не существует. Хотя бы одна из очередей сети переполняется.*

Пусть $\Phi = \{\phi\}$ — множество отображений пространства потоков $\Lambda$ в пространство показателей, характеристик сети $\Pi = \{\pi\}$. Отображение $\phi$ ставит каждому значению вектора интенсивностей потоков $\lambda$ в сети единственное значение некоторой сетевой характеристики $\pi$ (например, время доставки сообщений, время пребывания сообщений в узлах сети, вероятность образования циклов) $\pi = \phi(\lambda)$.

**Следствие 4.** *Пусть отображение $\psi$ каждому значению стационарных входных потоков $V$ ставит в соответствие сетевой поток $\lambda$. Тогда каждому значению стационарных входных потоков $V$ суперпозиция отображений $\psi$ и $\phi$ ставит в соответствие единственное значение сетевой характеристики $\pi$ определённой на пространстве потоков $\Omega$. $\phi(\psi(v)) = \phi(\lambda) = \pi$.*

**Теорема 5.** *Пусть сеть задана трехуровневой моделью. Тогда интенсивности потоков в узлах и ребрах сети непрерывно зависят от интенсивностей входных потоков $V$ на области допустимых значений.*

**Следствие 5.** *Если отображение $\pi = \phi(\lambda)$ непрерывно, то характеристика сети $\pi$ непрерывно зависит от интенсивности входных потоков $v$.*

**Следствие 6.** *Если отображение $\pi = \phi(\lambda)$ монотоннонеубывающее, то характеристика сети $\pi = \phi(\psi(v))$ монотонно не убывает с ростом интенсивности.*

# 6. ДИНАМИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА СЕТЕЙ

Проблемы устойчивости управляемости, наблюдаемости сетевых систем, в частности, систем связи, вычислительных и информационных сетей, являются одними из наиболее важных проблем, решение которых позволит обосновать не только подходы к проектированию конкретных классов сетей, но и позволит создать единую методологию проектирования разнообразных систем, состоящих из множества взаимосвязанных частей.

Сетевые системы, в общем случае, являются нелинейными системами относительно потоков в узлах и очередях. Рассмотренная ранее система линейных уравнений Вольтерра описывает динамику сетевой системы в точке $\lambda_0$ и ее достаточно малой окрестности. Тем не менее, известные методы анализа нелинейных систем позволяют сводить исследование устойчивости нелинейных систем к исследованию устойчивости их линейных приближений.

**Теорема 6.** *Сетевая система с конечными очередями, описываемая многоуровневой моделью, является устойчивой и асимптотически устойчивой при произвольных входных потоках. Кратковременные изменения входных потоков не могут надолго вывести сетевую систему с конечными очередями из состояния равновесия. С течением времени система возвратится в исходное положение равновесия. Резонансные, колебательные режимы в сетевых системах при неизменных ее структуре, сетевых алгоритмах, параметрах элементов невозможны. При возвращении в состояние равновесия переходной процесс в сетях с конечными очередями протекает монотонно.*

**Теорема 7.** *Сетевая система с бесконечными очередями, описываемая многоуровневой моделью, в общем случае является полуустойчивой, т.е. характеристическое уравнение может иметь корни с нулевыми действительными частями. Корней с положительными действительными частями система с бесконечными очередями, также как и система с конечными очередями, сетевая система иметь не может.*

Таким образом, в сетях с бесконечными очередями

1) могут возникать колебательные процессы, явления резонанса;
2) при возвращении в состояние равновесия переходные процессы могут иметь колебательный характер;
3) для обеспечения устойчивости сетевых систем в них необходимо вводить узлы, очереди, функцией которых был бы «сброс» лишней нагрузки. В качестве таких узлов можно использовать узлы на входе сети.
4) последнее замечание носит, впрочем, чисто теоретический характер. В реальных физически реализуемых сетях все очереди конечны, поэтому все без исключения реальные сети являются устойчивыми;
5) о продолжительности переходных процессов в сетевых системах можно сказать следующее. Продолжительность переходного процесса определяется наименьшим по модулю отрицательным корнем характеристического уравнения. Если обозначить действительную часть наименьшего по модулю отрицательного корня характеристического уравнения через $\Re P_0$ , то продолжительность переходного процесса пропорциональна $(\Re P_0)^{-1}$. Так для линейной динамической модели бесконечной очереди уровня 0,95 установившегося режима процесс достигает через $\tau = 3\tau(\lambda_0)$, где $\tau(\lambda_0)$ — время пребывания сообщений в системе массового обслуживания.

# 7. УСТОЙЧИВОСТЬ СЕТИ СМО

Для обеспечения устойчивости сети СМО необходимо и достаточно выполнение следующего условия $\sum_j p_{ij} < 1$. Данному условию удовлетворяют сети с конечными очередями. Поскольку реальные сети являются сетями с конечными очередями, то из полученного условия дополнительно следует, что для обеспечения устойчивости необходимо:

- запретить образование циклов, размножение сообщений;
- запретить или ограничить использование многоадресных сообщений;
- запретить доступ в сеть абсолютно настойчивым абонентам (отключать абсолютно настойчивых абонентов). Ограничивать очереди в узлах сети, оборудовании связи;
- по истечению определенного времени стирать сообщения;
- при недоступных смежных узлах стирать сообщения.

Кроме того, во всех очередях должны выполняться свойства монотонности и непрерывности.

## 8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенные сведения позволяют сделать следующие основные выводы.

1) Самосогласованная система моделей отображает основные факторы, влияющие на процесс передачи информации: структуру сети; сетевые алгоритмы (процедуры выбора маршрута и управления потоками); правила обслуживания очередей в узлах сети; правила резервирования элементов сети; параметры элементов сети; параметры входных потоков.
2) Модели дают возможность оценивать следующие характеристики сетей аддитивные по пути, проходимому информацией — время доставки информации, время установления соединений, ...; вероятностные — надежность доставки сообщений, вероятность установления соединений, ...; изменения интенсивностей потоков, характеристики переходных процессов в нестационарных сетях.
3) Рассматриваемые модели обеспечивают целостное, единообразное, адекватное, точное и эффективное представление процессов передачи информации в сетях с различными способами коммутаций, различными процедурами выбора маршрутов и управления потоками, дают возможность исследования общих свойств сетей — существования и единственности распределения потоков в узлах и ребрах сети, существования и единственности значений сетевых характеристик, их непрерывной зависимости от входных потоков.
4) Область адекватного использования статической и динамической моделей сетевой системы для расчетов характеристик сетевых систем ограничивается требуемой точностью расчетов. Использование моделей сетевой системы для теоретических исследований, в частности, исследование общих свойств сетей, вопросов устойчивости, управляемости, наблюдаемости носит абсолютный характер.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Шеннон К.* Математическая теория связи. Работы по теории информации и кибернетики // Издательство иностранной литературы, Москва, 1963. С. 243–332.
2. *Мартин Дж.* Системный анализ передачи данных. Проектирование систем передачи данных. – М.: Мир, 1975.

3. *Клейнрок Л.* Вычислительные системы с очередями . Пер. с англ./ Под ред. Б.С. Цыбакова. – М.: Мир, 1979. С. 600.
4. *Мизин И.А. , Богатырёв В.А. , Кулешов А.Л.* Сети коммутации пакетов. - М.: Радио и связь, 1986.
5. *Давыдов Г.Б. , Рогинский В.Н. , Толчан А.Я.* Сети электросвязи. – М.: Связь, 1977. – 380 с.
6. *Самойленко С.И.* Субоптимальные алгоритмы поиска решений в вычислительных сетях. / Сб.: Вопросы кибернетики. – М.: 1979. – вып. 57.
7. *Глушков В.М.* Сети ЭВМ. / Под ред. - М.: Связь, 1977.
8. *Шнепс-Шнеппе М.А.* Системы распределения информации. Методы расчета. - М.: Связь, 1979 - 344 с.
9. *Рогинский В.И.* Теория сетей связи - М.: Радио и связь, 1981.
10. *Бутрименко А.В.* Разработка и эксплуатация сетей ЭВМ. - М.: Финансы и статистика, 1981.
11. *Захаров Г.П.* Методы исследования систем передачи данных. - М.: Радио и связь, 1982.
12. *Бочаров П.П. , Печинкин А.В.* Теория массового обслуживания. // Издательство Российского университета дружбы народов, Москва, 1995.
13. *Пранявичюс Г.И.* Модели и методы исследования вычислительных систем. – Вильнюс: Мокслас, 1982.
14. *Дэвис Д. , Барбер Д. , Прайс Ч. , Соломонидес С.* Вычислительные сети и сетевые протоколы. – М.: Мир, 1982.
15. *Куо Ф.Ф.* Протоколы и методы управления в сетях передачи данных. - М.: Радио и связь, 1985.
16. *Фрэнк Г. , Фриш И.* Сети, связь и потоки. /Пер. с англ./Под ред. Д.А.Поспелова. – М.: Связь, 1978. – С. 448.
17. *Форд Л.Р. , Фалкерсон Д.Р.* Потоки в сетях. – М. :Мир, 1969.
18. *Гуревич И.М.* Определение среднего времени и дисперсии времени передачи информации в сетях связи. – В кн. Модели информационных сетей систем и коммуникационных сетей систем. – Москва, «Наука», 1982.
19. *Гуревич И.М.* Расчет характеристик сетей со случайной процедурой выбора маршрута. – Сб. Вопросы кибернетики. Проблемы теории вычислительных сетей. – АН СССР, Москва, 1983.
20. *Гуревич И.М.* Многоуровневая модель сети связи. – Сб. Вопросы кибернетики. Протоколы и методы коммутации в вычислительных сетях. – АН СССР, Москва, 1986.
21. *Гуревич И.М.* Проектирование специальных систем связи. Динамические модели управления связью. Учебное пособие. ИПК МПСС, Москва, 1989.
22. *Гуревич И.М.* Динамическая модель сети связи. – В сб. Теория телетрафика в систе-мах информатики. – Москва, «Наука», 1989.
23. *Гуревич И.М.* Динамические свойства сетевых систем. – Сб. Вопросы кибернетики. Архитектура и протоколы вычислительных сетей. – АН СССР, Москва, 1990.

24. *Гуревич И.М.* Самосогласованная система многоуровневых статических и динамических моделей сетевых систем. – В кн. Методы доступа и архитектура локальных информационно-вычислительных сетей. – Москва, «Наука», 1992.
25. *Гуревич И.М.* Как сделать Интернет устойчивым. Сборник тезисов докладов. «Инфотех 2004». Севастополь. 2004.
26. *Гуревич И.М.* Законы информатики — основа исследований и проектирования сложных систем связи и управления. Методическое пособие. ЦООНТИ «Экос». Москва, 1989.
27. *Гуревич И.М.* Законы информатики — основа исследования и проектирования сложных систем. Информационные технологии. 11. Приложение. 2003.