Белорусский государственный университет

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе и образовательным инновациям
__________________ О.Г. Прохоренко
«05» июля 2023 г.

Регистрационный № УД – 12598/уч.

Численные методы

Учебная программа учреждения высшего образования по учебной дисциплине для специальности:

1-31 03 04 Информатика
1-31 03 05 Актуарная математика
1-31 03 06 Экономическая кибернетика (по направлениям)
направление специальности:
1-31 03 06-01 Экономическая кибернетика (математические методы и компьютерное моделирование в экономике)
1-98 01 01 Компьютерная безопасность (по направлениям)
направление специальности:
1-98 01 01-01 Компьютерная безопасность (математические методы и программные системы)

2023 г.

Учебная программа составлена на основе образовательных стандартов высшего образования I ступени по специальности 1-31 03 04 Информатика ОСВО 1-31 03 04-2021, по специальности 1-31 03 05 Актуарная математика ОСВО 1-31 03 05-2021, по специальности 1-31 03 06 Экономическая кибернетика ОСВО 1-31 03 06-2021, по специальности 1-98 01 01 Компьютерная безопасность ОСВО 1-98 01 01-2021, типовых учебных планов: №G31-1-029/пр.-тип. от 30.06.2021, №G31-1-027/пр.-тип. от 30.06.2021, №G31-1-028/пр.-тип. от 30.06.2021, №P98-1-003/пр.-тип. и учебных планов: №G31-1-031/уч. от 30.06.2021, №G31-1-021/уч.ин. от 23.07.2021, №G31-1-213/уч. от 22.03.2022, №G31-1-032/уч. от 30.06.2021, №G31-1-033/уч. от 30.06.2021, №G31-1-215/уч. от 22.03.2022, №P 98-1-005/уч. от 23.07.2021, №P 98-1-024/уч.ин. от 09.08.2021, №P 98-1-206/уч. от 22.03.2022.

СОСТАВИТЕЛИ:

А.М. Будник – доцент кафедры вычислительной математики факультета прикладной математики и информатики Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент;

Н.А. Лиходед – профессор кафедры вычислительной математики Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор;

В.И. Репников – заведующий кафедрой вычислительной математики факультета прикладной математики и информатики Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент

РЕЦЕНЗЕНТ:

Г.Ф. Громыко – заведующая отделом вычислительной математики Института математики НАН Беларуси, кандидат физико-математических наук

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой вычислительной математики БГУ
(протокол № 18 от 08.06.2023);

Научно-методическим советом БГУ
(протокол № 9 от 29.06.2023)

Заведующий кафедрой
вычислительной математики ____________ В.И. Репников

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Цели и задачи учебной дисциплины

Цель учебной дисциплины – обучение студентов основам вычислительных методов решения задач алгебры и численного анализа, изучение различных подходов к построению вычислительных алгоритмов, формирование у студентов основ математического мышления.

Задачи учебной дисциплины:

1. Обучение студентов теоретическим основам построения и исследования численных методов и алгоритмов решения задач алгебры и анализа;
2. Ознакомление студентов с классическими и современными методами численного решения задач алгебры и анализа;
3. Формирование у студентов твердых навыков в выборе алгоритмов для решения конкретной задачи (ориентируясь на теоретические характеристики данного алгоритма);
4. Приобретение студентами практического опыта при программной реализации вычислительных алгоритмов.

Место учебной дисциплины в системе подготовки специалиста с высшим образованием. Учебная дисциплина «Численные методы» относится к компоненту учреждения образования.

Учебная программа составлена с учетом межпредметных **связей** и программ с другими дисциплинами. Основой для изучения учебной дисциплины являются дисциплины модуля «Геометрия и алгебра» государственного компонента, модуля «Математический анализ» государственного компонента, модуля «Программирование» государственного компонента, модуля «Дифференциальные уравнения и функциональный анализ» компонента учреждения высшего образования.

Требования к компетенциям

Освоение учебной дисциплины «Численные методы» должно обеспечить формирование следующей ***специализированной*** компетенции:

СК. Использовать методы численного анализа для решения прикладных задач в различных сферах человеческой деятельности, применять навыки программной реализации вычислительных алгоритмов и анализа полученных результатов.

В результате освоения учебной дисциплины студент должен:

знать:

– базовые понятия теории приближенных методов;
– методы исследования свойств приближенных алгоритмов;
– основные методы решения систем линейных алгебраических уравнений;
– методы решения полной и частичной проблем собственных значений;

– методы решения численных уравнений и систем таких уравнений;
– основные методы решения задач теории приближения и их использование в задачах численного интегрирования и дифференцирования;
– методы решения основных типов задач для функциональных уравнений (интегральных, обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с частными производными);

уметь:

– применять численные методы для решения прикладных задач;
– оценивать области применения и эффективность численного метода;
– анализировать точность численного решения;
– использовать основные результаты теории численных методов к решению на компьютере модельных и прикладных задач;

владеть:

– навыками программной реализации методов численного решения основных задач линейной алгебры, возникающих в различных областях естествознания;
– навыками отбора оптимальных алгоритмов для решения прикладных задач с использованием современной компьютерной техники.

Структура учебной дисциплины

Дисциплина изучается в 5-м и 6-м семестре. Всего на изучение учебной дисциплины «Численные методы» отведено:

– для очной формы получения высшего образования – 314 часов, в том числе 170 аудиторных часов, из них:

- в 5 семестре – всего 108 часов, в том числе 68 аудиторных часов, из них: лекции – 34 часа, лабораторные занятия – 30 часов, управляемая самостоятельная работа – 4 часа.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 3 зачетных единицы.

Форма текущей аттестации – зачет.

- в 6 семестре – всего 216 часов, в том числе 102 аудиторных часа, из них: лекции – 68 часов, лабораторные занятия – 30 часов, управляемая самостоятельная работа – 4 часа.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 6 зачетных единиц.

Форма текущей аттестации – зачет и экзамен.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Раздел 1. Методы решения систем линейных алгебраических уравнений

Тема 1.1. Элементы теории погрешностей. Нормы вектора и матрицы. Устойчивость. Обусловленность

Предмет «Численные методы» и основные задачи, излагаемые в указанном курсе. Элементы теории погрешностей. Нормы вектора и матрицы. Число обусловленности и его свойства.

Тема 1.2. Прямые методы решения систем линейных алгебраических уравнений

Общая характеристика проблемы решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Исключения Гаусса без выбора главного элемента. Вычислительная сложность метода исключения. Теорема об LU-разложении. Связь метода Гаусса и LU-разложения. Метод Гаусса с выбором главного элемента. Вычисление определителей и обращение матриц. LDL^T-разложение симметричной матрицы. Разложение Холецкого. Решение систем на основе разложения симметричных матриц. Правая, левая, встречная прогонка. Вычислительная сложность прогонки. Достаточные условия корректности и устойчивости прогонки. Приведение матрицы к треугольному виду методом отражений. Приведение матрицы к треугольному виду методом вращений. QR-разложение, использующее матрицы отражения или вращения. Решение систем с использованием матриц отражения или вращения.

Тема 1.3. Итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений

Вычислительный процесс метода простой итерации. Сходимость, оценка погрешности и скорость сходимости метода простой итерации. Приведение системы уравнений к виду, пригодному для итераций. Метод Якоби. Вычислительный процесс метода Зейделя. Связь метода Зейделя с методом простой итерации. Сходимость, оценка погрешности и скорость сходимости метода Зейделя. Метод Гаусса-Зейделя. Метод последовательной верхней релаксации. Общие сведения о проекционных методах решения СЛАУ. Пространства Крылова. Обобщенный метод минимальных невязок. Метод сопряженных градиентов. Стабилизированный метод бисопряженных градиентов. Понятие предобусловливания. Предобусловливатели Якоби, Гаусса-Зейделя, верхней релаксации. Неполное LU-разложение как предобусловливатель.

Раздел 2. Методы решения задач на собственные значения

Тема 2.1. Прямые методы решения задач на собственные значения

Общая постановка задачи на собственные значения. Методы Данилевского, Крылова. Приведение матрицы к верхней форме Хессенберга методом отражений или методом вращений. Построение собственного многочлена матрицы посредством вычисления числовых определителей.

Тема 2.2. Итерационные методы решения задач на собственные значения

Степенной метод вычисления наибольшего по модулю собственного значения. Метод обратных итераций. Метод вращений Якоби решения симметричной проблемы собственных значений. Базовый QR-алгоритм. Ускорение сходимости QR-алгоритма. Процесс Эйткена.

Раздел 3. Численные методы решения нелинейных уравнений

Тема 3.1. Приближенное решение нелинейного уравнения

Способы отделения корней нелинейного уравнения. Уточнение корней; метод деления отрезка пополам. Вычислительный процесс метода простой итерации решения нелинейных уравнений. Сходимость, оценка погрешности и скорость сходимости метода простой итерации. Вычислительный процесс метода Ньютона решения нелинейных уравнений. Сходимость, оценка погрешности и скорость сходимости метода Ньютона. Метод секущих.

Тема 3.2. Приближенное решение систем нелинейных уравнений

Вычислительные процессы методов простой итерации, Зейделя, Гаусса-Зейделя решения нелинейных систем. Метод Ньютона решения нелинейных систем и его разновидности.

Раздел 4. Приближение функций

Тема 4.1. Интерполирование

Постановка задачи интерполирования и ее разрешимость. Алгебраическое интерполирование. Интерполяционный многочлен в форме Лагранжа. Остаток интерполирования в форме Лагранжа. Разделенные разности и их свойства. Интерполяционный многочлен в форме Ньютона для неравномерной сетки. Конечные разности и их свойства. Интерполяционные формулы Ньютона для равномерной сетки. Многочлены Чебышева. Минимизация остатка интерполирования. Интерполирование с кратными узлами. Многочлен Эрмита. Остатки интерполирования с кратными узлами. Применение интерполирования к вычислению производных. Погрешность формул приближенного дифференцирования.

Тема 4.2. Сплайн-приближения

Понятие сплайн-функции. Сплайн-интерполирование. Построение кубического сплайна. Вариационная и физическая интерпретация кубического сплайна.

Тема 4.3. Наилучшие приближения

Задача о наилучшем приближении в линейных нормированных пространствах. Метод наименьших квадратов. Среднеквадратичные приближения. Нелинейные аппроксимации.

Раздел 5. Численное интегрирование

Тема 5.1. Интерполяционные квадратурные формулы

Квадратурные формулы и связанные с ними задачи. Интерполяционные квадратурные формулы. Квадратурные формулы с равноотстоящими узлами. Простейшие квадратурные формулы Ньютона-Котеса. Квадратурные формулы прямоугольников, трапеций, Симпсона. Оценки точности квадратурных формул. Правило Рунге и автоматический выбор шага интегрирования.

Тема 5.2. Квадратурные формулы типа Гаусса

Квадратурные формулы наивысшей алгебраической степени точности (НАСТ). Критерий и свойства квадратурных формул НАСТ. Теоремы существования, единственности и о свойствах узлов квадратурных формул НАСТ. Частные случаи квадратурных формул НАСТ. Выделение особенностей интегрируемых функций.

Раздел 6. Численное решение интегральных уравнений

Тема 6.1. Методы решения интегральных уравнений Фредгольма и Вольтерра второго рода

Метод механических квадратур решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода. Метод замены ядра на вырожденное. Метод последовательных приближений решения интегрального уравнения Фредгольма второго рода. Метод квадратур и метод последовательных приближений решения интегрального уравнения Вольтерра второго рода.

Раздел 7. Методы численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений

Тема 7.1. Методы решения задачи Коши

Классификация методов решения задачи Коши. Метод Пикара. Построение одношаговых методов способом разложения решения в ряд Тейлора. Численные методы Эйлера и их устойчивость. Способ Рунге-Кутта построения одношаговых правил. Примеры методов Рунге-Кутта. Построение вычислительных правил на основе принципа последовательного повышения порядка точности. Примеры правил типа предиктор-корректор. Главный член погрешности. Правило Рунге. Многошаговые методы. Экстраполяционный и интерполяционный методы Адамса.

Тема 7.2. Методы решения краевых задач

Многоточечные и граничные задачи. Решение линейных граничных задач. Метод стрельбы. Метод редукции к задачам Коши. Методы решения нелинейных задач. Проекционные методы решения граничных задач: методы Галеркина, моментов, наименьших квадратов, Ритца.

Раздел 8. Сеточные методы численного решения дифференциальных уравнений

Тема 8.1. Элементы теории разностных схем

Основные понятия теории разностных схем. Аппроксимация простейших дифференциальных операторов. Постановка разностной задачи. Погрешность аппроксимации. Сходимость и устойчивость разностных схем. Математический аппарат теории разностных схем. Разностные аналоги теорем вложения. Метод энергетических неравенств. Методы замены обыкновенных дифференциальных уравнений и граничных условий разностной схемой. Повышение порядка аппроксимации граничных условий.

Тема 8.2. Разностные схемы для основных задач математической физики

Семейство шеститочечных разностных схем для уравнения теплопроводности. Разностные схемы для уравнения колебаний струны. Разностные схемы для уравнений переноса. Разностные схемы для решения простейших нелинейных задач. Разностная задача Дирихле для уравнения Пуассона и методы ее реализации. Экономичные разностные схемы для многомерного уравнения теплопроводности.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Очная форма получения высшего образования с применением дистанционных образовательных технологий (ДОТ)

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Форма контроля знаний
		Лекции	Практические занятия	Семинарские (практические) занятия	Лабораторные занятия	Количество часов УСР	
1	2	3	4	5	6	7	8
1	**Методы решения систем линейных алгебраических уравнений**	**20**			**18**	**2**	
1.1	Элементы теории погрешностей. Нормы вектора и матрицы. Устойчивость. Обусловленность	4			4		Экспресс-опрос
1.2	Прямые методы решения систем линейных алгебраических уравнений	8			8		Отчет по лабораторной работе, экспресс-опрос
1.3	Итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений	8			6	2	Отчет по лабораторной работе, экспресс-опрос Контрольная работа №1 по темам 1.1-1.3
2	**Методы решения задач на собственные значения**	**8**			**8**	**2**	

2.1	Прямые методы решения задач на собственные значения	4			4		Отчет по лабораторной работе, экспресс-опрос
2.2	Итерационные методы решения задач на собственные значения	4			4	2	Отчет по лабораторной работе, экспресс-опрос Коллоквиум (по разделам 1-2)
3	**Численные методы решения нелинейных уравнений**	**6**			**4**		
3.1	Приближенное решение нелинейного уравнения	4			4		Отчет по лабораторной работе, экспресс-опрос
3.2	Приближенное решение систем нелинейных уравнений	2					Экспресс-опрос
4	**Приближение функций**	**18**			**8**		
4.1	Интерполирование	8			4		Отчет по лабораторной работе с его устной защитой
4.2	Сплайн-приближения	4			2		Экспресс-опрос
4.3	Наилучшие приближения	6			2		Отчет по лабораторной работе с его устной защитой
5	**Численное интегрирование**	**12**			**6**		
5.1	Интерполяционные квадратурные формулы	8			4		Экспресс-опрос

5.2	Квадратурные формулы типа Гаусса	4			2		Контрольная работа №2 по темам 4.1-4.3, 5.1-5.2
6	**Численное решение интегральных уравнений**	**8**			**2**	**2**	
6.1	Методы решения интегральных уравнений Фредгольма и Вольтерра второго рода	8			2	2	Отчет по лабораторной работе с его устной защитой Коллоквиум (по разделам 4-6)
7	**Методы численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений**	**18**			**8**		
7.1	Методы решения задачи Коши	10			4		Экспресс-опрос
7.2	Методы решения краевых задач	8			4		Отчет по лабораторной работе с его устной защитой
8	**Сеточные методы численного решения дифференциальных уравнений**	**12**			**6**	**2**	
8.1	Элементы теории разностных схем	4				2	Отчет по лабораторной работе, экспресс-опрос
8.2	Разностные схемы для основных задач математической физики	8			6		Контрольная работа №3 по темам 7.1-7.2, 8.1-8.2 Коллоквиум (по разделам 7-8)

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Перечень основной литературы

1. Марчук, Г.И. Методы вычислительной математики: учебное пособие / Г.И. Марчук. – 4-е изд., стер. – Санкт-Петербург: Лань, 2022. – 608 с. – Текст : электронный // Лань: электронно-библиотечная система.– URL: https://e.lanbook.com/book/210302.

2. Гулин, А.В. Введение в численные методы в задачах и упражнениях: учебное пособие / А.В. Гулин, О.С. Мажорова, В.А. Морозова. – Москва: ИНФРА-М, 2022. – 368 с. – (Высшее образование: Бакалавриат). – Текст: электронный. – URL: https://znanium.com/catalog/product/1852192.

3. Слабнов, В. Д. Численные методы: учебник для вузов / В. Д. Слабнов. – 2-е изд., стер. – Санкт-Петербург: Лань, 2022. – 392 с. – Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. – URL: https://e.lanbook.com/book/215762.

4. Пантелеев, А. В. Численные методы. Практикум: учебное пособие / А. В. Пантелеев, И. А. Кудрявцева. – Москва: ИНФРА-М, 2023. – 512 с. – Текст: электронный. – URL: https://znanium.com/catalog/product/2002583.

Перечень дополнительной литературы

1. Vorst van der H. Iterative Krylov methods for large linear systems. – Cambridge: Cambridge University Press, 2003. 221 p.

2. Фролов А.В., Воеводин Вад.В., Коньшин И.Н., Теплов А.М. Исследование структурных свойств алгоритма разложения Холецкого: от давно известных фактов до новых выводов // Параллельные вычислительные технологии (ПаВТ'2015): Труды международной научной конференции (Екатеринбург, 31марта – 2 апреля 2015 г.). Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2015. С. 365–369.

3. Открытая энциклопедия свойств алгоритмов. Статья «QR-алгоритм» URL: http://algowiki-project.org

4. Открытая энциклопедия свойств алгоритмов. Статья «Метод Якоби (вращений) для решения спектральной задачи у симметричных матриц» URL: http://algowiki-project.org

5. Открытая энциклопедия свойств алгоритмов. Статья «Метод Гивенса (вращений) QR-разложения квадратной матрицы (вещественный вариант)» URL: http://algowiki-project.org

6. Открытая энциклопедия свойств алгоритмов. Статья «Классическая ортогонализация Грамма-Шмидта» URL: http://algowiki-project.org

7. Открытая энциклопедия свойств алгоритмов. Статья «Прогонка, точечный вариант» URL: http://algowiki-project.org

8. Открытая энциклопедия свойств алгоритмов. Статья «Стабилизированный метод бисопряженных градиентов (BiCGStab)» URL: http://algowiki-project.org

9. Калиткин, Н.Н. Численные методы: в 2 кн. Кн. 1. Численный анализ: учебник для студ. учреждений высш. проф. образования / Н.Н. Калиткин, Е.А. Альшина. – М.: Издательский центр «Академия», 2013 – 304 с.

10. Калиткин, Н. Н. Численные методы: учебное пособие / Н.Н. Калиткин. – БХВ-Петербург, 2011. – 592 с.

11. Самарский, А.А. Численные методы: учебное пособие / А.А. Самарский, А.В. Гулин. – М.: Наука, 1989. – 432 с.

12. Самарский, А.А. Введение в численные методы: Учебное пособие / А.А. Самарский. – Санкт-Петербург: Лань, 2009. – 288 с.

13. Крылов, В.И. Вычислительные методы: Учебное пособие / В.И. Крылов, В.В. Бобков, П.И. Монастырный.– М.: Наука, т. 1– 1976, 304 с., т. 2– 1977, 400 с.

14. Мысовских, И.П. Лекции по методам вычислений / И.П. Мысовских. – С.-Петербург: Изд-во Петербургского университета, 1998. – 472 с.

15. Бахвалов, Н.С. Численные методы. Решение задач и упражнения: учебное пособие / Н.С. Бахвалов, А.А. Корнев, Е.В. Чижонков. – Москва: Бином, 2016. – 352 с.

16. Овсянникова, Н.И. Численные методы: учебное пособие / Н.И. Овсянникова. – М.: ИД Академии Жуковского, 2021. – 84 с.

Перечень рекомендуемых средств диагностики и методика формирования итоговой отметки

Для текущего контроля качества усвоения знаний студентами используется следующий диагностический инструментарий:

– отчеты по лабораторным работам;
– письменные контрольные работы;
– устные экспресс-опросы;
– коллоквиум.

Лабораторные работы, как правило, представляют собой задания, включающие программную реализацию указанного численного метода, проведение вычислительного эксперимента и комментарии по его итогам. Рекомендуемая форма отчетности по лабораторной работе – письменный отчет. Лабораторная работа оценивается по 10-балльной шкале. Отметка за лабораторную работу может быть снижена в случае несвоевременного выполнения.

Письменные контрольные работы проводятся для контроля знаний по одному или нескольким разделам дисциплины. Они включают 4–5 заданий и оцениваются по 10-балльной шкале. В случае неудовлетворительной отметки контрольная работа может быть переписана.

Устный экспресс-опрос студентов проводится в свободной форме в течение лабораторных и лекционных занятий. Его результаты учитываются преподавателем при выставлении рейтинговой оценки в конце семестра.

Коллоквиум проводится в устной форме и оценивается по 10-балльной шкале.

Формой текущей аттестации по дисциплине «Численные методы» учебным планом предусмотрен **зачет** в 5-м семестре и **зачет** и **экзамен** в 6-м семестре.

Используется рейтинговая система оценки знаний студента, дающая возможность проследить и оценить динамику процесса достижения целей обучения. Рейтинговая система предусматривает использование весовых коэффициентов для текущего контроля знаний и текущей аттестации студентов по дисциплине.

Примерные весовые коэффициенты, определяющие вклад текущего контроля знаний в итоговую отметку:

– отчеты по лабораторным работам – 50 %;

– контрольные работы – 20 %;

– коллоквиум – 20 %,

– устный экспресс-опрос – 10 %.

Итоговая отметка по дисциплине рассчитывается на основе отметки текущей успеваемости (рейтинговой системы оценки знаний) и экзаменационной отметки с учетом их весовых коэффициентов. Вес отметки по текущей успеваемости составляет 40 %, экзаменационной отметки – 60 %.

Примерный перечень заданий к лабораторным работам для управляемой самостоятельной работы студентов

Тема 1.3. Итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений

Примерное задание 1. Разработать программу численного решения СЛАУ методом Якоби (1 ч).

Примерное задание 2. Разработать программу численного решения СЛАУ методом релаксации (1 ч).

1. Сгенерировать матрицу и правую часть системы линейных алгебраических уравнений $Ax=f$.

2. В качестве языка программирования выбрать C или C++, для вычислений использовать тип float. Выход из итерационного процесса выполнять, если $\max\limits_{1\le i\le n}\left|x_i^{k+1}-x_i^k\right|<\varepsilon$, либо если $k>k_{max}$. Задать $\varepsilon=0{,}0001$, $k_{max}=1000$.

3. Вывести на печать полученный приближенный вектор решений и номер итерации, при которой достигнута требуемая точность. Предусмотреть сообщение о выходе из итерационного процесса из-за превышения допустимого максимального количества итераций; в этом случае вывести на печать приближенный вектор решений, полученный на итерации k_{max}.

Форма контроля – отчет по лабораторной работе.

Тема 2.2. Итерационные методы решения задач на собственные значения

Примерное задание. Разработать программу вычисления наибольшего по величине модуля собственного значения (случай вещественного не кратного собственного значения) и соответствующего ему собственного вектора симметричной матрицы. (2 ч)

1. Сгенерировать матрицу.

2. Для вычисления наибольшего по модулю собственного значения использовать формулу $\lambda_1 \approx v_i^{k+1}\,\mathrm{sign}\left(u_i^k\right)$.

3. Для вычисления соответствующего собственного вектора использовать формулу $\lambda_1 \approx u^k$.

Форма контроля – отчет по лабораторной работе.

Тема 6.1. Методы решения интегральных уравнений Фредгольма и Вольтерра второго рода

Примерное задание. Разработать программу численного решения интегральных уравнений методами механических квадратур и последовательных приближений. (2 ч)

1. Сгенерировать входные данные: отрезок интегрирования, ядро интегрального уравнения, неоднородность, квадратурную формулу.

2. Для решения интегрального уравнения Фредгольма использовать метод механических квадратур на равномерной сетке.

3. Для решения интегрального уравнения Вольтерра использовать метод последовательных приближений на равномерной сетке.

Форма контроля – отчет по лабораторной работе.

Тема 8.1. Элементы теории разностных схем

Примерное задание. Разработать программу численного решения третьей краевой задачи для одномерного стационарного уравнения теплопроводности. (2 ч)

1. Сгенерировать входные данные: отрезок интегрирования, коэффициенты исходного уравнения и граничных условий.

2. Для решения поставленной задачи методом баланса построить наилучшую консервативную разностную схему.

3. Реализовать на ЭВМ полученную разностную схему и вывести на печать сеточное решение.

Форма контроля – отчет по лабораторной работе.

Примерная тематика лабораторных занятий

5-й семестр

Занятие 1. Задачи теории погрешностей.

Занятие 2. Нормы вектора и матрицы. Число обусловленности и его свойства

Занятие 3. Метод Гаусса и его модификации.

Занятие 4. Решение СЛАУ с симметричными матрицами.

Занятие 5. Метод прогонки.

Занятие 6. Методы решения СЛАУ, основанные на ортогональных преобразованиях (отражений, вращений).

Занятие 7. Метод простой итерации.

Занятие 8. Метод Зейделя.

Занятие 9. Предобусловливание.

Занятие 10. Итерационные методы вариационного типа.

Занятие 11. Метод Данилевского.

Занятие 12. Метод Крылова.

Занятие 13. Прямые методы отражений и вращений.

Занятие 14. Итерационный степенной метод.

Занятие 15. Метод простых итераций для нелинейных уравнений.

Занятие 16. Метод Ньютона и его видоизменения для нелинейных уравнений.

Занятие 17. Итерационные методы решения нелинейных систем.

6-й семестр

Занятие 1. Интерполяционное приближение функций. Многочлены Лагранжа и Ньютона. Интерполирование при равноотстоящих узлах. Интерполирование с кратными узлами

Занятие 2. Минимизация остатка интерполирования. Многочлены Чебышева.

Занятие 3. Наилучшие приближения функций. Метод наименьших квадратов.

Занятие 4. Сплайн-приближения.

Занятие 5. Квадратурные формулы Ньютона-Котеса. Формулы прямоугольников, трапеций и Симпсона.

Занятие 6. Составные квадратурные формулы. Правило Рунге практической оценки погрешности.

Занятие 7. Квадратурные формулы наивысшей алгебраической степени точности. Формулы Гаусса.

Занятие 8. Методы решения интегральных уравнений.

Занятие 9. Численные методы решения задачи Коши: одношаговые и многошаговые методы.

Занятие 10. Понятие аппроксимации и устойчивости методов решения задачи Коши. Способы их исследования

Занятие 11. Методы решения граничных задач, основанные на сведении к решению задачи Коши.

Занятие 12. Проекционные методы решения граничных задач.

Занятие 13. Аппроксимация дифференциальных задач разностными.

Занятие 14. Устойчивость разностных схем и методы ее исследования.

Занятие 15. Разностные схемы для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Занятие 16. Разностные схемы для уравнений теплопроводности и колебаний.

Занятие 17. Разностные схемы для уравнения Пуассона.

Рекомендуемая тематика контрольных работ и коллоквиумов:

5-й семестр

1) Контрольная работа № 1. Раздел 1. «Методы решения систем линейных алгебраических уравнений». Тематика «Прямые и итерационные методы решения линейных систем».

2) Коллоквиум. Раздел 1. «Методы решения систем линейных алгебраических уравнений». Тематика «Прямые и итерационные методы решения линейных систем». Раздел 2. «Методы решения задач на собственные значения». Тематика «Прямые и итерационные методы решения проблемы собственных значений».

6-й семестр

3) Контрольная работа № 2. Раздел 4. «Приближение функций». Тематика «Методы построения интерполяционных полиномов». Раздел 5. «Численное интегрирование». Тематика «Интерполяционные квадратурные формулы».

4) Контрольная работа № 3. Раздел 7. «Методы численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений». Тематика «Численные методы решения задачи Коши для ОДУ». Раздел 8. «Сеточные методы численного решения дифференциальных уравнений». Тематика «Разностные схемы для основных задач математической физики».

5) Коллоквиум. Раздел 7. «Методы численного решения обыкновенных дифференциальных уравнений». Тематика «Методы решения задачи Коши и краевых задач». Раздел 8. «Сеточные методы численного решения дифференциальных уравнений». Тематика «Методы построения разностных схем и способов их реализации».

Описание инновационных подходов и методов к преподаванию учебной дисциплины

При организации занятий используется ***практико-ориентированный подход***, который предполагает:

- освоение содержания образования через решения практических задач;
- приобретение навыков эффективного выполнения разных видов профессиональной деятельности.

Также при организации образовательного процесса используется ***метод группового обучения***, который представляет собой форму организации учебно-познавательной деятельности обучающихся, предполагающую функционирование разных типов малых групп, работающих как над общими, так и специфическими учебными заданиями.

Методические рекомендации по организации самостоятельной работы обучающихся

Для организации самостоятельной работы студентов по учебной дисциплине следует использовать современные информационные технологии: разместить в сетевом доступе комплекс учебных и учебно-методических материалов (учебно-программные материалы, методические указания к лабораторным занятиям, материалы текущего контроля и текущей аттестации, позволяющие определить соответствие учебной деятельности обучающихся требованиям образовательных стандартов высшего образования и учебно-программной документации, в т.ч. вопросы для подготовки к зачету, экзамену, список рекомендуемой литературы, информационных ресурсов и др.). Эффективность самостоятельной работы студентов проверяется в ходе текущего и итогового контроля знаний. Для общей оценки качества усвоения студентами учебного материала рекомендуется использование рейтинговой системы.

Примерный перечень вопросов к зачету (5-й семестр)

1. Абсолютная погрешность. Относительная погрешность. Верные значащие цифры числа. Погрешность числа, занесенного в память компьютера. Абсолютная погрешность суммы и разности приближенных чисел. Относительная погрешность суммы и разности приближенных положительных слагаемых. Потеря точности при вычитании близких чисел.
2. Общая формула вычисления погрешности. Относительная погрешность произведения и частного приближенных чисел, степени приближенного числа. Обратная задача теории погрешностей.
3. Блочные матрицы. Операции над блочными матрицами. Использование блочных матриц (перечислить, при доказательстве каких теорем и/или для чего использовались блочные матрицы).
4. Понятие о локальности алгоритмов. Использование блочных алгоритмов для улучшения локальности.
5. Нормы векторов. Нормы матриц. Норма матрицы, подчиненная данной норме вектора. Нормы матриц, подчиненные каноническим векторным нормам (без доказательств).
6. Нормы матриц, подчиненные каноническим векторным нормам (с доказательствами). Свойства матричных норм.
7. Понятие об устойчивости по входным данным задачи. Понятие об обусловленности задачи. Устойчивость численного алгоритма. Принцип эквивалентных возмущений. Устойчивость задачи решения СЛАУ. Понятие о корректной постановке задачи.

8. Число обусловленности задачи. Число обусловленности матрицы. Свойства числа обусловленности.

9. Исключения Гаусса без выбора главного элемента. Вычислительная сложность метода исключения.

10. Теорема об LU-разложении. Связь метода Гаусса и LU-разложения.

11. Метод Гаусса с выбором главного элемента. Об устойчивости метода Гаусса. Вычисление определителей и обращение матриц методом Гаусса.

12. LDL^T-разложение симметричной матрицы (LU-разложение, использующее симметрию матрицы). Получение элементов матриц LDL^T-разложения (какой-либо алгоритм для получения разложения). Решение СЛАУ на основе LDL^T-разложения матриц. Вычислительная сложность алгоритмов решения систем с симметричными матрицами.

13. Разложение Холецкого (теорема и какой-либо один алгоритм или формулы для получения разложения). Решение СЛАУ на основе разложения симметричных матриц. Вычислительная сложность алгоритмов решения систем с симметричными матрицами.

14. Правая прогонка: прямая прогонка, обратная прогонка, прогоночные коэффициенты, вычислительная сложность прогонки. Левая прогонка. Встречная прогонка.

15. Достаточные условия корректности и устойчивости прогонки.

16. LU-разложение трехдиагональной матрицы. Решение нескольких систем с одной и той же матрицей.

17. Матричная прогонка.

18. Матрица отражения. Свойства матрицы отражения.

19. Приведение матрицы к треугольному виду методом отражений.

20. QR-разложение, использующее матрицы отражения (считать, что предварительно матрица приведена к треугольному виду методом отражений).

21. Решение СЛАУ методом отражений. Обусловленность матрицы системы после ортогонального преобразования.

22. Матрица вращения. Приведение матрицы к треугольному виду методом вращений. QR-разложение, использующее матрицы вращения.

23. Приведение матрицы к треугольному виду методом вращений. Решение СЛАУ методом вращений.

24. Вычислительный процесс метода простой итерации решения СЛАУ. Связь последовательности приближений метода с матричным рядом. Сходимость матричного ряда. Сходимость метода простой итерации решения СЛАУ.

25. Оценка погрешности и скорость сходимости метода простой итерации решения СЛАУ. Скорость сходимости метода Якоби. «

26. Приведение СЛАУ к виду, пригодному для итераций. Метод Якоби (без теоремы о скорости сходимости). Метод, использующий преобладание в матрице диагональных элементов в столбце. Метод, использующий положительную определённость матрицы и трансформацию Гаусса.

27. Вычислительный процесс метода Зейделя. Связь метода Зейделя с методом простой итерации. Сходимость метода Зейделя. Оценка погрешности и скорость сходимости метода Зейделя.

28. Метод Гаусса-Зейделя. Метод последовательной верхней релаксации (SOR).

29. Общие сведения о проекционных методах решения СЛАУ. Пространства Крылова. Обобщенный метод минимальных невязок. Метод сопряженных градиентов. Стабилизированный метод бисопряженных градиентов.

30. Метод полной ортогонализации. Обобщенный метод минимальных невязок.

31. Метод сопряженных градиентов. Стабилизированный метод бисопряженных градиентов.

32. Понятие предобусловливания. Предобусловливатели Якоби, Гаусса-Зейделя, верхней релаксации. Неполное LU-разложение.

33. Предобусловленный обобщенный метод минимальных невязок.

34. Связь между канонической формой Фробениуса и характеристическим многочленом матрицы. Регулярный случай приведения матрицы к канонической форме Фробениуса.

35. Нерегулярные случаи приведения матрицы к канонической форме Фробениуса. Вычисление собственных векторов методом Данилевского.

36. Получение собственного многочлена матрицы методом Крылова. Получение делителя собственного многочлена методом Крылова. Минимальный аннулирующий вектор многочлен матрицы.

37. Вычисление собственных векторов методом Крылова.

38. Диагонализируемая матрица. Базовые итерации степенного метода. Нормировка векторов итерационной последовательности.

39. Степенной метод: случай вещественного и не кратного наибольшего по модулю собственного значения.

40. Степенной метод: случай вещественного и кратного наибольшего по модулю собственного значения. Степенной метод: случай вещественных и противоположных по знаку наибольших по модулю собственных значений.

41. Метод обратных итераций (на основе степенного метода).

42. Приведение матрицы к верхней форме Хессенберга методом отражений.

43. Приведение матрицы к верхней форме Хессенберга методом вращений.

44. Построение собственного многочлена матрицы посредством вычисления числовых определителей; кубическая сложность алгоритма построения в случае почти треугольной матрицы.

45. Понятие о методе вращений Якоби решения симметричной проблемы собственных значений. Базовый QR-алгоритм.

46. Ускорение сходимости QR-алгоритма.

47. Способы отделения корней нелинейного уравнения. Уточнение корней нелинейного уравнения; метод деления отрезка пополам.

48. Вычислительный процесс метода простой итерации решения нелинейных уравнений. Сходимость метода простой итерации решения нелинейных уравнений. Геометрическая иллюстрация итерационного процесса.

49. Оценка погрешности и скорость сходимости метода простой итерации решения нелинейных уравнений. Приемы приведения уравнений к виду, пригодному для итераций.

50. Вычислительный процесс метода Ньютона решения нелинейных уравнений. Сходимость метода Ньютона. Геометрическая иллюстрация итерационного процесса метода Ньютона.

51. Оценка погрешности и скорость сходимости метода Ньютона. Метод секущих.

52. Вычислительные процессы методов простой итерации, Зейделя, Гаусса-Зейделя решения нелинейных систем.

53. Метод Ньютона решения нелинейных систем и его разновидности.

Примерный перечень вопросов к экзамену (6-й семестр)

1. Среднеквадратичное приближение. Метод наименьших квадратов.
2. Метод наименьших квадратов для табличных функций.
3. Алгебраическая интерполяция. Теорема единственности.
4. Интерполяционный многочлен в форме Лагранжа.
5. Остаток интерполяции в форме Лагранжа.
6. Разделенные разности.
7. Интерполяционный многочлен в форме Ньютона.
8. Многочлены Чебышева. Корни, свойства корней, точки экстремума.
9. Ортогональность многочленов Чебышева.
10. Многочлены Чебышева как наименее уклоняющиеся от нуля. Лемма о многочленах, наименее уклоняющихся от нуля.
11. Минимизация оценки остатка интерполяции.
12. Интерполяционный многочлен Эрмита.
13. Частные случаи многочлена Эрмита.
14. Сплайн-интерполяция.
15. Кубический сплайн. Алгоритм построения.
16. Свойства существования, единственности и сходимости кубического сплайна.
17. Вариационная и физическая интерпретация кубического сплайна.
18. Квадратурные формулы (КФ) и связанные с ними проблемы.
19. Интерполяционные квадратурные формулы (ИКФ). Критерий ИКФ.
20. КФ левых и правых прямоугольников. КФ трапеций.
21. КФ средних.
22. КФ Симпсона.
23. Априорная оценка погрешности квадратурных формул.
24. Апостериорная оценка погрешности квадратурных формул. Правило Рунге.

25. Квадратурные формулы наивысшей алгебраической степени точности (НАСТ). Критерий КФ НАСТ.

26. Теорема существования и единственности КФ НАСТ.

27. Теорема о свойствах узлов КФ НАСТ.

28. Свойства КФ НАСТ.

29. Частные случаи КФ НАСТ.

30. Метод квадратур решения интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода.

31. Метод квадратур решения интегрального уравнения Вольтерра 2-го рода.

32. Методы Эйлера и трапеций решения задачи Коши.

33. Методы Рунге-Кутты. Общая схема.

34. Методы Рунге-Кутты 1-го и 2-го порядков аппроксимации.

35. Применение методов Рунге-Кутты в случае системы ОДУ 1-го порядка.

36. Применение методов Рунге-Кутты в случае ОДУ 2-го порядка.

37. Понятие устойчивости и сходимости численных методов решения задачи Коши. Примеры исследования устойчивости.

38. Оценка порядка точности явных одношаговых методов для задачи Коши.

39. Оценка точности численного решения задачи Коши по правилу Рунге.

40. Метод стрельбы в случае двух нелинейных ОДУ 1-го порядка.

41. Метод стрельбы в случае двух линейных ОДУ 1-го порядка.

42. Сведение решения краевой задачи к решению вариационной задачи.

43. Метод Ритца.

44. Метод Галеркина решения краевой задачи для ОДУ.

45. Сеточный метод Галеркина.

46. Разностная аппроксимация простейших дифференциальных операторов для ОДУ и ДУЧП.

47. Постановка разностных задач для ОДУ и ДУЧП. Погрешность аппроксимации разностных схем.

48. Повышение порядка аппроксимации разностных схем.

49. Аппроксимация граничных и начальных условий.

50. Корректность и устойчивость разностных схем для ОДУ и ДУЧП. Теорема сходимости.

51. Принцип максимума. Метод гармоник.

52. Семейство двухслойных схем для одномерного уравнения теплопроводности.

53. Погрешность аппроксимации двухслойных схем для уравнения теплопроводности.

54. Исследование устойчивости двухслойных схем для уравнения теплопроводности с помощью принципа максимума.

55. Исследование устойчивости двухслойных схем для уравнения теплопроводности методом гармоник.

56. Разностные схемы для уравнения теплопроводности в случае третьей краевой задачи.

57. Семейство трехслойных схем для уравнения колебаний струны.

58. Разностная задача Дирихле-Неймана для уравнения Пуассона в прямоугольнике.

ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УВО

Название учебной дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы учреждения высшего образования по учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)
Параллельные и распределенные вычисления	Вычислительной математики	нет	Изменений не требуется (протокол № 18 от 08.06.2023 г.)

ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ ПО ИЗУЧАЕМОЙ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ

на _____/_____ учебный год

№ п/п	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры вычислительной математики (протокол №___ от _________)

Заведующий кафедрой

<u>доцент, канд. ф.-м. н.</u> _____________ *<u>В.И. Репников</u>*

(степень, звание) (подпись) (И.О.Фамилия)

УТВЕРЖДАЮ

Декан факультета

<u>доцент, канд. ф.-м. н.</u> _____________ *<u>Ю.Л. Орлович</u>*