**БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

**УТВЕРЖДАЮ**
Проректор по учебной работе и
образовательным инновациям
___________________ О.Г. Прохоренко
«05» июля 2023 г.

Регистрационный № УД - 604/б.

# ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ АЛГЕБРЫ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

**Учебная программа учреждения высшего образования по учебной дисциплине для специальности:**

**6-05-0533- 13 Механика и математическое моделирование**

Минск, 2023

Учебная программа составлена на основе примерного учебного плана регистрационный № 6-05-05-031/пр. от 30.01.2023, учебных планов БГУ № 6-54 – 61/01 от 15.05.2023 и № 6-54 – 62/01 от 15.05.2023.

**СОСТАВИТЕЛИ:**

**Сергей Гаврилович Кононов** – доцент кафедры геометрии, топологии и методики преподавания математики Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент;

**Владимир Леонидович Тимохович** – доцент кафедры геометрии, топологии и методики преподавания математики Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент;

**Константин Александрович Иванов** – старший преподаватель кафедры высшей алгебры и защиты информации Белорусского государственного университета.

**РЕЦЕНЗЕНТЫ:**

**Владимир Владимирович Шлыков** – профессор кафедры математики и методики преподавания математики учреждения образования «Белорусский государственный педагогический университет имени Максима Танка», доктор педагогических наук, профессор;

**Геннадий Васильевич Матвеев** – доцент кафедры высшей математики факультета прикладной математики и информатики Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент.

**РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:**

Кафедрой геометрии, топологии и методики преподавания математики
(протокол № 12 от 23.05.2023);

Научно-методическим советом БГУ
(протокол № 9 от 29.06.2023)

Заведующий кафедрой
геометрии, топологии и
методики преподавания математики Д.Ф. Базылев

# ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

«*Дополнительные главы алгебры и аналитической геометрии*» – учебная дисциплина, содержание которой позволяет студентам, обучающимся по специальности 6-05-0533-13 «Механика и математическое моделирование», получить алгебраические и геометрические сведения, необходимые для работы с билинейными и квадратичными формами и евклидовыми векторными и точечными пространствами.

**Цели и задачи учебной дисциплины**

Главными **целями** учебной дисциплины «*Дополнительные главы алгебры и аналитической геометрии*» являются:

- изучение билинейных и квадратичных форм на векторных пространствах и геометрии евклидовых точечных пространств, являющихся наиболее полными обобщениями трехмерного евклидова пространства;
- приобретение студентами достаточного объема знаний, навыков и умений в области полилинейной алгебры и многомерной геометрии для решения метрических задач в пространствах многих измерений.

Для достижения этих целей решаются следующие **задачи:**

- вводятся понятия билинейных и квадратичных форм на векторных пространствах. Основное внимание уделяется случаю векторных пространств над полем вещественных чисел;
- определяются понятия евклидовых векторных и точечных пространств и изучаются их особенности, связанные с наличием скалярного произведения;
- излагаются методы решения метрических задач (вычисления расстояний и углов между плоскостями и объемов некоторых фигур, в евклидовых пространствах многих измерений.

**Место учебной дисциплины** в системе подготовки специалиста с высшим образованием.

Учебная дисциплина «*Дополнительные главы алгебры и аналитической геометрии*» относится **к дополнительным видам обучения** компонента учреждения образования.

**Требования к компетенциям**

Освоение учебной дисциплины «*Дополнительные главы алгебры и аналитической геометрии*» должно обеспечить формирование следующей **базовой профессиональной компетенции:**

БПК - 9. Применять основные алгебраические и геометрические понятия, конструкции и методы для решения теоретических и прикладных задач математики и механики.

В соответствии с образовательным стандартом в результате изучения дисциплины обучающийся должен:

**знать:**

– понятия билинейных и квадратичных форм на векторных пространствах, знакоопределенные квадратичные формы на вещественных векторных пространствах;

– строение евклидовых векторных и точечных пространств, их метрику и типы взаимного расположения плоскостей;

– понятия $n$-мерных параллелепипеда, симплекса, сферы, шара и типы задач, решаемых для этих фигур.

**уметь:**

– строить матрицу билинейной и квадратичной форм, вычислять сигнатуру вещественной квадратичной формы;

– задавать $к$-мерные плоскости параметрически и общими уравнениями, находить расстояния и углы между двумя плоскостями;

– вычислять объемы $n$-мерных параллелепипедов, симплексов и шаров;

**владеть:**

– методами решения основных задач многомерной евклидовой геометрии.

**Структура учебной дисциплины**

Дисциплина изучается во 2 семестре очной формы получения высшего образования. Всего на изучение учебной дисциплины «Дополнительные главы алгебры и аналитической геометрии» отведено 60 часов, в том числе 36 аудиторных часов, из них: лекции – 16 часов, практические занятия –16 часов, управляемая самостоятельная работа – 4 часа.

Формы промежуточной аттестации – зачет.

# СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

## Раздел 1. Билинейные и квадратичные формы

### Тема 1.1. Билинейные формы

Билинейная форма на векторном пространстве, ее матрица. Изменение матрицы билинейной формы при изменении базиса, ранг формы. Симметрические и кососимметрические билинейные формы, их матрицы.

### Тема 1.2. Квадратичные формы

Квадратичная форма и ее матрица, существование и единственность полярной билинейной формы. Канонический вид билинейной и квадратичной формы. Алгоритм Лагранжа приведения квадратичной формы к каноническому виду. Нормальный вид вещественной и комплексной квадратичных форм. Закон инерции вещественных квадратичных форм. Знакоопределенные квадратичные формы, критерий Сильвестра.

## Раздел 2. Евклидовы пространства

### Тема 2.1. Евклидовы векторные пространства

Понятие евклидова векторного пространства, примеры. Ортонормированные базисы и ортогональные матрицы. Ортогональное дополнение подпространства. Матрица Грама системы векторов.

### Тема 2.2. Евклидовы точечные пространства

Понятие $n$-мерного евклидова точечного пространства $\mathbf{E}^n$. Ортонормированные реперы. Плоскости в пространстве $\mathbf{E}^n$, ортогональность плоскостей. Шары, сферы, симплексы, параллелепипеды в евклидовых пространствах. Вычисление расстояний и величин углов между двумя плоскостями. Объемы параллелепипедов и симплексов.

### Тема 2.3 Движения и евклидова геометрия

Группа движений пространства $\mathbf{E}^n$. Евклидово эквивалентные фигуры и евклидова геометрия.

### Тема 2.4. Фигуры второго порядка в евклидовых пространствах

Каноническое уравнение квадрики в пространстве $\mathbf{E}^n$. Приведение общего уравнения поверхности второго порядка в пространстве $\mathbf{E}^3$ к каноническому виду.

## УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Очная форма получения высшего образования с применением дистанционных образовательных технологий (ДОТ)

| Номер раздела, темы | Название раздела, темы | Количество аудиторных часов | | | | | Иное | Форма контроля знаний |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | Лекции | Лабораторные занятия | Семинарские занятия | Практические занятия | Количество часов УСР | | |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| **1** | **Билинейные и квадратичные формы** | **8** | | | **4** | **2** | | |
| 1.1 | Билинейные формы | 4 | | | 2 | | | Опрос |
| 1.2 | Квадратичные формы | 4 | | | 2 | 2 | | Контрольная работа |
| **2** | **Евклидовы пространства** | **8** | | | **12** | **2** | | |
| 2.1 | Евклидовы векторные пространства | 2 | | | 4 | | | Опрос |
| 2.2 | Евклидовы точечные пространства | 2 | | | 4 | 2 | | Контрольная работа |
| 2.3 | Движения и евклидова геометрия | 2 | | | | | | Опрос |
| 2.4 | Фигуры второго порядка в евклидовых пространствах | 2 | | | 4 | | | Отчет по индивидуальному заданию |
| | **Всего по учебной дисциплине** | **16** | | | **16** | **4** | | |

## ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

### Перечень основной литературы

1. *Александров, П. С.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры : учебник для вузов / П. С. Александров. - 4-е изд., стер. - Санкт-Петербург : Лань, 2022. - 512 с. - URL: https://e.lanbook.com/book/242861.
2. *Березкина Л.Л.* Аналитическая геометрия и линейная алгебра: учебник. – Минск, РИВШ, 2022. – 412 с.
3. *Кононов, С. Г.* Аналитическая геометрия : учеб. пособие для студ. учреждений высш. образования по математическим спец. / С. Г. Кононов ; БГУ. - Минск : БГУ, 2014. - 238 с. - http://elib.bsu.by/handle/123456789/113440.
4. *Клетеник, Д. В.* Сборник задач по аналитической геометрии : учебное пособие / Д. В. Клетеник ; под ред. Н. В. Ефимова. - Изд. 17-е, стер. - Санкт-Петербург ; Москва ; Краснодар : Лань, 2022. - 223 с. - URL: https://e.lanbook.com/book/187823.
5. *Постников М. М.* Аналитическая геометрия / Постников М. М. - 3-е изд.,испр. - Санкт-Петербург : Лань, 2022. - 416 с. - URL: https://e.lanbook.com/book/210347

### Перечень дополнительной литературы

6. *Бурдун А.А., Мурашко Е.А., Толкачев М.М., Феденко А.С.* Сборник задач по алгебре и аналитической геометрии: учебное пособие. – Минск: Университетское, 1999. – 302 с.
7. *Моденов П.С., Пархоменко А.С.* Сборник задач по аналитической геометрии: учебное пособие. – М., Наука, 1976.– 384 с.
8. *Кострикин А.И., Манин Ю.И.* Линейная алгебра и геометрия: учебное пособие. – М., Наука, 1986. – 303 с.
9. *Постников М.М.* Лекции по геометрии. Семестр I. Аналитическая геометрия: учебное пособие. – М., Наука, 1979. – 336 с.
10. *Милованов М.В., Тышкевич Р.И., Феденко А.С.* Алгебра и аналитическая геометрия: в 2 ч.: учебное пособие. – Минск: Вышэйшая школа, 1984. – Ч. 1. – 302 с.
11. *Милованов М.В., Толкачев М.М., Тышкевич Р.И., Феденко А.С.* Алгебра и аналитическая геометрия: в 2 ч.: учебное пособие. – Минск: Вышэйшая школа, 1987. – Ч. 2. – 269 с.

## Перечень рекомендуемых средств диагностики и методика формирования итоговой отметки

Объектом диагностики компетенций студентов являются знания, умения, полученные ими в результате изучения учебной дисциплины. Выявление учебных достижений студентов осуществляется с помощью мероприятий текущего контроля и промежуточной аттестации.

Для оценки соответствия достижений и уровня знаний студентов требованиям программы используется следующий диагностический инструментарий:

- контрольная работа;
- устный опрос;
- отчет по индивидуальным заданиям.

При оценивании устных ответов учитываются полнота, глубина, обоснованность и точность изложения материала, степень осознанности изученного материала, подтверждение теоретических фактов примерами, грамотность речи.

Оценка за выполнение индивидуальных заданий отражает степень самостоятельности выполнения задания, соответствие теоретическим положениям, творческий подход.

Формой промежуточной аттестации по дисциплине «Дополнительные главы алгебры и аналитической геометрии» учебным планом предусмотрен **зачет** во втором семестре.

## Примерный перечень заданий для управляемой самостоятельной работы студентов

**Тема 1.2.** Квадратичные **формы. (2 ч)**

**Примерный перечень заданий для контрольной работы 1.**

1. Пусть $A$ – матрица невырожденной билинейной формы $\Phi$ на вещественном пространстве $V$ размерности $n$, где $n$– нечетно. Существует ли другой базис $V$, в котором матрицей $\Phi$ является $-A$? Что будет в случае четного $n$?
2. Доказать, что если $f(x), g(y)$ – линейные формы на векторном пространстве $V$, то отображение $\Phi: V \times V \to V$, $\Phi(x, y) = f(x)g(y)$, является билинейной формой на $V$ и $\operatorname{rank} \Phi = 1$. Является ли $\Phi$ симметрической, кососимметрической?
3. Пусть $\Phi$ – билинейная форма на векторном пространстве $V$ и пусть $W$ – множество всех векторов $x \in V$ таких, что $\Phi(x, y) = 0$ для всех векторов

$y \in V$. Доказать, что $W$ – подпространство в $V$ и справедлива формула $\operatorname{rank} \Phi = \dim V - \dim W$.

4. Пусть $\Phi$ – билинейная форма на векторном пространстве $V$, $V_1$ – подпространство в $V$ и $\Phi_1$ – ограничение $\Phi$ на $V_1$. Предположим, что $\Phi_1$ – невырожденная билинейная форма. Доказать, что $\operatorname{rank} \Phi \geq \dim V_1$.
5. Пусть $\Phi$ – билинейная форма на векторном пространстве $V$ и $\operatorname{rank} \Phi = 1$. Доказать, что существуют линейные формы $f(x), g(y)$ на векторном пространстве $V$ такие, что $\Phi(x, y) = f(x) g(y)$.
6. Пусть $\Phi$ – симметрическая билинейная форма на векторном пространстве $V$, а $\Phi_1$ – кососимметрическая билинейная форма на $V$. Предположим, что $\Phi + \Phi_1 = 0$. Доказать, что $\Phi = \Phi_1 = 0$.
7. Найти полярную билинейную форму $F$ для квадратичной формы $f(x) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 - 6x_1x_3 + 4x_2x_3 - x_3^2$. Записать матрицу $F$. Вычислить $F(x, y)$, где $x = (1, i, 1)$, $y = (2, -1, -i)$.
8. Найти симметрическую билинейную форму $\Phi$, ассоциированную с квадратичной формой $q(x) = F(x, x)$, где $F(x, y) = -x_1y_2 + x_2y_1 - 2x_2y_2 + 3x_2y_3 - x_3y_1 + 2x_3y_3$. Записать матрицу $\Phi$. Вычислить $\Phi(x, y)$, где $x = (2, 1-i, 0)$, $y = (0, -1, i)$.
9. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ некоторой билинейной формы $F(x, y)$.

   Записать эту билинейную форму $F(x, y)$, а также соответствующую ей квадратичную форму $f(x) = F(x, x)$ и ее матрицу.
10. Привести квадратичную форму $q(x) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$ к каноническому виду над полями вещественных и комплексных чисел. Над полем R найти ее положительный и отрицательный индекс инерции, сигнатуру и ранг.
11. Пусть – положительный индекс инерции вещественной квадратичной формы и – ее отрицательный индекс инерции. Пусть заданы положительных чисел и отрицательных чисел . Доказать, что существует базис, в котором форма принимает вид .
12. Привести данную квадратичную форму к каноническому виду с помощью метода Лагранжа. Найти ранг, положительный и отрицательный индексы инерции и сигнатуру этой формы. .

13. Выясните, какие из квадратичных форм , , эквивалентны между собой а) над ; б) над .
14. При каких значениях данная квадратичная форма положительно определена, отрицательно определена. .
15. Найдите все значения , при которых квадратичная форма отрицательно определена.
16. При каких значениях квадратичная форма положительно определена, отрицательно определена.
17. Исследовать на знакоопределенность квадратичную форму .
18. При каких значениях квадратичная форма является положительно определенной?
19. Найти все значения , при которых квадратичная форма отрицательно определена.

Форма контроля - контрольная работа.

**Тема 2.2. Евклидовы точечные пространства** (2ч.)

**Примерный перечень заданий для контрольной работы 2.**

**1.** Напишите параметрические уравнения плоскости, являющейся аффинной оболочкой точек
$A=(1,1,-2,2), B=(-3,1,4,4), C=(-1,2,3,6), D=(0,2,-1,3), E=(-1,0,1,2)$.

**2.** Даны плоскости $\mathrm{B}^2=M_0+W^2$ и $\mathrm{P}^2=N_0+U^2$ в аффинном пространстве $\mathbf{R}^4$.

Здесь $M_0=(2,5,1,5),\ W^2=\langle(1,3,-1,2),(2,4,-3,5)\rangle;$

$N_0=(0,-3,-1,-2),\ U^2=\langle(1,5,3,5),(2,4,-6,1)\rangle.$

Определите взаимное расположение этих плоскостей.

**3.** В евклидовом пространстве $\mathbf{R}^4$ найдите расстояние от точки $M_0=(8,10,-9,-1)$ до плоскости $\mathrm{B}$, заданной системой уравнений:

$$\mathrm{B}:\begin{cases}4x_1-6x_2++3x_3+5x_4=21,\\ -2x_2+x_3+x_4=3.\end{cases}$$

а также ортогональную проекцию данной точки на плоскость $\mathrm{B}$.

**4.** Пусть $(O,\vec{c}_1,\dots,\vec{c}_n)$ – ортонормированный репер в евклидовом пространстве $\mathbf{E}^n$. Найдите расстояние от начала координат до гиперплоскости, которая отсекает на координатных осях отрезки величиной $b_1,\dots,b_n$.

***Форма контроля*** - контрольная работа.

## Примерная тематика практических занятий

1. Билинейная форма на векторном пространстве, ее матрица. Изменение матрицы билинейной формы при изменении базиса, ранг формы. Симметрические и кососимметрические билинейные формы, их матрицы. Квадратичная форма и ее матрица, существование и единственность полярной билинейной формы. Канонический вид билинейной и квадратичной формы. Алгоритм Лагранжа приведения квадратичной формы к каноническому виду.
2. Нормальный вид вещественной и комплексной квадратичных форм. Закон инерции вещественных квадратичных форм. Знакоопределенные квадратичные формы, критерий Сильвестра.
   Определение евклидова пространства. Длина вектора, угол между векторами. Неравенство Коши–Буняковского.
   Ортогональные векторы. Ортогональные и ортонормированные базисы. Процесс ортогонализации Грама–Шмидта. Ортогональное дополнение к подпространству.
3. Разложение пространства в прямую сумму подпространства и его ортогонального дополнения. Ортогональная проекция и ортогональная составляющая вектора, расстояние от вектора до подпространства.
   Выясните, лежат ли точки $A,B,C$ на одной прямой.
   1) $A=(2,1,-2,0), B=(1,-3,-3,1), C=(4,9,0,-2)$;
   2) $A=(-1,0,2,2), B=(2,1,0,4), C=(-2,-1,3,0)$.
4. Найдите размерность плоскости $Aff(M_0,M_1,M_2,...)$, являющейся аффинной оболочкой точек $M_0,M_1,M_2,...$.
   1) $M_0=(0,-1,1,2), M_1=(-1,4,0,1), M_2=(-2,1,-3,-1), M_3=(-1,12,2,2)$;
   2) $M_0=(0,1,3,-3), M_1=(-1,0,2,2), M_2=(2,1,0,4), M_3=(-2,-1,3,0)$, $M_4=(-1,1,2,-2)$.
5. Выясните взаимное расположение плоскостей $\mathrm{B}=Aff(A,B,C)$ и $\mathrm{P}=Aff(A_1,B_1,C_1)$:
   $A=(2,-1,0,4), B=(-1,2,0,3), C=(3,0,1,1)$,
   $A_1=(1,1,1,1), B_1=(8,-4,-4,6), C_1=(-3,3,3,0)$.
   *Ответ: частично параллельны.*

Выясните взаимное расположение плоскостей $\mathrm{B}^2=M_0+L(\vec{a}_1,\vec{a}_2)$ и $\mathrm{P}^2=N_0+L(\vec{b}_1,\vec{b}_2)$:

$M_0 = (1,1,2,1,0), \vec{a}_1 = (2,1,-1,1,3), \vec{a}_2 = (-3,-1,2,2,-1),$

$N_0 = (0,2,7,7,4), \vec{b}_1 = (-1,2,3,1,1), \vec{b}_2 = (1,-1,1,2,1).$

*Ответ: пересекаются в точке* $Q_0 = (0,1,3,4,2)$.

## Описание инновационных подходов и методов к преподаванию учебной дисциплины

При организации образовательного процесса используются следующие **подходы и методы:**

- ***эвристический,*** ориентированный на осуществление студентами личностно-значимых открытий в процессе подготовки и проведения практических занятий;
- ***практико-ориентированный,*** предполагающий: освоение содержание образования через решения практических задач; - приобретение навыков эффективного выполнения разных видов профессиональной деятельности; - использование процедур, способов оценивания, фиксирующих сформированность профессиональных компетенций;
- ***метод группового обучения,*** который представляет собой форму организации учебно-познавательной деятельности студентов, предполагающую функционирование разных типов малых групп, работающих как над общими, так и специфическими учебными заданиями;

## Методические рекомендации по организации самостоятельной работы студентов

В процессе *самостоятельной работы* по дисциплине «*Дополнительные главы алгебры и аналитической геометрии*» студент должен выполнять следующие виды внеаудиторной деятельности:

- изучение и конспектирование материала, вынесенного на лекциях и практических занятиях на самостоятельное изучение по источникам основной и дополнительной литературы;
- подготовка к различным формам текущей и промежуточной аттестации (практической и контрольной работе, зачету);
- поиск и изучение понятий и фактов из параллельно изучаемых дисциплин *«Алгебра», «Математический анализ», «Аналитическая геометрия»,* необходимых для усвоения дисциплины «*Дополнительные главы алгебры и аналитической геометрии*»;
- подбор необходимой литературы, поиск необходимой информации в сети Интернет.

*Критерием оценки* результатов внеаудиторной самостоятельной работы обучающихся по дисциплине *«Дополнительные главы алгебры и аналитической геометрии»* является уровень усвоения учебного материала, который проверяется и оценивается при выполнении контрольных работ и индивидуальных заданий и при сдаче зачета.

К *организационным формам* проведения УСР по дисциплине *«Дополнительные главы алгебры и аналитической геометрии»* относится аудиторная деятельность на практических занятиях. *Видами отчетности* УСР являются: контрольные работы и отчеты по индивидуальным заданиям.

Контроль УСР по дисциплине *«Дополнительные главы алгебры и аналитической геометрии»* проводится преподавателем, как правило, во время аудиторных занятий и осуществляется в виде:

– экспресс-опроса на аудиторных занятиях;

– контрольной работы;

Учет результатов контроля текущей аттестации студентов ведется преподавателем. Полученные студентом количественные результаты УСР учитываются при выставлении зачета.

## Примерный перечень вопросов к зачету

1. Билинейные формы. Примеры. Матрица билинейной формы. Симметрические билинейные формы и их матрицы.
2. Теорема об изменении матрицы билинейной формы при переходе к другому базису. Ранг билинейной формы и его независимость от выбора базиса.
3. Квадратичные формы. Полярная билинейная форма для данной квадратичной формы. Теорема о существовании и единственности полярной билинейной формы
4. Матрица квадратичной формы. Изменение матрицы квадратичной формы при переходе к другому базису. Ранг квадратичной формы и его независимость от выбора базиса.
5. Канонический базис относительно билинейной (квадратичной) формы и канонический вид билинейной (квадратичной) формы. Матрица билинейной (квадратичной) формы в каноническом базисе. Алгоритм Лагранжа.
6. Нормальный вид комплексной квадратичный формы.
7. Нормальный вид действительной квадратичной формы. Закон инерции действительных квадратичных форм. Положительный и отрицательный индексы инерции.

8. Знакоопределенные квадратичные формы. Канонический вид положительно (отрицательно) определенной квадратичной формы. Критерий Сильвестра.

9. Евклидовы пространства. Длина вектора.

10. Неравенство Коши-Буняковского.

11. Неравенство треугольника. Угол между векторами в евклидовом пространстве.

12. Ортогональные векторы в евклидовом (унитарном) пространстве и их свойства. Теорема о линейной независимости системы попарно ортогональных ненулевых векторов.

13. Ортогональный и ортонормированный базис. Ортогональное дополнение к подпространству. Процесс ортогонализации Грама-Шмидта.

14. Теорема о разложении евклидова векторного пространства в прямую сумму подпространства и его ортогонального дополнения.

Ортогональная проекция и ортогональная составляющая вектора относительно подпространства, их нахождение

26. Скалярное произведение в вещественном векторном пространстве и его свойства. Примеры.

27. Евклидово векторное пространство, ортогональность векторов и подпространств, величина угла между векторами, ортогональное дополнение подпространства, ортонормированные базисы.

28. Понятие евклидова точечного пространства $\mathbf{E}^n$, ортогональность плоскостей в $\mathbf{E}^n$.

29. Расстояние между фигурами в $\mathbf{E}^n$, вычисление расстояния между плоскостями.

30. Некоторые фигуры в $\mathbf{E}^n$: сферы, шары, параллелепипеды, симплексы. Объем параллелепипеда и симплекса.

## ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УВО

| Название учебной дисциплины, с кото рой требуется согласование | Название кафедры | Предложения об изменениях в содержании учебной программы учреждения высшего образования по учебной дисциплине | Решение, принятое кафедрой, разрабо-тавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)* |
|---|---|---|---|
| Дифференциальные уравнения | Дифференциальных уравнений и сис-темного анализа | нет | Вносить изменения не требуется (протокол № 12 от 23.05.2023) |
| Алгебра | Высшей алгебры и защиты информа-ции | нет | Вносить изменения не требуется (протокол № 12 от 23.05.2023) |
| Математический анализ | Теории функций | нет | Вносить изменения не требуется (протокол № 12 от 23.05.2023) |

**ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ ПО ИЗУЧАЕМОЙ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ**

на 2023/2024 учебный год

| № п/п | Дополнения и изменения | Основание |
|---|---|---|
| 1. | Утверждён образовательный стандарт общего высшего образования по специальности 6-05-0533-13 Механика и математическое моделирование ОСВО 6-05-0533-13-2023 | Постановление Министерства образования Республики Беларусь, 04.08.2023 г. № 236 |
| 2. | Программа актуальна, вносить изменения не требуется. | |

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры геометрии, топологии и методики преподавания математики БГУ
(протокол № 4 от 17.11.2023 г.)

Заведующий кафедрой
к.ф.-м.н., доцент _______________ Д.Ф. Базылев

УТВЕРЖДАЮ
Декан факультета
д.ф.-м.н., профессор _______________ С.М. Босяков