Белорусский государственный университет

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
и образовательным инновациям
_______________О.Г. Прохоренко
«05» июля 2023 г.

Регистрационный № УД – 12392/уч.

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Учебная программа учреждения высшего образования
по учебной дисциплине для специальности:

1-31 03 02 Механика и математическое моделирование

2023 г.

Учебная программа составлена на основе ОСВО 1-31 03 02-2021, типового учебного плана №G31-1-025/пр.тип. от 30.06.2021 г., учебных планов: №G31-1-029уч. от 30.06.2021 г., № G31-1-029/уч-СИБД от 30.06.2021 г., №G31-1-209/уч. от 22.03.2022 г. и G31-1-209/уч. – СИБД от 22.03.2022 г.

СОСТАВИТЕЛИ:

Владимир Иванович Чесалин, доцент кафедры функционального анализа и аналитической экономики механико-математического факультета Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

Пыжкова Ольга Николаевна, заведующий кафедрой высшей математики Учреждения образования «Белорусский государственный технологический университет», кандидат физико-математических наук, доцент

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой функционального анализа и аналитической экономики
(протокол № 13 от 22.05.2023);

Научно-методическим советом БГУ

(протокол № 9 от 29.06.2023)

Заведующий кафедрой ________________ А.В. Лебедев

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Цели и задачи учебной дисциплины

Цель учебной дисциплины «Теория вероятностей» – подготовка специалистов, способных использовать фундаментальные математические знания в качестве основы при проведении исследований.

Задачи учебной дисциплины:

1. Ознакомление студентов с основными принципами теории вероятностей и примерами их приложений
2. Формирование у студентов навыков абстрактного математического мышления и умения применять его в задачах
3. Повышение их математической культуры.

Место учебной дисциплины. В системе подготовки специалиста с высшим образованием учебная дисциплина относится к компоненту учреждения высшего образования.

Учебная программа составлена с учетом межпредметных **связей** с дисциплиной «Функциональный анализ».

Требования к компетенциям

Освоение учебной дисциплины «Теория вероятностей» должно обеспечить формирование следующей ***специализированной*** компетенции:

СК-3. Анализировать основные закономерности случайных явлений, разрабатывать вероятностно-статистические модели для прикладных задач механики и математики.

В результате освоения учебной дисциплины студент должен:

знать:

– основные понятия теории вероятностей;
– основные математические модели случайных явлений;

уметь:

– использовать основные закономерности случайных явлений;
– применять методы теории вероятностей в других науках;

владеть:

– основными методами теории вероятностей

Структура учебной дисциплины

Дисциплина изучается в 6 семестре. Всего на изучение учебной дисциплины «Теория вероятностей» отведено:

– для очной формы получения высшего образования– 100 часов, в том числе 50 аудиторных часа, из них: лекции – 30 часов, практические занятия – 18 часов, управляемая самостоятельная работа – 2 часа.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 3 зачетные единицы.

Форма текущей аттестации – экзамен.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Раздел 1. ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Тема 1.1. *Введение.* Теория вероятностей как наука о математических моделях случайных явлений. Основные этапы развития теории вероятностей

Тема 1.2. *Терминология теории вероятностей.* Предмет и задачи теории вероятностей. События, операции над событиями.

Тема 1.3. *Аксиоматика Колмогорова.* Свойства вероятности.

Тема 1.4. Примеры вероятностных пространств. Классическое, конечное, дискретное вероятностные пространства. Геометрическое вероятностное пространство, парадокс Бертрана. Статистическая вероятность и устойчивость частот.

Раздел 2. НЕЗАВИСИМОСТЬ.

Тема 2.1. *Условные вероятности.* Определение условной вероятности. Теоремы умножения. Формула полной вероятности и формулы Байеса.

Тема 2.2. *Независимость событий.* Определение независимости двух событий и независимости в совокупности нескольких событий. Независимость классов событий.

Тема 2.3. *Независимые испытания.* Схема Бернулли, полиномиальная схема.

Тема 2.4. Предельные теоремы в схеме Бернулли. Локальные и интегральные предельные теоремы Муавра – Лапласа и Пуассона и их приложения.

Раздел 3. СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ.

Тема 3.1. *Случайные величины и их распределения*. Распределение вероятностей как мера на борелевской сигма-алгебре, связанная с данной случайной величиной.

Тема 3.2. *Классификация случайных величин.* Теорема Лебега. Распределения: биномиальное, геометрическое, пуассоновское, равномерное, нормальное, показательное, хи-квадрат, Стьюдента, Фишера, Коши и др. Функция и плотность распределения.

Тема 3.3. *Многомерные случайные величины.* Свойства многомерной функции распределения. Классификация многомерных случайных величин.

Тема 3.4. *Независимость случайных величин.* Критерии независимости.

Тема 3.5. Функциональные преобразования случайных величин. Функции от случайных величин и соответствующие преобразования функции и плотности распределения. Формула свертки.

Раздел 4. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН.

Тема 4.1. *Математическое ожидание и его свойства.* Математическое ожидание случайной величины как интеграл Лебега. Выражение для математического ожидания борелевской функции от случайной величины через интеграл Лебега – Стилтьеса. Свойство мультипликативности математических ожиданий.

Тема 4.2. *Моменты случайных величин.* Дисперсия и ее свойства.

Тема 4.3. *Неравенства. Коэффициент корреляции.* Коэффициент корреляции и его свойства. Неравенства Коши – Буняковского, Чебышева, Ляпунова, Иенсена.

Тема 4.4. *Условные математические ожидания.* Понятие об условном математическом ожидании (в обзорном порядке).

Раздел 5. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ.

Тема 5.1. *Центральная предельная теорема.* Предельная теорема для независимых одинаково распределенных слагаемых. Условие Линдеберга. Теорема Ляпунова.

Тема 5.2. *Сходимость случайных величин.* Различные виды сходимости случайных величин (сходимость почти наверное, сходимость по вероятности сходимость в среднем, слабая сходимость) и связь между ними.

Тема 5.3. *Законы больших чисел.* Понятие о предельных законах, отличных от нормального (в обзорном порядке).

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Очная форма получения высшего образования с применением дистанционных образовательных технологий (ДОТ)

Номер раздела, темы	**Название раздела, темы,**	**Количество аудиторных часов**					**Количество часов УСР**	**Форма контроля знаний**
		лекции	**практические Занятия**	**семинарские занятия**	**лабораторные занятия**	**иное**		
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1.	**ВЕРОЯТНОСТНЫЕ ПРОСТРАНСТВА**	**4**	**3**					
1.1.	*Введение*	1						
1.2.	*Терминология теории вероятностей.*	1	1					
1.3.	*Аксиоматика Колмогорова.*	1	1					
1.4.	*Примеры вероятностных пространств.*	1	1					Опрос
2.	**НЕЗАВИСИМОСТЬ**	**4**	**4**					
2.1.	*Условные вероятности*	1	1					
2.2.	*Независимость событий*	1	1					Опрос
2.3.	*Независимые испытания*	1	1					Контрольная работа
2.4.	*Предельные теоремы* в схеме Бернулли	1	1					Коллоквиум
3.	**СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ**	**10**	**5**					
3.1	*Случайные величины и их распределения*	2	1					
3.2.	*Классификация случайных величин*	2	1					Опрос
3.3.	*Многомерные случайные величины*	2	1					Опрос
3.4.	*Независимость случайных величин*	2	1					
3.5.	*Функциональные преобразования случайных величин*	2	1					Контрольная работа

4.	**ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН**	**6**	**4**				**2**	
4.1.	*Математическое ожидание и его свойства*	2	1					Опрос
4.2.	*Моменты случайных величин*	2	1					Опрос
4.3.	*Неравенства. Коэффициент корреляции*	2	1				2	Опрос
4.4	Условные математические ожидания		1					
5.	**ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ**	**6**	**2**					
5.1.	*Центральная предельная теорема*	2	1					Опрос
5.2.	*Сходимость случайных величин*	2	1					Опрос, дискуссия
5.3	*Законы больших чисел*	2						
	ВСЕГО	**30**	**18**				**2**	

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Перечень основной литературы

1. Севастьянов, Б. А. Курс теории вероятностей и математической статистики : учебник для студентов вузов, обучающихся по специальностям "Математика" и "Механика" / Б. А. Севастьянов. – Изд. стер. – Москва : URSS : ЛЕНАНД, 2020. – 255 с.
2. Коршунов, Д. А. Сборник задач и упражнений по теории вероятностей : учебное пособие / Д. А. Коршунов, С. Г. Фосс, И. М. Эйсымонт. – Изд. 3-е, испр. и доп. – Санкт-Петербург ; Москва ; Краснодар : Лань, 2022. – 219 с. – URL: https://e.lanbook.com/book/187568.
3. Маталыцкий, М. А. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для студ. уво по физико-математическим спец. / М. А. Маталыцкий, Г. А. Хацкевич. – Минск : Вышэйшая школа, 2017. – 591 с.
4. Гнеденко, Б. В. Курс теории вероятностей : учебник для студ. мат. спец. ун-тов / Б. В. Гнеденко ; [предисл. А. Н. Ширяева] ; МГУ им. М. В. Ломоносова. – Изд. 13-е. – Москва : URSS, 2022. – 448 с.
5. Боровков, А. А. Теория вероятностей : учебное пособие для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению подготовки 010100 "Математика" / А. А. Боровков. – Изд. стер. – Москва : URSS : Либроком, 2023. – 652 с.

Перечень дополнительной литературы

1. Лазакович, Н.В., Сташулёнок, С.П., Яблонский, О.Л. Теория вероятностей : учебник. – 3-е изд., с изменен.. – Минск : БГУ, 2013: http://elib.bsu.by/handle/123456789/93935
2. Теория вероятностей : практикум : учеб. пособие для студ вузов по мат. спец. : в 2 ч. Ч. 1 / [авт.: Н. В. Лазакович, Е. М. Радыно, С. П. Сташулёнок, С. Л. Штин, О.Л. Яблонский] ; под ред. Н. В. Лазаковича. – Минск : БГУ, 2011. – 147 с.: http://elib.bsu.by/handle/123456789/38806.
3. Теория вероятностей : практикум : учеб. пособие для студ вузов по мат. спец. : в 2 ч. Ч. 2 / [авт.: Н. В. Лазакович, Е. М. Радыно, С. П. Сташулёнок, А. Г. Яблонская, О.Л. Яблонский] ; под ред. Н. В. Лазаковича. – Минск : БГУ, 2014. – 175 с.: http://elib.bsu.by/handle/123456789/113437.
4. Бахтин, В. И. Введение в прикладную статистику : курс лекций : в 2 ч. Ч. 1: Математическая статистика. Минск : БГУ, 2011. https://elib.bsu.by/handle/123456789/12767
5. Бахтин, В. И. Введение в прикладную статистику : курс лекций : в 2 ч. Ч. 2: Методы прикладной статистики / В. И. Бахтин. Минск : БГУ, 2012. https://elib.bsu.by/handle/123456789/12767
6. Колмогоров А. Н. Основные понятия теории вероятностей. М.: Наука, 1974.

7. Лазакович Н.В., Сташулёнок С.П., Яблонский О.Л. Курс теории вероятностей: электронное учебное пособие. – Минск : Электронная книга БГУ, 2003: http://elib.bsu.by/handle/123456789/10291.
8. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир, 1984.Т.1,2.
9. Белько, И. В. Теория вероятностей, математическая статистика, математическое программирование : учеб. пособие для студ. учреждений высш. образования по экон. спец. / И. В. Белько, И. М. Морозова, Е. А. Криштапович. – Минск : Новое знание, 2016. Москва : ИНФРА-М. – 298 с.
10. Высшая математика. Практикум : учебное пособие для студентов учреждений высшего образования по естественнонаучным и экономическим специальностям : в 2 ч. / [авт.: О. М. Матейко и др.] ; под ред. С. А. Самаля. – Минск : РИВШ, 2020 – ISBN 978-985-586 403- Ч. 2 : – 2022. – 359 с.
11. Трушков, А. С. Статистическая обработка информации. Основы теории и компьютерный практикум + CD : учебное пособие / А. С. Трушков. – Санкт-Петербург : Лань, 2020. – 152 с. – ISBN 978-5-8114-4322-2. – Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. – URL: https://e.lanbook.com/book/126947
12. Коршунов, Д. А. Сборник задач и упражнений по теории вероятностей : учебное пособие для вузов / Д. А. Коршунов, С. Г. Фосс, И. М. Эйсымонт. – 3-е изд., испр. и доп. – Санкт-Петербург : Лань, 2022. – 220 с. – ISBN 978-5-8114-8328-0. – Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. – URL: https://e.lanbook.com/book/187568

Перечень рекомендуемых средств диагностики и методика формирования итоговой отметки

Объектом диагностики компетенций студентов являются знания, умения, полученные ими в результате изучения учебной дисциплины. Выявление учебных достижений студентов осуществляется с помощью мероприятий текущего контроля и текущей аттестации.

Для диагностики компетенций могут использоваться следующие средства текущего контроля: опрос, дискуссия, коллоквиум; контрольная работа.

Формой текущей аттестации по дисциплине «Теория вероятностей» учебным планом предусмотрены **экзамен.**

При формировании итоговой отметки используется рейтинговая система оценки знаний студента, дающая возможность проследить и оценить динамику процесса достижения целей обучения.

Рейтинговая система предусматривает использование весовых коэффициентов для текущего контроля знаний и текущей аттестации студентов по дисциплине.

Примерные весовые коэффициенты, определяющие вклад текущего контроля знаний в итоговую отметку:

Формирование отметки за текущую успеваемость:

1. Коллоквиум – 50 %;
2. контрольная работа – 50 %.

Итоговая отметка по дисциплине рассчитывается на основе отметки текущей успеваемости (рейтинговой системы оценки знаний) – 30% и экзаменационной отметки – 70 %.

Примерный перечень заданий для управляемой самостоятельной работы студентов

Тема 4.3. Неравенства. Коэффициент корреляции. (2 ч)

Студент изучает неравенства Чебышева, Ляпунова, Коши – Буняковского, определение и свойства коэффициента корреляции, рассматривает примеры применений этих неравенств и понятий в конкретных задачах.

Форма контроля – опрос

Примерная тематика практических занятий

Занятие № 1. *Терминология теории вероятностей.* Предмет и задачи теории вероятностей. События, операции над событиями. *Аксиоматика Колмогорова.* Свойства вероятности. Классическая вероятность.

Занятие № 2 *Примеры вероятностных пространств.* Классическое, конечное, дискретное вероятностные пространства. Геометрическое вероятностное пространство, парадокс Бертрана. Статистическая вероятность и устойчивость частот.

Занятие № 3. *Условные вероятности.* Определение условной вероятности. Теоремы умножения. Формула полной вероятности и формулы Байеса. *Независимость событий.* Определение независимости двух событий и независимости в совокупности нескольких событий. Независимость классов событий.

Занятие № 4. *Независимые испытания.* Схема Бернулли, полиномиальная схема. *Предельные теоремы.* Локальные и интегральные предельные теоремы Муавра — Лапласа и Пуассона и их приложения.

Занятие № 5. *Случайные величины и их распределения.* Распределение вероятностей как мера на борелевской сигма-алгебре, связанная с данной случайной величиной. Примеры. *Классификация случайных величин.* Теорема Лебега. Распределения: биномиальное, геометрическое, пуассоновское, равномерное, нормальное. Функция и плотность распределения.

Занятие № 6. *Многомерные случайные величины*. Свойства многомерной функции распределения. Классификация многомерных случайных величин. *Независимость случайных величин*. Критерии независимости в задачах.

Занятие № 7. *Функциональные преобразования случайных величин.* Функции от случайных величин и соответствующие преобразования функции и плотности распределения. Формула свертки в задачах.

Занятие № 8. *Математическое ожидание и его свойства.* Математическое ожидание случайной величины как интеграл Лебега. Выражение для математического ожидания борелевской функции от случайной величины через интеграл Лебега - Стилтьеса. Вычисление математических ожиданий конкретных распределений случайных величин.

Занятие № 9. *Моменты случайных величин.* Дисперсия и ее свойства. Вычисление дисперсий. Моменты.

Описание инновационных подходов и методов к преподаванию учебной дисциплины

При организации образовательного процесса используется ***метод учебной дискуссии,*** который предполагает участие студентов в целенаправленном обмене мнениями, идеями для предъявления и согласования существующих позиций в определенной задаче.

Использование метода обеспечивает появление нового уровня понимания изучаемой темы, применение знаний при решении задач, определение способов их решения.

Методические рекомендации по организации самостоятельной работы обучающихся

При изучении учебной дисциплины рекомендуется использовать следующие формы самостоятельной работы:

– поиск (подбор) и обзор литературы и электронных источников по изучаемой теме;

– выполнение домашнего задания;

– работы, предусматривающие решение задач и выполнение упражнений;

– изучение материала, вынесенного на самостоятельную проработку;
– научно-исследовательские работы.

Примерный перечень заданий для опроса и коллоквиума

1. Из урны, содержащей 6 перенумерованных шаров, наугад вынимают один за другим все находящиеся в ней шары. Вероятность того, что номера вынутых шаров будут идти по порядку: 1, 2, ..., 6 равна 1) 1/720; 2) 1/36; 3) 1/360; 4) 1/1440; 5) 1/46656.

2. Из урны, содержащей 4 перенумерованных шаров, наугад вынимают один за другим все находящиеся в ней шары. Вероятность того, что номера вынутых шаров будут идти по порядку: 1, 2, ..., 4 равна 1) 1/4; 2) 1/36; 3) 1/12; 4) 4/24; 5) 1/24.

3. Из урны, содержащей 5 перенумерованных шаров, наугад вынимают один за другим все находящиеся в ней шары. Вероятность того, что номера вынутых шаров будут идти по порядку: 1, 2, ..., 5 равна 1) 1/5; 2) 1/120; 3) 5/120; 4) 4/24; 5) 1/240.

4. Игральная кость бросается два раза. Вероятность того, что оба раза появится одно и то же число очков равна: 1) ½; 2) 1/6; 3) 1/36; 4) 1/18; 5)1/72.

5. Из следующих утверждений неверным является: 1) всякое элементарное событие является случайным; 2) геометрическое вероятностное пространство – это математическая модель случайного эксперимента, в котором число исходов более чем счётно; 3) дискретное вероятностное пространство – это математическая модель случайного эксперимента в котором число исходов счётно; 4) конечное вероятностное пространство – это математическая модель случайного эксперимента с конечным числом исходов; 5) классическое вероятностное пространство – это математическая модель случайного эксперимента с конечным числом равновозможных исходов.

6. Пусть случайные события A и B рассматриваются на одном и том же вероятностном пространстве, причем $\mathrm{P}(A|B)>0$. Тогда 1) $\mathrm{P}(A|B)+\mathrm{P}(\bar{A}|B)=1$; 2) $\mathrm{P}(A|B)+\mathrm{P}(\bar{A}|\bar{B})=1$; 3) $\mathrm{P}(A|\bar{B})+\mathrm{P}(\bar{A}|B)=1$; 4) $\mathrm{P}(A|B)+\mathrm{P}(A|\bar{B})=1$.

7. События A и B несовместны и независимы. Тогда верно: 1) хотя бы одно из событий является невозможным; 2) хотя бы одно из событий имеет нулевую вероятность; 3) каждое из событий имеет нулевую вероятность; 4) каждая из вероятностей этих событий отлична от нуля; 5) каждое из событий невозможно.

8. Пусть $\mathrm{P}(A)=0$, а B — произвольное случайное событие, рассматриваемое на том же вероятностном пространстве, что и A. Тогда: 1) события A и B несовместны; 2) события A и B независимы; 3) наступление события A влечет наступление события B; 4) события A и B противоположны.

9. Монета брошена 100 раз. Тогда вероятность выпадения 50 гербов равна: 1) 0,5; 2) 0, 25; 3) $\frac{C_{100}^{50}}{2^{100}}$; 4) $\frac{C_{100}^{1}}{2^{100}}$ 5) $\frac{C_{150}^{50}}{2^{100}}$.

10. Монета брошена 50 раз. Тогда вероятность выпадения 25 гербов равна: 1) 0,5; 2) 0, 25; 3) $\frac{C_{50}^{25}}{2^{50}}$; 4) $\frac{C_{50}^{1}}{2^{50}}$ 5) $\frac{C_{50}^{25}}{2^{25}}$.

11. Пусть случайная величина ξ равномерно распределена на отрезке $[0,1]$. Тогда случайная величина $ln\left(\frac{1}{\xi}\right)$ имеет: 1) экспоненциальное распределение; 2) распределение Коши; 3) пуассоновское распределение; 4) нормальное распределение; 5) биномиальное распределение.

12. Пусть случайная величина ξ равномерно распределена на отрезке $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$. Тогда случайная величина $tg(\xi)$ имеет: 1) экспоненциальное распределение; 2) распределение Коши; 3) пуассоновское распределение; 4) нормальное распределение; 5) биномиальное распределение.

13. Случайная величина имеет пуассоновское распределение. Ошибочно следующее утверждение: 1) ее математическое ожидание равно дисперсии; 2) ее математическое ожидание положительно; 3) случайная величина имеет дискретный закон распределения; 4) её математическое ожидание отрицательно.

14. Случайная величина ξ стандартно нормально распределена. Тогда $\mathrm{M}\xi^{2009}$ равно: 1) 2009; 2) –2009; 3) 1; 4) 1004,5; 5) 0.

15. Случайная величина ξ стандартно нормально распределена. Тогда $\mathrm{M}(\xi+3)$ равно: 1) 1,5; 2) 6; 3) 1; 4) 3; 5) 0.

16. Закон распределения биномиальной случайной величины имеет следующий вид $\mathrm{P}(\xi = k) = C_{50}^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{50}, k = 0,1,...,50.$ Тогда $\mathrm{M}\xi$ равно: 1) 0; 2) 1; 3) 25; 4) 50; 5)100.

17. Закон распределения биномиальной случайной величины имеет следующий вид $\mathrm{P}(\xi = k) = C_{50}^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{50}, k = 0,1,...,50.$ Тогда $D\xi$ равно: 1) 0; 2) 1; 3) 25; 4) 50; 5) 12,5.

18. Независимые случайные величины имеют следующие законы распределения $\mathrm{P}(\xi = k) = C_{50}^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{50}, k = 0,1,...,50;$ $\mathrm{P}(\eta = i) = C_{150}^{i}\left(\frac{1}{2}\right)^{150}, k = 0,1,...,150.$ Тогда случайная величина $\xi + \eta$ имеет следующий закон распределения: 1) $\mathrm{P}(\xi + \eta = k) = C_{200}^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{200}, k = 0,1,...,200$; 2) $\mathrm{P}(\xi + \eta = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, k = 0,1,...$; 3) $\xi + \eta$ не яляется случайной величиной.

19. Из равенства $\mathrm{M}\xi\eta = \mathrm{M}\xi\mathrm{M}\eta$ следует: 1) независимость случайных величин ξ,η; 2) некореллированность случайных величин ξ,η; 3) абсолютная непрерывность случайных величин ξ,η; 4) сингулярность случайных величин ξ,η; 5) дискретность случайных величин ξ,η.

20. Из равенства $D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta$ следует: 1) независимость случайных величин ξ,η; 2) некореллированность случайных величин ξ,η; 3) абсолютная непрерывность случайных величин ξ,η; 4) сингулярность случайных величин ξ,η; 5) дискретность случайных величин ξ,η.

21. Из равенства $D(\xi - \eta) = D\xi + D\eta$ следует: 1) независимость случайных величин ξ,η; 2) некореллированность случайных величин ξ,η; 3) абсолютная непрерывность случайных величин ξ,η; 4) сингулярность случайных величин ξ,η; 5) дискретность случайных величин ξ,η.

22. Из равенства $\mathrm{cov}(\xi,\eta) = 0$ следует: 1) независимость случайных величин ξ,η; 2) некореллированность случайных величин ξ,η; 3) абсолютная непрерывность случайных величин ξ,η; 4) сингулярность случайных величин ξ,η; 5) дискретность случайных величин ξ,η.

23. Из равенства $\rho(\xi,\eta) = 0$ следует: 1) независимость случайных величин ξ,η; 2) некореллированность случайных величин ξ,η; 3) абсолютная

непрерывность случайных величин ξ,η; 4) сингулярность случайных величин ξ,η; 5) дискретность случайных величин ξ,η.

24. Из следующих утверждений верным является: 1) случайные величины ξ и $D\xi$ независимы; 2) у сингулярных случайных величин не существует математическое ожидание; 3) дискретные случайные величины независимы; 4) вырожденная случайная величина абсолютно непрерывна; 5) из равентства нулю дисперсии и математического ожидания следует абсолютная непрерывность случайной величины.

Примерный перечень заданий для контрольных работ

1. Бросаются одновременно две игральные кости. Найти вероятность того, что сумма выпавших очков равна 5.
2. Монета брошена 100 раз. Чему равна вероятность выпадения 10 гербов?
3. Случайные величины ξ и ξ^2 независимы. Можно ли утверждать, что ξ – вырожденная случайная величина? Ответ обосновать.
4. а) Закон распределения биномиальной случайной величины имеет следующий вид $\mathrm{P}(\xi = k) = C_5^k (0,5)^5$, $k = 0,1,\dots,5.$ Найти закон распределения $\eta = -\xi$.

б) Случайная величина ξ принимает значения -1 , 0, 1 с вероятностями 0,25, 0,5 и 0,25 соответственно. Найти её функцию распределения.
5. Характеристическая функция случайной величины ξ равна $f_\xi(t) = \cos t.$ Найти $\mathrm{M}\xi$, $D\xi$.
6. ξ – равномерно распределенная случайная величина на отрезке $[0,1]$. Найти математическое ожидание случайной величины $\eta = e^{-\xi}$.
7. Привести пример случайной величины, имеющей дискретное распределение вероятностей. Найти её математическое ожидание и дисперсию.
8. Последовательность состоит из **независимых** одинаково распределенных случайных величин, принимающих два значения 0 и 1, каждое с вероятностью 0,5. Выполняются ли для этой последовательности закон больших чисел, центральная предельная теорема? Ответы обосновать.

Примерный перечень вопросов к экзамену

1. Пространство элементарных событий. Случайные события, действия над ними.
2. Алгебра и сигма-алгебра событий. Пример алгебры, не являющейся сигма-алгеброй.
3. Правило умножения. Размещения, перестановки, сочетания. Их количество (формулы нужно выводить). Классическое определение

вероятности. Свойства сочетаний. Решение задач на классическую вероятность.

4. Аксиоматическое определение вероятности. Вероятностное пространство. Свойства вероятности. Конечное и классическое вероятностные пространства. Дискретное вероятностное пространство. Примеры.
5. Геометрическое вероятностное пространство. Примеры. Задача о встрече. Парадокс Бертрана.
6. Условные вероятности. Теоремы умножения.
7. Формулы полной вероятности и Байеса. Примеры применения этих формул.
8. Попарная независимость событий. Независимость событий в совокупности. Пример Бернштейна. Связь между причинной независимостью реальных случайных явлений и теоретико-вероятностной независимостью случайных событий.
9. Схема независимых испытаний Бернулли. Теоремы Пуассона и Муавра – Лапласа (без доказательства).
10. Случайная величина. Примеры. Функция распределения случайной величины. Свойства.
11. Полный прообраз отображения. Свойства. Сигма-алгебра, порожденная случайной величиной.
12. Дискретные и абсолютно непрерывные распределения случайных величин. Плотность распределения случайной величины. Примеры. Сингулярные распределения. Теорема Лебега (без доказательства). Распределение вероятностей случайной величины ξ.
13. Борелевские функции от случайных величин.
14. Многомерные случайные величины (случайные векторы). Дискретные многомерные распределения и распределения с плотностью.
15. Независимость случайных величин. Критерии независимости.
16. Математическое ожидание случайной величины. Определение. Свойства.
17. Математическое ожидание произведения независимых случайных величин.
18. Формулы для подсчета математических ожиданий.
19. Дисперсия. Свойства дисперсии.
20. Коэффициент корреляции. Его свойства. Моменты случайных величин.
21. Характеристическая функция. Определение и свойства.
22. Характеристические функции некоторых распределений.
23. Центральная предельная теорема. Теорема Линдеберга (без доказательства).
24. Следствия из теоремы Линдеберга: теорема Ляпунова, центральная предельная теорема для одинаково распределенных случайных величин.
25. Неравенства Чебышёва.
26. Сходимость по вероятности. Закон больших чисел. Теоремы Маркова, Чебышёва, Бернулли. Теорема Хинчина (без доказательства).

27. Усиленный закон больших чисел. Теорема о достаточных условиях для усиленного закона больших чисел и теорема Колмогорова (без доказательства).

ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УВО

Название учебной дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы учреждения высшего образования по учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)
1. Уравнения математичес-кой физики	Кафедра математической кибернетики	нет	Вносить изменения не требуется (протокол № 13 от 22.05.2023)
2 .Вариацион-ное исчисление и методы оптимизации	Кафедра функционально го анализа и аналитической экономики	нет	Вносить изменения не требуется (протокол № 13 от 22.05.2023)

ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ ПО ИЗУЧАЕМОЙ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ

на _____/_____ учебный год

№ п/п	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры
________________________________ (протокол № ____ от ________ 202_ г.)

Заведующий кафедрой
_______________________ _________________ ____________________

УТВЕРЖДАЮ
Декан факультета
_______________________ _________ ____________________