

Белорусский государственный университет



УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной работе и
образовательным инновациям

О.Г. Прохоренко

«05» июля 2023 г.

Регистрационный № УД – 569/б.

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

**Учебная программа учреждения высшего образования
по учебной дисциплине для специальности**

6-05-0511-05 Биоинженерия и биоинформатика

2023 г.

Учебная программа составлена на основе ОСВО 6-05-0511-05-2023, примерного учебного плана, регистрационный № 6-05-05-007/пр. от 02.12.2022, учебного плана № 6-5.6-37/01 от 15.05.2023 г.

СОСТАВИТЕЛИ:

Беняш-Кривец Валерий Вацлавович – заведующий кафедрой высшей алгебры и защиты информации Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор;

Тихонов Сергей Викторович – доцент кафедры высшей алгебры и защиты информации Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент;

Воронович Игорь Иванович – доцент кафедры высшей алгебры и защиты информации Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент;

Каскевич Виктор Иванович – доцент кафедры высшей алгебры и защиты информации Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент.

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

Балашенко Виталий Владимирович, доцент кафедры геометрии, топологии и методики преподавания математики механико-математического факультета Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент.

Бусел Татьяна Сергеевна, старший научный сотрудник отдела алгебры Института математики НАН Беларуси, кандидат физико-математических наук.

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой высшей алгебры и защиты информации БГУ
(протокол № 11 от 08.06.2023);

Научно-методическим советом БГУ
(протокол № 9 от 29.06.2023)

Зав. кафедрой высшей алгебры
и защиты информации, профессор



В.В. Беняш-Кривец

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Цели и задачи учебной дисциплины

Образовательная цель: развитие математических компетенций, необходимых для решения профессионально-ориентированных задач биоинженерии и биоинформатики; дать глубокие знания по одному из основных разделов курса высшей математики, имеющего тесную связь с многочисленными прикладными задачами; развитие понимания основных идей, лежащих в основе линейной алгебры, роли методов линейной алгебры в приложениях в других науках.

Развивающая цель: формирование у студентов основ математического мышления; знакомство с методами математических доказательств; изучение алгоритмов решения конкретных математических задач; привитие студентам умения самостоятельно изучать учебную и научную литературу в области математики.

Основные задачи, решаемые в рамках изучения дисциплины «Линейная алгебра»:

1. ознакомить студентов с фундаментальными понятиями и методами линейной алгебры;
2. Изучить матрицы и определители, методы решения систем линейных уравнений;
3. Изучить теорию векторных пространств и линейных операторов на этих пространствах;
4. развить у студентов аналитическое мышление и общую математическую культуру;
5. привить студентам умение самостоятельно изучать учебную и научную литературу в области математики.

Место учебной дисциплины в системе подготовки специалиста с высшим образованием.

Учебная дисциплина относится к модулю «Математика» государственного компонента для специальности 6-05-0511-05 Биоинженерия и биоинформатика.

Связи с другими учебными дисциплинами, включая учебные дисциплины компонента учреждения высшего образования, дисциплины специализации и др.

Дисциплина «Линейная алгебра» основана на школьной учебной дисциплине «Математика». Наиболее тесной является связь данной дисциплины с дисциплиной «Математический анализ» модуля «Математика» государственного компонента.

Требования к компетенциям

Освоение учебной дисциплины «Линейная алгебра» должно обеспечить формирование следующей **базовой профессиональной компетенции**:

БПК-2. Применять современные математические методы и модели при проведении теоретических и экспериментальных исследований в области биоинженерии и биоинформатики.

В результате изучения учебной дисциплины студент должен:

знать:

- основные понятия и результаты линейной алгебры;
- методы применения результатов линейной алгебры в прикладных задачах;
- методы доказательств важнейших результатов, изучаемых в рамках учебной дисциплины «Линейная алгебра»;
- алгоритмы решения задач по линейной алгебре;

уметь:

- выполнять операции над матрицами;
- вычислять определители;
- решать системы линейных уравнений методом Крамера и методом Гаусса;
- находить базис системы векторов и базис векторного пространства, суммы и пересечения подпространств, координаты вектора в заданном базисе,
- находить матрицу перехода между базисами;
- находить ранг матрицы;
- находить матрицу линейного оператора в заданном базисе;
- находить собственные значения и собственные векторы матрицы и линейного оператора;

владеть:

- основными навыками решения задач, связанных с линейной алгеброй, и необходимыми для изучения биологических и химических дисциплин;
- методами доказательств основных теорем, встречающихся в курсе «Линейная алгебра».
- навыками самообразования и способами использования аппарата линейной алгебры для проведения математических и междисциплинарных исследований.

Структура учебной дисциплины

Дисциплина изучается в 1 семестре очной формы получения высшего образования. Всего на изучение учебной дисциплины отведено 108 часов, в том числе 54 аудиторных часа, из них: лекции – 26 часов, практические занятия – 24 часа, управляемая самостоятельная работа – 4 часа.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 3 зачетные единицы.

Форма промежуточной аттестации – дифференцированный зачет.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Тема 1. Матрицы и операции над ними.

Понятие матрицы. Операции над матрицами: сложение и умножение матриц, умножение матрицы на скаляр, транспонирование. Свойства операций над матрицами. Многочлен от матрицы.

Тема 2. Определители и их применение.

Определители 2 и 3 порядков. Миноры и алгебраические дополнения. Определитель квадратной матрицы произвольного порядка и его свойства. Определитель транспонированной матрицы. Разложение определителя по строке и столбцу. Определитель Вандермонда. Определитель произведения квадратных матриц. Обратная матрица: критерий существования, формула для вычисления. Вычисление обратной матрицы элементарными преобразованиями. Теорема Крамера.

Тема 3. Векторные пространства.

Определение и примеры векторных пространств. Линейные комбинации векторов. Линейная зависимость и независимость векторов. Система образующих векторного пространства, конечномерные пространства. Эквивалентные системы векторов. Теорема Штейница о замене. Базис и размерность векторного пространства. Координаты вектора. Матрица перехода от одного базиса к другому, преобразование координат вектора. Ранг системы векторов. Ранг матрицы. Подпространство. Сумма и пересечение подпространств, связь их размерностей. Нахождение базиса суммы и пересечения подпространств. Прямая сумма подпространств.

Тема 4. Системы линейных уравнений.

Матричная запись линейной системы. Метод Гаусса. Теорема Кронекера–Капелли. Однородные системы, условие существования нетривиального решения. Фундаментальная система решений. Связь между решениями неоднородной и соответствующей однородной систем. Задание подпространства векторного пространства системой линейных уравнений.

Тема 5. Линейные отображения векторных пространств.

Линейное отображение, его ядро и образ. Ранг и дефект. Алгебраические действия над линейными отображениями: сумма, умножение на константу, композиция. Линейный оператор и его матрица. Изменение матрицы оператора при переходе к другому базису. Матрица композиции и суммы линейных операторов. Пространство линейных операторов и его связь с пространством матриц. Условия обратимости оператора. Собственное значение и собственный вектор оператора. Характеристический многочлен оператора и матрицы. Теорема Гамильтона–Кэли.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Очная форма получения высшего образования с применением дистанционных образовательных технологий (ДОТ)

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Количество часов по УСР	Формы контроля знаний
		лекции	практические занятия	семинарские занятия	лабораторные занятия	Иное		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	Матрицы и операции над ними	4	4					Устный опрос.
2	Определители и их применение	4	4				2	Контрольная работа.
3	Векторные пространства	8	8					Устный опрос. Контрольная работа
4	Системы линейных уравнений	6	4				2	Устный опрос. Коллоквиум.
5	Линейные отображения векторных пространств.	4	4					Устный опрос. Контрольная работа.
	Всего за семестр	26	24				4	

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Перечень основной литературы

1. В. С. Мастяница, И. В. Большакова. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: учебно-методическое пособие для студентов учреждений высшего образования, обучающихся по специальностям 1-25 01 01 "Экономическая теория", 1-25 0 02 "Экономика". Минск : БГУ, 2021. – 231 с.
2. Д. Т. Письменный. Конспект лекций по высшей математике. – 18-е изд. – Москва: Айрис пресс, 2021. – 603 с.
3. Высшая математика. Практикум: учебное пособие для студентов учреждений высшего образования по естественнонаучным и экономическим специальностям: в 2 ч. / [авт.: О. М. Матейко и др.]; под ред. С. А. Самалы. - Минск : РИВШ, 2020. Ч. 1: – 2020. – 329 с. Ч. 2: – 2022. – 359 с.
4. Л. Л. Берёзкина. Аналитическая геометрия и линейная алгебра : учебное пособие для студентов учреждений высшего образования по физико-математическим специальностям. - 3-е изд. – Минск : РИВШ, 2019. – 354 с.
5. Беньш-Кривец В.В., Пунинский Г.Е. Лекции и семинары по алгебре: основные понятия алгебры и теории чисел. Минск: БГУ, 2015. 152 с. <https://elib.bsu.by/handle/123456789/149208>
6. Милованов М.В., Тышкевич Р.И., Феденко А.С. Алгебра и аналитическая геометрия. Т. 1. Мн.: Амалфея, 2001. <https://elib.bsu.by/handle/123456789/13295>
7. Милованов М.В., Толкачев М.М., Тышкевич Р.И., Феденко А.С. Алгебра и аналитическая геометрия. Т. 2. Мн.: Амалфея, 2001. <https://elib.bsu.by/handle/123456789/13296>
8. Бурдун А.А., Мурашко Е.А., Толкачев М.М., Феденко А.С. Сборник задач по алгебре и аналитической геометрии. Мн.: Университетское, 1999. <https://elib.bsu.by/handle/123456789/13294>
9. Проскуряков И. В. Сборник задач по линейной алгебре. Санкт-Петербург, Москва, Краснодар: Лань, 2010. <https://e.lanbook.com/book/183752>

Перечень дополнительной литературы

1. Е. М. Карчевский, М. М. Карчевский. Лекции по линейной алгебре и аналитической геометрии : учебное пособие. – Изд. 2-е, перераб. и доп. – Санкт-Петербург; Москва; Краснодар: Лань, 2018. – 421 с.
2. Л. Т. Ячменёв. Высшая математика: учебник для студентов высших учебных заведений, обучающихся по инженерно-техническим и экономическим специальностям. Москва: РИОР: ИНФРА-М, 2020. – 752 с.

3. Гельфанд И.М. Лекции по линейной алгебре. М.: МЦНМО, 1998.
4. Размыслович Г. П. Геометрия и алгебра. В 5 - ти частях. Ч. 1: Матрицы, определители, системы линейных уравнений: пособие для студентов факультета прикладной математики и информатики Г.П. Размыслович - Минск: БГУ, 2010. - 73 с. <https://elib.bsu.by/handle/123456789/2336>
5. Геометрия и алгебра : пособие для студентов фак. прикладной математики и информатики : в 5 ч. Ч. 2 : Векторные пространства / Г. П. **Размыслович** ; БГУ, Фак. прикладной математики и информатики, Каф. высшей математики. - Минск : БГУ, 2013. - 56 с. <https://elib.bsu.by/handle/123456789/50318>
6. Размыслович, Г. П. Геометрия и алгебра : учебные материалы для студентов фак. прикладной математики и информатики. В 5 ч. Ч. 3. Линейные и билинейные отображения векторных пространств / Г. П. Размыслович. — Минск :БГУ, 2014. - 71 с. <https://elib.bsu.by/handle/123456789/98210>

Перечень рекомендуемых средств диагностики и методика формирования итоговой отметки

Объектом диагностики компетенций студентов являются знания, умения, полученные ими в результате изучения учебной дисциплины. Выявление учебных достижений студентов осуществляется с помощью мероприятий текущего контроля и промежуточной аттестации.

Контроль работы студента проходит в форме устного опроса, коллоквиума, выполнения контрольных работ и практических упражнений в аудитории. Задания к контрольным работам составляются согласно содержанию учебного материала.

Формой промежуточной аттестации по дисциплине «Линейная алгебра» учебным планом предусмотрен **дифференцированный зачет**.

При формировании итоговой отметки используется рейтинговая система оценки знаний студента, дающая возможность проследить и оценить динамику процесса достижения целей обучения. Рейтинговая система предусматривает использование весовых коэффициентов в ходе проведения контрольных мероприятий текущей аттестации.

Формирование отметки за текущую аттестацию:

отметка является среднеарифметической величиной отметок по всем формам (мероприятиям) текущего контроля знаний по учебной дисциплине: устные опросы, контрольные работы и коллоквиум.

Итоговая отметка по дисциплине рассчитывается на основе отметки текущей аттестации (рейтинговой системы оценки знаний) и отметки на дифференцированном зачете с учетом их весовых коэффициентов. Вес отметки по текущей аттестации составляет 40%, отметка на дифференцированном зачете – 60%.

Примерный перечень заданий для управляемой самостоятельной работы

Тема 2. Определители и их применение. (2 ч)

Примерный перечень заданий

1. Выписать все миноры второго порядка, содержащиеся в 1-й и 3-й строках

матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, а также алгебраические дополнения к ним.

Пользуясь теоремой Лапласа, записать разложение $\det A$: а) по 1-й и 3-й строке; б) по 2-й строке.

2. Как изменится определитель порядка n , если его повернуть на 90° вокруг «центра» против часовой стрелки?
3. Как изменится определитель порядка n , если каждый его элемент a_{ik} умножить на число c^{i-k} , где $c \neq 0$ – фиксированное число?
4. Чему равен определитель, у которого сумма строк с четными номерами равна сумме строк с нечетными номерами?
5. Найти наибольшее значение определителя третьего порядка, составленного из чисел 0 и 1.
6. Как изменится определитель квадратной матрицы, если каждый элемент матрицы заменить на противоположный?
7. Как изменится определитель квадратной матрицы, если его строки записать в обратном порядке?
8. Как изменится определитель квадратной матрицы, если первую строку поставить на место последней строки, а остальные строки сдвинуть вверх, не меняя их порядок?
9. Пусть все элементы матриц A и A^{-1} – целые числа. Чему равны определители этих матриц?

10. Вычислите определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -6 \\ 2 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

11. Вычислите определитель матрицы $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -3 & 7 \\ -3 & -3 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & -3 & 7 \end{pmatrix}$.

12. Разложить определитель матрицы $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -3 & 7 \\ -3 & -3 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & -3 & 7 \end{pmatrix}$ по второй строке

и третьему столбцу.

Форма контроля – контрольная работа.

Тема 4. Системы линейных уравнений. (2 ч)

Примерный перечень заданий

1. Решите следующие системы, используя правило Крамера:

$$\text{а) } \begin{cases} -3x_1 + 2x_2 = -8 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 15, \text{ б) } \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 6 \end{cases} \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = -2 \\ 4x_1 + 3x_3 = -1 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \end{cases}.$$

2. Исследуйте системы на совместность. Совместные системы решите методом Гаусса:

$$\text{а) } \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -2 \\ 4x_1 + 3x_3 = -1 \end{cases}; \text{ б) } \begin{cases} 3ix_1 + x_2 - x_3 = -1 \\ 2x_1 - ix_2 + 2x_3 = i - 2 \\ -x_1 + 3x_2 - ix_3 = 3 \end{cases}; \text{ в) } 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 = 5.$$

3. Найти фундаментальную систему решений и общее решение системы урав-

нений $AX = 0$, где а) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 7 & 1 & 5 & 3 \\ 5 & 9 & 4 & 7 & 5 \end{pmatrix}$;

б) $A = \begin{pmatrix} 7 & 13 & 10 & 11 & 9 \\ -1 & -3 & -14 & -5 & -5 \\ 0 & -2 & -22 & -6 & -4 \\ 7 & 11 & -12 & 5 & 3 \end{pmatrix}$; в) $A := \begin{bmatrix} 10 & 18 & 8 & 14 & 10 \\ -5 & -9 & -4 & -7 & -3 \\ 1 & 0 & -19 & -4 & -2 \\ 15 & 25 & -10 & 15 & 9 \end{bmatrix}$;

г) $A := \begin{bmatrix} 13 & 23 & 6 & 17 & 13 \\ -6 & -11 & -7 & -9 & -5 \\ -7 & -14 & -21 & -14 & -8 \\ 11 & 19 & 0 & 13 & 7 \end{bmatrix}$; д) $A = (1, 2, -1, 0, 3)$.

4. Линейную оболочку следующей системы векторов задайте системой линейных уравнений: а) $v_1 = (1, 1, 1, 1)$; б) $v_1 = (1, 1, 1, 1), v_2 = (1, 2, 3, 4)$; в) $v_1 = (1, 1, 1, 1), v_2 = (1, 2, 3, 4), v_3 = (1, 0, 1, 0)$.

Форма контроля – коллоквиум.

Примерные варианты контрольных работ

Контрольная работа № 1.

1. Вычислить AA^T и $f(B)$, где $f(x) = x^2 - 2x + 1$, а A, B – заданные матрицы второго порядка.

2. Вычислить AB и BA , где $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -2 \\ 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

3. Вычислите определитель данной матрицы.

4. Найти матрицу, обратную к заданной матрице.

Контрольная работа № 2.

1. Найти фундаментальную систему решений и общее решение системы

уравнений $AX = 0$, где $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

2. Найти базис суммы и пересечения подпространств, натянутых на системы векторов $a_1 := [10, 17, -3, 11], a_2 := [5, 12, -8, 6], b_1 := [-1, -2, -3, -2], b_2 := [1, 0, -1, 0]$.

3. Выяснить, является ли подпространством соответствующего векторного пространства следующая совокупность векторов: последовательности вещественных чисел, имеющие предел: 1) 0; 2) $a \neq 0$.

4. Является ли следующая система функций линейно независимой: $\sin x, \sin(x+1), \sin x + 2$?

5. При каких значениях x ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & x & -2 \\ 3 & -6 & -3 \end{pmatrix}$ равен: а) 1; б) 2.

Контрольная работа № 3.

1. Как изменится матрица линейного оператора, если в базисе e_1, \dots, e_n вектор e_1 заменить на $e_1 + e_2$?

2. Линейный оператор f двумерного векторного пространства в базисе e_1, e_2 имеет матрицу $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Найдите его матрицу в базисе $a_1 = e_1 + e_2, a_2 = 3e_1 - 2e_2$.

3. Доказать, что преобразование $f: M_2(\mathbb{C}) \rightarrow M_2(\mathbb{C}), f(X) = AX$, где A --- фиксированная матрица, является линейным. Найти матрицу f , а также собственные векторы, собственные значения f в случае, когда $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

4. Найти собственные значения и собственные векторы линейного отображения, заданного в некотором базисе матрицей $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$.

Примерная тематика практических занятий

- Практическое занятие 1.** Операции над матрицами и их свойства. Многочлен от матрицы. Специальные виды матриц.
- Практическое занятие 2.** Определители 2 и 3 порядков. Определитель квадратной матрицы произвольного порядка и его свойства. Миноры и алгебраические дополнения. Разложение определителя по строке.
- Практическое занятие 3.** Определитель Вандермонда. Обратная матрица. Теорема Крамера.
- Практическое занятие 4.** Определение и примеры векторных пространств. Линейная независимость векторов. Базис, размерность. Координаты вектора, их изменение при изменении базиса.
- Практическое занятие 5.** Матрица перехода от одного базиса к другому, преобразование координат вектора. Подпространство, его размерность.
- Практическое занятие 6.** Ранг системы векторов. Ранг матрицы.
- Практическое занятие 7.** Матричная запись линейной системы. Метод Гаусса.
- Практическое занятие 8.** Однородные системы, условие существования нетривиального решения. Фундаментальная система решений. Связь между решениями неоднородной и соответствующей однородной систем. Задание подпространства векторного пространства системой линейных уравнений.
- Практическое занятие 9.** Линейное отображение, его ядро и образ. Ранг и дефект. Алгебраические действия над линейными отображениями: сумма, умножение на константу, композиция. Линейный оператор и его матрица.
- Практическое занятие 10.** Изменение матрицы оператора при переходе к другому базису. Матрица композиции и суммы линейных операторов. Собственное значение и собственный вектор оператора. Характеристический многочлен оператора и матрицы.

Описание инновационных подходов и методов к преподаванию учебной дисциплины

При организации образовательного процесса используется **практико-ориентированный подход**, который предполагает:

- освоение содержание образования через решения практических задач;
- приобретение навыков эффективного выполнения разных видов профессиональной деятельности;
- ориентацию на генерирование идей, реализацию групповых студенческих проектов, развитие предпринимательской культуры;

– использованию процедур, способов оценивания, фиксирующих сформированность профессиональных компетенций.

Методические рекомендации по организации самостоятельной работы обучающихся

При изучении учебной дисциплины рекомендуется использовать следующие формы самостоятельной работы:

- изучение литературы и материалов электронных источников по проблемам дисциплины;
- работы, предусматривающие аналитическое решение задач и выполнение заданий практических занятий;
- выполнение домашних заданий;
- подготовка к практическим занятиям;

Для организации самостоятельной работы студентов по учебной дисциплине «Линейная алгебра» используются современные информационные ресурсы: размещается на образовательном портале комплекс учебных и учебно-методических материалов (учебно-программные материалы, учебное издание для теоретического изучения дисциплины, материалы текущего контроля и промежуточной аттестации, позволяющие определить соответствие учебной деятельности обучающихся требованиям образовательного стандарта высшего образования и учебно-программной документации, в т.ч. вопросы для подготовки к дифференцированному зачету, задания, вопросы для самоконтроля и др., список рекомендуемой литературы, информационных ресурсов и др.).

Примерный перечень вопросов к дифференцированному зачету

1. Матрицы и действия над ними. Свойства операций над матрицами. Операция транспонирования и ее свойства.
2. Определители 2 и 3 порядка. Определители порядка n .
3. Свойства определителей порядка n .
4. Обратная матрица. Критерий существования и методы вычисления.
5. Системы линейных уравнений. Метод Крамера.
6. Системы линейных уравнений. Метод Гаусса.
7. Векторные пространства. Определение и примеры. Простейшие свойства векторных пространств.
8. Линейная зависимость и линейная независимость. Примеры. Свойства линейной зависимости.
9. Базис векторного пространства. Примеры. Размерность векторного пространства.

10. Эквивалентные системы векторов. Лемма Штейница.
11. Координаты вектора. Изменение координат вектора при изменении базиса. Матрица перехода.
12. Элементарные преобразования систем векторов.
13. Подпространства векторного пространства. Примеры
14. Размерности суммы и пересечения подпространств.
15. Прямая сумма подпространств. Критерии.
16. Базис и ранг системы векторов. Ранг матрицы.
17. Теорема о ранге матриц.
18. Методы вычисления ранга матрицы.
19. Критерий совместности системы линейных уравнений.
20. Однородные системы линейных уравнений. Фундаментальная система решений.
21. Задание подпространства системой уравнений. Связь решений однородной и неоднородной систем.
22. Линейные отображения. Примеры.
23. Простейшие свойства линейных отображений.
24. Действия над линейными отображениями.
25. Матрица линейного оператора. Матрица суммы и произведения операторов.
26. Изменение матрицы линейного оператора при переходе к новому базису.
27. Ядро и образ и линейного отображения. Теорема о ранге и дефекте.
28. Собственные векторы и собственные значения. Определения и примеры. Нахождение собственных значений.

ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УВО

Название дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы по изучаемой учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)
Математический анализ	Кафедра теории функций	нет	Вносить изменения не требуется (протокол № 11 от 08.06.2023)

**ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ
ПО ИЗУЧАЕМОЙ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ**

на ____ / ____ учебный год

№ п/п	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры высшей алгебры и защиты информации (протокол № ____ от _____ 20__ г.)

Заведующий кафедрой

(степень, звание) (подпись) (И.О.Фамилия)

УТВЕРЖДАЮ
Декан факультета

(степень, звание) (подпись) (И.О.Фамилия)