

Белорусский государственный университет

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по учебной работе
и образовательным инновациям

 О.Е. Прохоренко

«05» июля 2023 г.

Регистрационный № УД – 12293/уч.

Дополнительные главы прикладного анализа

**Учебная программа учреждения высшего образования
по учебной дисциплине для специальности:**

1-31 03 01 Математика (по направлениям)

Направление специальности

1-31 03 01-03 Математика (экономическая деятельность)

2023 г.

Учебная программа составлена на основе ОСВО 1-31 03 01--2021, типового учебного плана № G 31-1-011/пр-тип. от 31.03.2021 и учебного плана № G31-1-004/уч. от 25.05.2021

СОСТАВИТЕЛИ:

Бахтин Виктор Иванович, профессор кафедры функционального анализа и аналитической экономики механико-математического факультета Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор

Лебедев Андрей Владимирович, заведующий кафедрой функционального анализа и аналитической экономики механико-математического факультета Белорусского государственного университета, доктор физико-математических наук, профессор

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

Пыжкова Ольга Николаевна, заведующий кафедрой высшей математики Учреждения образования «Белорусский государственный технологический университет», кандидат физико-математических наук, доцент;

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой функционального анализа и аналитической экономики (протокол № 13 от 22.05.2023);

Научно-методическим советом БГУ (протокол № 9 от 29.06.2023)

Зав. кафедрой ФАиАЭ, профессор



копия

А.В. Лебедев

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Цели и задачи учебной дисциплины

Целью учебной дисциплины «Дополнительные главы прикладного анализа» является подготовка специалистов, владеющих основами векторного и тензорного анализа на гладких многообразиях и способных использовать интегрирование и дифференцирование дифференциальных форм в прикладных задачах.

Задачи учебной дисциплины:

1. Познакомить студентов с гладкими вложенными многообразиями, картами и атласами на них.
2. Научить студентов дифференцировать и интегрировать дифференциальные формы на гладких многообразиях.
3. Научить студентов применять общую формулу Стокса для решения прикладных задач физики и механики.
4. Познакомить студентов с тензорными полями, их свойствами, и их использованием в прикладных задачах.

Место учебной дисциплины. В системе подготовки специалиста с высшим образованием учебная дисциплина относится к модулю «Прикладные методы анализа» компонента учреждения высшего образования.

Учебная программа составлена с учетом межпредметных **связей** и программ по дисциплинам: «Теория функций комплексного переменного», «Функциональный анализ», «Экстремальные задачи».

Требования к компетенциям

Освоение учебной дисциплины «Дополнительные главы прикладного анализа» должно обеспечить формирование следующих компетенций:

универсальные компетенции:

УК-1. Владеть основами исследовательской деятельности, осуществлять поиск, анализ и синтез информации;

базовые профессиональные компетенции:

БПК-2. Использовать понятия и методы вещественного, комплексного и функционального анализа и применять их для изучения моделей окружающего мира.

В результате освоения учебной дисциплины студент должен:

знать:

- что определитель является формой ориентированного объема;
- что якобиан замены переменных является коэффициентом преобразования объемов;
- определения гладкого вложенного многообразия, карты, атласа;
- ориентированные и неориентируемые многообразия;
- многообразия с краем, согласование ориентаций многообразия с его краем;

- дифференциальные формы и их свойства;
- внешний дифференциал от дифференциальной формы;
- общую интегральную форму Стокса;
- соотношение между общей формулой Стокса и формулами Ньютона–Лейбница, Грина, Стокса, Гаусса–Остроградского;
- физический смысл скалярных и векторных полей в трехмерном пространстве;
- связь скалярных и векторных полей с дифференциальными формами;
- определение тензора как полилинейной формы;
- формулу преобразования компонент тензора;
- операции над тензорами: линейные, тензорное произведение, симметризация, альтернирование, внешнее произведение, свертка индексов, поднятие и опускание индексов;

- тензорные поля, в том числе метрический тензор;

- перенос и индуцирование тензорных полей при отображениях;

уметь:

- различать интегралы первого и второго рода;

- определять карты на гладком многообразии;

- вычислять интегралы первого и второго рода по многообразиям;

- применять общую формулу Стокса для интегралов второго рода;

- формализовать физические и механические задачи с помощью интегралов первого и второго рода;

- вычислять форму объема на многообразии;

- выполнять операции с тензорами и тензорными полями;

- использовать тензорные поля для формализации физических задач;

владеть:

- разными способами вычисления интегралов первого и второго рода по многообразиям;

- навыками формализации физических и механических задач в терминах дифференциальных форм и тензорных полей.

Структура учебной дисциплины

Дисциплина изучается в пятом семестре. Всего на изучение учебной дисциплины «Дополнительные главы прикладного анализа» отведено:

– в очной форме получения высшего образования: 108 часов, в том числе 72 аудиторных часа, из них: лекции – 36 часов, лабораторные занятия – 30 часов, управляемая самостоятельная работа – 6 часов.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 3 зачетные единицы.

Форма текущей аттестации – экзамен

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Раздел 1. Приложения общей формулы Стокса

Тема 1.1. Определитель как ориентированный объем

Параллелепипед, натянутый на векторы. Ориентация базиса. Свойства определителя при элементарных преобразованиях строк и столбцов. Объем измеримого по Жордану множества. Поведение объема при элементарных преобразованиях. Определитель как ориентированный объем.

Тема 1.2. Якобиан как коэффициент растяжения объемов

Растяжение объемов при линейных преобразованиях. Якобиан как коэффициент растяжения объемов. Объяснение формулы замены переменных в кратных интегралах.

Тема 1.3. Интегралы I и II рода.

Интегралы первого рода. Различные формы записи интегралов второго рода. Идея рассмотрения гладких многообразий с краем и дифференциальных форм.

Тема 1.4. Гладкие вложенные многообразия

Примеры: сфера, лист Мебиуса, бутылка Клейна. Гладкие вложенные многообразия. Теоремы о неявной и обратной функциях. Задание многообразия как прообраза и как образа. Карты, их гладкая согласованность. Атласы. Ориентированные многообразия.

Тема 1.5. Дифференциальные формы и их интегрирование

Внешние формы, их свойства. Дифференциальные формы. Носитель дифференциальной формы. Интеграл от дифференциальной формы с носителем в карте, его инвариантность. Гладкие разбиения единицы, вписанные в атлас. Интеграл от дифференциальной формы по компактному многообразию, его инвариантность.

Тема 1.6. Дифференцирование дифференциальных форм

Внешний дифференциал, его свойства. Индуцирование дифференциальных форм. Инвариантность внешнего дифференциала. Точные и замкнутые дифференциальные формы.

Тема 1.7. Компактные многообразия с краем

Определение многообразия с краем. Край как многообразие без края. Согласование ориентации многообразия и его края.

Тема 1.8. Общая формула Стокса

Формулировка общей формулы Стокса. Доказательство общей формулы Стокса. Частные случаи общей формулы Стокса: формулы Ньютона–Лейбница, Грина, Гаусса–Остроградского, Стокса.

Раздел 2. Основы тензорного анализа

Тема 2.1. Теория поля

Скалярные и векторные поля. Градиент, дивергенция, ротор. Потенциальные поля, скалярный и векторный потенциал. Физический смысл интегралов II рода.

Оператор Гамильтона «набла».

Тема 2.2. Метрический тензор и интегралы I рода

Матрицы Грама. Объем n-мерного параллелепипеда. Ортогональная проекция на конечномерную линейную оболочку. Метрический тензор на многообразии. Объем на многообразии. Интегралы I рода.

Тема 2.3. Сопряженные линейные пространства

Векторы и ковекторы. Взаимные базисы. Правило Эйнштейна о суммировании по индексам. Преобразование координат векторов и ковекторов при линейных заменах координат.

Тема 2.4. Тензоры в линейных пространствах

Определение тензора. Валентности. Примеры: линейные операторы, скалярное произведение, дифференциальные формы, симплектическая структура. Компоненты тензора в базисе. Операции над тензорами: сложение, умножение на скаляры, тензорное произведение, симметризация, альтернирование, свертка. Поднятие и опускание индексов.

Тема 2.5. Тензорные поля

Векторные и ковекторные поля на гладком многообразии. Метрический тензор. Тензорное поле произвольной валентности. Перенос и индуцирование тензоров при гладких отображениях.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Очная форма получения высшего образования с применением дистанционных образовательных технологий (ДОТ)

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Количество часов УСР	Формы контроля знаний
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Иное		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	Приложения общей формулы Стокса							
1.1	Определитель как ориентированный объем	2			2			опрос, собеседование
1.2	Якобиан как коэффициент растяжения объемов	2			2			опрос, собеседование
1.3	Интегралы I и II рода	2			2			опрос, собеседование
1.4	Гладкие вложенные многообразия	4			4			опрос, собеседование
1.5	Дифференциальные формы и их интегрирование	5			4		2	опрос, собеседование по темам 1.4,1.5
1.6	Дифференцирование дифференциальных форм	2						опрос, собеседование
1.7	Компактные многообразия с краем	2						опрос, собеседование
1.8	Общая формула Стокса	3			2			Контрольная работа № 1 по темам 1.2, 1.3,1.8

2	Основы тензорного анализа							
2.1	Теория поля	2			4			опрос, собеседование
2.2	Метрический тензор и интегралы I рода	3			2		2	опрос, собеседование
2.3	Сопряженные линейные пространства	2			2			опрос, собеседование
2.4	Тензоры в линейных пространствах	5			4		2	Контрольная работа № 2 по темам 2.1, 2.2, 2.3, 2.4
2.5	Тензорные поля	2			2			опрос, собеседование
	Всего	36			30		6	

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Перечень основной литературы

1. Мышкис, А. Д. Математика для технических ВУЗов. Специальные курсы / Мышкис А. Д. - 3-е изд., стер. - Санкт-Петербург : Лань, 2022. - 640 с. - <https://e.lanbook.com/book/210317>.
2. Петрушко, И. М. Курс высшей математики. Интегральное исчисление. Функции нескольких переменных. Дифференциальные уравнения. Лекции и практикум / Петрушко И. М. - 2-е изд., стер. - Санкт-Петербург : Лань, 2022. - 608 с. - <https://e.lanbook.com/book/210140>.
3. Бермант, А. Ф. Краткий курс математического анализа / Бермант А. Ф., Араманович И. Г. - 16-е изд. - Санкт-Петербург : Лань, 2022. - 736 с. - <https://e.lanbook.com/book/210707>.

Перечень дополнительной литературы

1. В.А. Зорич. Математический анализ. Ч. II. – М.: Наука. 1984.
2. Б.А. Дубровин, С.П. Новиков, А.Т. Фоменко. Современная геометрия. – М.: Наука. 1979.
3. П.К. Рашевский. Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Наука. 1967.
4. Я.А. Схоутен. Тензорный анализ для физиков. М.: Наука. 1965.
5. Абрашина-Жадаева, Н. Г. Векторный и тензорный анализ в примерах и задачах = Vector and Tensor Analysis Through Examples and Exercises : учебное пособие для студентов учреждений высшего образования по специальности "Компьютерная физика" / Н. Г. Абрашина-Жадаева, И. А. Тимощенко ; БГУ. - Минск : БГУ, 2019. - 250 с. - <http://elib.bsu.by/handle/123456789/241678>.

Перечень рекомендуемых средств диагностики и методика формирования итоговой отметки

Объектом диагностики компетенций студентов являются знания, умения, полученные ими в результате изучения учебной дисциплины. Выявление учебных достижений студентов осуществляется с помощью мероприятий текущего контроля и текущей аттестации.

Для диагностики компетенций могут использоваться следующие средства текущего контроля: опрос, собеседования, контрольные работы.

Формой текущей аттестации по дисциплине «Дополнительные главы прикладного анализа» учебным планом предусмотрен экзамен

При формировании итоговой отметки используется рейтинговая система оценки знаний студента, дающая возможность проследить и оценить динамику процесса достижения целей обучения.

Рейтинговая система предусматривает использование весовых коэффициентов для текущего контроля знаний и текущей аттестации студентов по дисциплине.

Примерные весовые коэффициенты, определяющие вклад текущего контроля знаний в итоговую отметку:

Формирование отметки за текущую успеваемость:

1. Опрос, собеседование – 40 %;
2. результаты контрольных работ – 60 %;

Итоговая отметка по дисциплине рассчитывается на основе отметки текущей успеваемости (рейтинговой системы оценки знаний) – 30% и экзаменационной отметки – 70%.

Примерный перечень заданий для управляемой самостоятельной работы студентов

Тема 1.4. Гладкие вложенные многообразия. (2ч)

Тема 1.5. Дифференциальные формы и их интегрирование.

Задание: Составить атлас сферы, в верхней полусферы, листа Мебиуса, бутылки Клейна. Разрезать бутылку Клейна на два листа Мебиуса. Объяснить согласование ориентации края верхней полусферы. Вычислить внешний дифференциал от дифференциальной формы. Найти первообразную от полного дифференциала.

Форма контроля – опрос, собеседование

Тема 2.2. Метрический тензор и интегралы I рода (2ч)

Задание: Определить типы метрических тензоров и их свойства. Вычисление поверхностного интеграла I рода.

Форма контроля – опрос, собеседование

Контрольная работа № 2 (примерный вариант) (2ч)

Тема 2.1. Теория поля

Задача 6. Вычислить $\text{rot}(\bar{a}, \bar{r})\bar{r}$.

Тема 2.2. Метрический тензор и интегралы I рода

Задача 7. Вычислить поверхностный интеграл

$$\int_{\pi} z dS; \quad \pi: \begin{cases} x = u \cos v \\ y = u \sin v \\ z = v \end{cases} \quad 0 \leq u \leq a, \quad 0 \leq v \leq 2\pi$$

Тема 2.3. Сопряженные линейные пространства

Задача 8. Пусть $e_1 = (1, 0, 1)$, $e_2 = (0, 1, 1)$, $e_3 = (1, 2, 0)$, $g_{ij} = \delta_{ij}$. Найти взаимный базис.

Тема 2.4. Тензоры в линейных пространствах

Задача 9. Свернуть вектор $(1, 2, 3)$ с последним индексом ε_{ijk} .

Задача 10. Пусть $a_{ijk} + a_{ikj}$ – тензор. Доказать, что если a_{ijk} симметричен по второму и третьему индексам, то a_{ijk} – тензор.

Форма контроля – контрольная работа

Примерный перечень заданий для контрольной работы №1

Тема 1.2. Якобиан как коэффициент растяжения объемов

Задача 1. Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле

$$\int_{-2}^{-1} dx \int_0^{x+2} f(x, y) dy + \int_{-1}^0 dx \int_0^{x^2} f(x, y) dy.$$

Тема 1.3 Интегралы I и II рода

Задача 2. Вычислить криволинейный интеграл

$$\oint_C (x+y)dx - (x-y)dy, \quad \text{где } c: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Задача 3. Найти работу поля $(y+z)i + (2+x)j + xk$ вдоль кратчайшей дуги большого круга сферы $x^2 + y^2 + z^2 + 25$, соединяющей точки $M(3, 4, 0)$ и $N(0, 0, 5)$

Задача 4. Найти поток вектора $x^2i + y^2j + z^2k$ через поверхность $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

Тема 1.8. Общая формула Стокса

Задача 5. Найти циркуляцию вектора $\text{grad}(\arctg(y/x))$ вдоль контура, окружающего ось OZ .

Примерная тематика лабораторных занятий

Занятие № 1. Расстановка пределов в повторных интегралах и замены переменных в двойных интегралах.

Занятие № 2. Расстановка пределов и замены переменных в тройных интегралах.

Занятие № 3. Вычисление якобианов геометрическим способом и через формы объема.

Занятие № 4. Обсуждение топологии сферы, листа Мебиуса, бутылки Клейна. Карты, ориентация.

Занятие № 5. Обсуждение физического смысла интегралов II рода в трехмерном пространстве. Работа и поток векторного поля, масса с переменной плотностью.

Занятие № 6. Представление интегральных формул Ньютона–Лейбница, Гаусса–Остроградского, Стокса, Грина как частных случаев общей формулы Стокса.

Занятие № 7. Самостоятельная работа по вычислению кратных интегралов.

Занятие № 8. Примеры использования интегральной формулы Грина.

Занятие № 9. Вычисление потоков векторных полей через поверхности.

Занятие № 10. Вычисление потоков векторных полей через поверхности.

- Занятие № 11. Вычисление циркулирующих векторных полей вдоль контуров.
- Занятие № 12. Сопряженные линейные пространства.
- Занятие № 13. Вычисление ортогональных проекций и объемов с помощью матриц Грама.
- Занятие № 14. Вычисление поверхностных интегралов I рода.
- Занятие № 15. Операции над тензорами.
- Занятие № 16. Тензоры в линейных пространствах.
- Занятие № 17. Тензорные поля.
- Занятие № 18. Вычисление первой квадратичной формы и формы площади на поверхностях.

Описание инновационных подходов и методов к преподаванию учебной дисциплины

При организации образовательного процесса могут быть использованы следующие подходы и методы: *эвристический подход, практико-ориентированный подход, методы и приемы развития критического мышления, метод группового обучения*, которые предполагают:

- осуществление студентами значимых открытий;
- демонстрацию многообразия решений большинства профессиональных задач;
- индивидуализацию обучения через возможность самостоятельно ставить цели, осуществлять рефлексию собственной образовательной деятельности;
- освоение содержания образования через решения практических задач;
- приобретение студентом знаний и умений для решения практических задач;
- приобретение навыков для решения исследовательских, творческих, социальных, предпринимательских и коммуникационных задач.

Использование указанных методов обеспечивает появление нового уровня понимания изучаемой темы, применение знаний (теорий, концепций) при решении проблем, определение способов их решения. Также они представляют собой систему, формирующую навыки работы с информацией в процессе чтения и письма; понимания информации как отправного, а не конечного пункта критического мышления, и являются организацией учебно-познавательной деятельности обучающихся, предполагающую функционирование разных типов малых групп, работающих как над общими, так и специфическими учебными заданиями

Методические рекомендации по организации самостоятельной работы обучающихся

При изучении учебной дисциплины рекомендуется использовать следующие формы самостоятельной работы:

- поиск (подбор) и обзор литературы и электронных источников по изучаемой теме;
- выполнение домашнего задания;
- работы, предусматривающие решение задач и выполнение упражнений;
- изучение материала, вынесенного на самостоятельную проработку;
- подготовка к лабораторным занятиям;
- научно-исследовательские работы;
- подготовка к участию в конференциях и конкурсах.

Примерный перечень вопросов к экзамену

1. Поведение объема параллелепипеда при элементарных линейных преобразованиях.
2. Определитель как ориентированный объем параллелепипеда.
3. Растяжение объемов при элементарных преобразованиях.
4. Якобиан как локальный коэффициент растяжения объемов.
5. Интегралы I и II рода, их формы записи и физический смысл.
6. Теоремы о неявной и обратной функциях
7. Гладкие вложенные многообразия
8. Задание многообразия как прообраза и как образа
9. Карты, атласы и ориентация многообразия.
10. Теорема о гладкой согласованности карт.
11. Внешние и дифференциальные формы, их носители.
12. Инвариантность интеграла от дифференциальной формы с носителем в карте.
13. Гладкие разбиения единицы, вписанные в атлас.
14. Интеграл от дифференциальной формы по компактному многообразию.
15. Индуцирование дифференциальных форм.
16. Внешний дифференциал, его инвариантность.
17. Точные и замкнутые дифференциальные формы.
18. Многообразия с краем. Согласование ориентации края.
19. Общая формула Стокса.
20. Частные случаи формулы Стокса в трехмерном пространстве.
21. Градиент, дивергенция, ротор, их формы записи.
22. Матрицы Грама, их свойства.
23. Объем неполномерного параллелепипеда.
24. Ортогональная проекция на линейную оболочку.
25. Метрический тензор и объем на многообразии.
26. Преобразование координат векторов и ковекторов при линейных заменах.
27. Тензоры как полилинейные формы, примеры.
28. Преобразование компонент тензора при линейных заменах.

29. Алгебраические операции над тензорами.
30. Векторные и ковекторные поля на гладких многообразиях.
31. Метрический тензор и симплектическая структура на многообразии.
32. Перенос и индуцирование тензорных полей при гладких отображениях.

ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УВО

Название учебной дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы учреждения высшего образования по учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)
1. Теория вероятностей и математическая статистика	Кафедра функционального анализа и аналитической экономики	нет	Вносить изменения не требуется (протокол № 5 от 25.11.2022)
2. Уравнения математической физики	Кафедра математической кибернетики	нет	Вносить изменения не требуется (протокол № 13 от 22.05.2023)
3. Функциональный анализ	Кафедра функционального анализа и аналитической экономики	нет	Вносить изменения не требуется (протокол № 13 от 22.05.2023)
4. Вариационное исчисление	Кафедра функционального анализа и аналитической экономики	нет	Вносить изменения не требуется (протокол № 13 от 22.05.2023)
5. Численные методы	Кафедра веб-технологий и компьютерного моделирования	нет	Вносить изменения не требуется (протокол № 13 от 22.05.2023)

**ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ ПО
ИЗУЧАЕМОЙ УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ**

на ____ / ____ учебный год

№ п/п	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры
_____ (протокол № ____ от _____ 202_ г.)

Заведующий кафедрой

УТВЕРЖДАЮ
Декан факультета
