

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по учебной работе и
образовательным инновациям

О.Г. Прохоренко

«05» июля 2023 г.

Регистрационный № УД - 457/б.

ГЕОМЕТРИЯ

**Учебная программа учреждения высшего образования
по учебной дисциплине для специальности:**

6-05-0533-07 Математика и компьютерные науки

Профилизации: Веб-программирование и интернет-технологии

Математическое и программное обеспечение мобильных устройств

Минск 2023

Учебная программа составлена на основе ОСВО 6-05-0533-07-2023, примерного учебного плана, регистрационный №6-05-05-028/пр от 30.01.2023, учебных планов БГУ: № 6-5.4-55/03 от 15.05.2023, № 6-5.4-55/02 от 15.05.2023, № 6-5.4-55/22з от 31.05.2023, № 6-5.4-55/23з от 31.05.2023, № 6-5.4-55/13и от 31.05.2023, № 6-5.4-55/12и от 31.05.2023.

СОСТАВИТЕЛИ:

Кукрак Глеб Олегович – доцент кафедры геометрии, топологии и методики преподавания математики Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент;

Суворов Владимир Васильевич – доцент кафедры геометрии, топологии и методики преподавания математики Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент;

Кононов Сергей Гаврилович – доцент кафедры геометрии, топологии и методики преподавания математики Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент.

РЕЦЕНЗЕНТЫ:

Шлыков Владимир Владимирович – профессор кафедры математики и методики преподавания математики физико-математического факультета УО «Белорусский государственный педагогический университет имени Максима Танка», доктор педагогических наук, кандидат физико-математических наук, профессор.

Матвеев Геннадий Васильевич, доцент кафедры высшей математики факультета прикладной математики и информатики Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент.

РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:

Кафедрой геометрии, топологии и методики преподавания математики (протокол № 12 от 23.05.2023);

Научно-методическим советом БГУ (протокол № 9 от 29.06.2023)

Заведующий кафедрой геометрии, топологии и методики преподавания математики

Д.Ф. Базылев



ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Геометрия является одной из основных дисциплин, которые читаются студентам-математикам в начале обучения в университете. Понятия и основные факты этой дисциплины используются при изучении многих математических дисциплин, в первую очередь таких, как «Алгебра и теория чисел», «Математический анализ».

Цели и задачи учебной дисциплины:

Главными **целями** учебной дисциплины «Геометрия» являются:

- освоение новых по сравнению с элементарной геометрией пространств: многомерных аффинных и евклидовых, а также изучение фигур первого и второго порядков в этих пространствах;
- овладение основным методом исследования в аналитической геометрии – методом координат;
- приобретение студентами достаточного объема знаний, навыков и умений в области геометрии для их использования при изучении других математических дисциплин.

В первом семестре для достижения этих целей с целью сохранения преемственности со школьной геометрией рассмотрение ведется в рамках аксиоматики трехмерного евклидова пространства, принятой в средней школе.

Решаются следующие **задачи**:

- Определяется понятие геометрического вектора как класса эквивалентных направленных отрезков. Излагается векторная алгебра, используемая в дальнейшем как основа координатного метода;
- Вводятся понятия «координат точки» и «уравнение фигуры». Демонстрируется применение координатного метода для изучения прямых, плоскостей и фигур второго порядка на плоскости и в пространстве E^3 . Обосновывается независимость результатов изучения от выбора системы координат.

Во втором семестре

- В рассмотрение вводится понятие многомерного аффинного пространства A^n , как множества с дополнительной структурой, разрабатывается методика применения координатного метода для изучения фигур в A^n ;
- С помощью координатного метода определяются и изучаются k -мерные плоскости (в том числе прямые) и фигуры второго порядка в A^n ;
- Определяется понятие аффинного преобразования аффинного пространства A^n , группы аффинных преобразований. Демонстрируется, что изучаемые свойства фигур в аффинном пространстве инвариантны относительно действия аффинных преобразований;
- Вводится понятие n -мерного точечного евклидова пространства E^n , как аффинного пространства с дополнительной структурой. Обсуждаются возникающие понятия «расстояние между точками», «расстояние от точки до k -мерной плоскости», «ортогональные плоскости», проекция точки на k -мерную плоскость»;
- Дается классификация движений (аффинных преобразований, сохраняющих

расстояние между точками) точечной евклидовой плоскости. Рассматриваются некоторые примеры аффинных преобразований пространства E^n (подобие, гомотетия, сдвиг);

- Вводится определение кривой в E^n , понятие длины дуги кривой, кривизны и кручения кривой, даются вычислительные формулы;
- Определяется понятие поверхности в E^n , формулы для вычисления длины дуги кривой и угла между кривыми на поверхности.

Место учебной дисциплины в системе подготовки специалиста с высшим образованием.

Учебная дисциплина «*Геометрия*» относится к модулю «*Алгебра и геометрия*» 1 государственного компонента.

Изучение учебной дисциплины «*Геометрия*» в течение всего срока обучения проходит во взаимосвязи с изучаемыми параллельно дисциплинами: «*Алгебра и теория чисел*», «*Математический анализ*».

Требования к компетенциям

Освоение учебной дисциплины «*Геометрия*» должно обеспечить формирование следующей **базовой профессиональной компетенции**:

БПК-5. Применять основные алгебраические и геометрические понятия, конструкции и методы при решении теоретических и прикладных математических задач.

В соответствии с образовательным стандартом в результате изучения дисциплины обучающийся должен:

знать:

- векторы в E^3 , операции над векторами;
- канонические уравнения и свойства эллипсов, гипербол, парабол, эллипсоидов, гиперболоидов, параболоидов;
- понятия n -мерного аффинного и евклидова пространств; аффинные реперы и координаты точек; k -мерные плоскости и фигуры второго порядка, группы геометрических преобразований;
- понятия кривой и поверхности в E^3

уметь:

- выполнять операции над векторами; записывать общие и параметрические уравнения плоскостей в различных пространствах, определять их взаимное расположение; находить расстояния между плоскостями;
- по общему уравнению фигуры второго порядка в E^2 определять ее тип, размеры, расположение относительно системы координат; приводить общее уравнение фигуры второго порядка в аффинном пространстве к нормальному виду;
- находить длину дуги, кривизну и кручение кривой, длину дуги кривой и угол между кривыми на поверхности;

владеть:

- методом координат при решении основных геометрических задач.

Структура учебной дисциплины

Дисциплина изучается в 1 и 2 семестрах очной (дневной) формы получения высшего образования, в 1,2,3,4 семестрах заочной формы получения высшего образования. Всего на изучение учебной дисциплины «Геометрия» отведено:

– для очной формы получения высшего образования – 222 часа, в том числе 140 аудиторных часов, из них:

в 1 семестре – 72 аудиторных часа, из них: лекции – 36 часов, лабораторные занятия – 30 часов, управляемая самостоятельная работа – 6 часов.

во 2 семестре – 68 аудиторных часов, из них: лекции – 34 часа, лабораторные занятия – 30 часов, управляемая самостоятельная работа – 4 часа.

– для заочной формы получения высшего образования – 34 аудиторных часа, из них: лекции – 22 часа, лабораторные занятия – 12 часов.

Трудоемкость учебной дисциплины составляет 6 зачетных единиц.

Форма промежуточной аттестации: очная форма обучения -- экзамен в 1 и 2 семестрах, заочная форма обучения -- во 2 и 4 семестрах экзамен, в 1, 2, 3 семестрах – контрольная работа.

СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

Раздел 1. Векторы

Тема 1.1. Понятие вектора. Линейные операции над векторами.

Направленные отрезки. Векторы как классы эквивалентных направленных отрезков. Длина вектора. Откладывание вектора от точки. Величина угла между векторами. Коллинеарные и компланарные системы векторов.

Сложение векторов, свойства операции сложения. Умножение векторов на числа, свойства этой операции. Линейные комбинации векторов.

Тема 1.2. Базисы и координаты векторов.

Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов. Базисы и координаты векторов. Ориентация прямой, плоскости и пространства.

Тема 1.3. Полилинейные операции над векторами.

Скалярное произведение векторов. Векторное произведение векторов. Смешанное произведение векторов. Формулы преобразования координат векторов.

Раздел 2. Прямые и плоскости

Тема 2.1. Системы координат. Фигуры и уравнения

Аффинные реперы на прямой, на плоскости и в пространстве. Координаты точки в данном репере. Ортонормированные реперы (прямоугольные системы координат). Формулы преобразования аффинных координат точек. Два основных способа задания фигуры: параметризация фигуры и задание фигуры с помощью уравнения.

Тема 2.2. Прямые на плоскости E^2 .

Различные виды уравнений прямой на плоскости. Определение взаимного расположения двух прямых на плоскости по их уравнениям. Формулы для вычисления расстояния от точки до прямой и величины угла между прямыми. Геометрический смысл линейного неравенства с двумя неизвестными.

Тема 2.3. Плоскости и прямые в пространстве E^3 .

Различные виды уравнений плоскости в пространстве. Определение взаимного расположения двух плоскостей по их уравнениям. Различные виды уравнений прямой в пространстве. Определение взаимного расположения прямых и плоскостей в пространстве по их уравнениям. Формулы для вычисления расстояний от точки до прямой и от точки до плоскости в пространстве. Геометрический смысл линейного неравенства с 3 неизвестными.

Раздел 3. Фигуры второго порядка

Тема 3.1. Фигуры второго порядка на плоскости E^2 .

Эллипс – каноническое уравнение, фокусы, эксцентриситет. Гипербола – определение, каноническое уравнение, фокусы, эксцентриситет, асимптоты. Директрисы эллипса и гиперболы. Парабола – каноническое уравнение, фокус и директриса. Параметрические задания эллипса и гиперболы.

Общее уравнение фигуры второго порядка на плоскости, приведение его к каноническому виду. Классификация фигур второго порядка на плоскости.

Тема 3.2. Фигуры второго порядка в пространстве E^3 .

Понятие фигуры второго порядка в пространстве. Метод сечений исследования формы пространственной фигуры. Основные типы фигур второго порядка в пространстве: эллипсоиды, однополостные и двуполостные гиперболоиды, эллиптические и гиперболические параболоиды, конусы. Цилиндрические фигуры второго порядка.

Раздел 4. Векторные пространства

Тема 4.1. Векторные пространства.

Определение векторного пространства. Координаты векторов, преобразование координат при переходе к другому базису. Подпространства векторного пространства. Способы задания векторных подпространств.

Раздел 5. Аффинные пространства

Тема 5.1. Определение, примеры и простейшие свойства аффинного пространства.

Понятие аффинного пространства и его простейшие свойства, вытекающие из аксиом. Примеры.

Тема 5.2. Координаты в аффинном пространстве.

Аффинные реперы и координаты точек в аффинном пространстве.

Формулы преобразования координат в аффинном пространстве A^n .

Тема 5.3. Плоскости в аффинном пространстве.

Понятие k -мерной плоскости в аффинном пространстве A^n . Начальная точка и направляющее пространство плоскости. Общие и параметрические уравнения плоскости в аффинном пространстве. Прямые и гиперплоскости. Пересечение плоскостей. Аффинная оболочка множества точек. Аффинно независимые системы точек. Типы взаимного расположения двух плоскостей в аффинном пространстве. Характеристика пары плоскостей.

Тема 5.4. Аффинные преобразования.

Понятие аффинного отображения аффинных пространств. Однородная часть аффинного отображения. Аффинные преобразования. Образ фигуры при аффинном преобразовании. Аффинно эквивалентные фигуры. Критерий эквивалентности плоскостей, пар плоскостей. Простое отношение трех точек.

Тема 5.5. Фигуры второго порядка в вещественных аффинных пространствах.

Фигуры второго порядка (квадрики) в вещественном аффинном пространстве A^n . Пересечение квадрики с прямой. Асимптотические направления. Центры квадрик. Диаметральные плоскости квадрики. Диаметры линий второго порядка. Приведение уравнений квадрики к нормальному виду с помощью преобразования координат. Аффинная классификация квадрик в вещественном аффинном пространстве A^n . Аффинная классификация линий второго порядка.

Раздел 6. Евклидовы пространства

Тема 6.1. Евклидовы векторные пространства.

Понятие евклидова векторного пространства, примеры. Ортонормированные базисы и ортогональные матрицы. Процесс ортогонализации. Ортогональное дополнение подпространства.

Тема 6.2. Евклидовы точечные пространства.

Понятие n -мерного евклидова точечного пространства E^n . Ортонормированные реперы. Плоскости в пространстве E^n , ортогональность плоскостей. Вычисление расстояний и величин углов между двумя плоскостями.

Тема 6.3. Движения и евклидова геометрия.

Группа движений пространства E^n . Евклидово эквивалентные фигуры и евклидова геометрия. Классификация движений евклидовой плоскости. Расстояние и углы как инварианты группы движений.

Раздел 7. Кривые и поверхности

Тема 7.1. Кривые в пространстве E^3 .

Определение кривой в E^3 . Способы задания кривых. Примеры. Касательная прямая в точке кривой. Вычисление длины дуги кривой. Натуральная параметризация. Репер Френе. Формулы Френе. Кривизна и кручение кривой.

Тема 7.2. Поверхности в пространстве E^3 . Способы задания. Примеры. Касательное пространство, касательная плоскость и нормаль в точке поверхности. Первая фундаментальная форма поверхности. Формулы для вычисления длины дуги кривой и угла между кривыми на поверхности.

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Очная форма получения высшего образования с применением дистанционных образовательных технологий (ДОТ)

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Количество часов УСР	Форма контроля знаний
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Иное		
1.	2	3	4	5	6	7	8	9
1 семестр								
1.	Векторы							
1.1.	Понятие вектора. Линейные операции над векторами	2			3			Опрос
1.2.	Базисы и координаты векторов.	2			3			Опрос
1.3.	Полилинейные операции над векторами.	6			4		2	Опрос
2	Прямые и плоскости							
2.1.	Системы координат. Фигуры и уравнения	5			2			Опрос
2.2.	Прямые на плоскости E^2 .	5			4		2	Контрольная работа №1 по темам 1.1 - 1.3, 2.1 - 2.2
2.3.	Плоскости и прямые в пространстве E^3 .	4			4			Опрос
3.	Фигуры второго порядка							
3.1.	Фигуры второго порядка на плоскости E^2 .	6			6		2	Контрольная работа №2 по темам 2.3, 3.1.
3.2.	Фигуры второго порядка в пространстве E^3	6			4			Опрос
	Всего за семестр	36			30		6	Экзамен
2 семестр								
4.	Векторные пространства.							
4.1.	Векторные пространства	4			4			Опрос
5.	Аффинные пространства							
5.1.	Определение, примеры и простейшие свойства аффинного	1			1			Опрос

	пространства.						
5.2.	Координаты в аффинном пространстве.	1		1			Опрос
5.3.	Плоскости в аффинном пространстве.	4		4			Опрос
5.4.	Аффинные преобразования.	6		4		2	Контрольная работа № 3 по темам 5.1-5.4
5.5.	Фигуры второго порядка в вещественных аффинных пространствах.	4		4			Опрос
6.	Евклидовы пространства						
6.1.	Евклидовы векторные пространства.	4		1			Опрос
6.2.	Евклидовы точечные пространства.	2		3			Опрос
6.3.	Движения и евклидова геометрия.	2		2		2	Контрольная работа № 4 по темам 5.5, 6.1 – 6.3
7.	Кривые и поверхности						Опрос
7.1.	Кривые в пространстве E^3 .	3		2			Опрос
7.2.	Поверхности в пространстве E^3	3		4			Опрос
	Всего за семестр	34		30		4	Экзамен
	Всего по учебной дисциплине	70		60		10	

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Заочная форма получения высшего образования

Номер раздела, темы	Название раздела, темы	Количество аудиторных часов					Количество часов УСР	Форма контроля знаний
		Лекции	Практические занятия	Семинарские занятия	Лабораторные занятия	Иное		
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	Векторы							
1.1	Понятие вектора. Линейные операции над векторами	2						
1.2	Базисы и координаты векторов.	2			2			Опрос
1.3	Полилинейные операции над векторами	2			2			Опрос
2	Прямые и плоскости							
2.1	Системы координат. Фигуры и уравнения	2						
2.2	Прямые на плоскости E^2 .	2			2			Опрос
2.3.	Плоскости и прямые в пространстве E^3	2			2			Опрос
3	Фигуры второго порядка							
3.1	Фигуры второго порядка на плоскости E^2 .	2			2			Опрос
3.2	Фигуры второго порядка в пространстве E^3 .	2						
5	Аффинные пространства							
5.2	Координаты в аффинном пространстве.	2						
5.4	Аффинные преобразования	2						
6.	Евклидовы пространства							
6.3.	Движения и евклидова геометрия	2			2			Опрос
	Всего по учебной дисциплине	22			12			

ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

Перечень основной литературы

1. Александров, П. С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры : учебник для вузов / П. С. Александров. - 4-е изд., стер. - Санкт-Петербург : Лань, 2022. - 512 с. - URL: <https://e.lanbook.com/book/242861>.
2. Березкина, Л. Л. Аналитическая геометрия и линейная алгебра : учебник для студентов учреждений высшего образования по физическим и радиофизическим специальностям / Л. Л. Березкина. - Минск : РИВШ, 2022. - 411 с.
3. Кононов, С. Г. Аналитическая геометрия : учеб. пособие для студ. учреждений высш. образования по математическим спец. / С. Г. Кононов ; БГУ. - Минск : БГУ, 2014. - 238 с. - <http://elib.bsu.by/handle/123456789/113440>.
4. Клетеник, Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии : учебное пособие / Д. В. Клетеник ; под ред. Н. В. Ефимова. - Изд. 17-е, стер. - Санкт-Петербург ; Москва ; Краснодар : Лань, 2022. - 223 с. - URL: <https://e.lanbook.com/book/187823>.
5. Постников, М. М. Аналитическая геометрия / Постников М. М. - 3-е изд., испр. - Санкт-Петербург : Лань, 2022. - 416 с. - URL: <https://e.lanbook.com/book/210347>.
6. Рашевский, П. К. Курс дифференциальной геометрии : учебник для государственных университетов / П. К. Рашевский. - Изд. стер. - Москва : URSS : ЛКИ, 2021. - 428 с.

Перечень дополнительной литературы

1. Бурдун А.А., Мурашко Е.А., Толкачев М.М., Феденко А.С. Сборник задач по алгебре и аналитической геометрии: учебное пособие. – Минск: Университетское, 1999. – 302 с.
2. Моденов П.С., Пархоменко А.С. Сборник задач по аналитической геометрии: учебное пособие. – М., Наука, 1976.– 384 с.
3. Кострикин А.И., Манин Ю.И. Линейная алгебра и геометрия: учебное пособие. – М., Наука, 1986. – 303 с.
4. Постников М.М. Лекции по геометрии. Семестр I. Аналитическая геометрия: учебное пособие. – М., Наука, 1979. – 336 с.
5. Милованов М.В., Тышкевич Р.И., Феденко А.С. Алгебра и аналитическая геометрия: в 2 ч.: учебное пособие. – Минск: Вышэйшая школа, 1984. – Ч. 1. – 302 с.
6. Милованов М.В., Толкачев М.М., Тышкевич Р.И., Феденко А.С. Алгебра и аналитическая геометрия: в 2 ч.: учебное пособие. – Минск: Вышэйшая школа, 1987. – Ч. 2. – 269 с.
7. Сборник задач и упражнений по дифференциальной геометрии. Под редакцией А.С. Феденко: учебное пособие. - 2-е издание. М: Наука, Главная ред. физ.-мат. Лит., 1979.- 272 с.

Перечень рекомендуемых средств диагностики и методика формирования итоговой отметки

Для оценки соответствия достижений и уровня знаний студентов требованиям программы используется следующий диагностический инструментарий:

- контрольные работы;
- устный опрос.

При оценивании устных ответов учитываются полнота, глубина, обоснованность и точность изложения материала, степень осознанности изученного материала, подтверждение теоретических фактов примерами, грамотность речи.

Формой промежуточной аттестации по дисциплине «Геометрия» учебным планом предусмотрен экзамен.

При формировании итоговой отметки используется рейтинговая система оценки знаний студента, дающая возможность проследить и оценить динамику процесса достижения целей обучения. Рейтинговая система предусматривает использование весовых коэффициентов в ходе проведения контрольных мероприятий текущей аттестации.

Отметка текущей аттестации рассчитывается как среднее арифметическое отметок по всем формам (мероприятиям) текущего контроля знаний по учебной дисциплине.

Итоговая отметка по дисциплине рассчитывается на основе отметки текущей аттестации и экзаменационной отметки с учетом их весовых коэффициентов. Вес отметки по текущей аттестации составляет 40 %, экзаменационной отметки – 60 %.

Примерный перечень заданий для управляемой самостоятельной работы студентов

Раздел 1. «Векторы» (темы 1.1 – 1.3), Раздел 2. «Прямые и плоскости» (темы 2.1, 2.2.) -- (2ч.)

Контрольная работа № 1 (примерный вариант).

1. Пусть M – точка пересечения медиан треугольника ABC . Выразите векторы $\vec{MA}, \vec{MB}, \vec{MC}$ через векторы $\vec{a} = \vec{AB}$ и $\vec{b} = \vec{BC}$.

2. Пусть $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ – правый ортонормированный базис. Даны векторы $\vec{a} = 5\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{c} = -3\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$. Найдите: 1) координаты вектора $\vec{d} = \vec{a} - 2\vec{b} + \vec{c}$ в базисе $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$; 2) величину угла между векторами \vec{b} и \vec{c} ; 3) длину вектора $\vec{c} \times \vec{b}$; 4) смешанное произведение $\vec{b}\vec{c}\vec{d}$.

3. Дана прямая Δ :
$$\begin{cases} x = -1 + 3t, \\ y = 2 - 2t. \end{cases}$$

1) Для прямой Δ найдите: направляющий вектор; нормальный вектор; угловой коэффициент; общее уравнение.

2) Напишите уравнения прямых Δ_1 и Δ_2 , параллельных Δ и отстоящих от Δ на расстояние $d = \sqrt{13}$.

3) Найдите точку, симметричную точке $M(6,6)$ относительно прямой Δ .

4. Даны точки $A(3,5)$ и $B(-1,-2)$. На прямой $7x - 6y + 1 = 0$ найдите точку C такую, что площадь треугольника ABC равна 1.

5. Луч света проходит через точку $M_1(1,-1,-1)$ и, отразившись от плоскости $\pi: x - y - z - 6 = 0$, проходит через точку $M_2(-1,2,0)$. Напишите уравнения прямых, содержащих соответственно лучи падающий и отраженный.

Раздел 2. «Прямые и плоскости» (тема 2.3), Раздел 3. «Фигуры второго порядка» (тема 3.1) – (2 ч.)

Контрольная работа № 2 (примерный вариант).

1. Найдите точку, симметричную точке $P(6, -5, 5)$ относительно плоскости $2x - 3y + z - 4 = 0$.
2. Установите взаимное расположение прямых: $x = 8 + 3t, y = 7 - 2t, z = 11 + t$ и $x = 5 - 6t', y = 9 + 4t', z = 10 - 2t'$.
3. Даны 2 прямые $\Delta_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{2}$, $\Delta_2: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{2}$.
3.1) не пересекаются и найти расстояние между ними
4. Напишите уравнения плоскостей, параллельных плоскости $2x - 2y - z - 6 = 0$ и отстоящих от нее на расстояние 6.
5. Найти проекцию прямой $x = 1 + t, y = 3 + t, z = 2 + t$ на плоскость $3x - 2y - z + 15 = 0$
6. Определите тип, размеры и расположение фигуры второго порядка $4x^2 + 12xy - y^2 - 8x - 12y - 5 = 0$, заданной данным уравнением. Сделайте рисунок.
7. Точка $M(1, -2)$ принадлежит гиперболе, фокус которой $F(-2, 2)$, а соответствующая директриса задана уравнением $2x - y - 1 = 0$. Составьте уравнение этой гиперболы.
8. Для эллипсов $25x^2 + 9y^2 = 225$ и $9x^2 + 25y^2 = 225$ найти полуоси, фокусы, эксцентриситет, уравнения директрис.

Раздел 5. «Аффинные пространства» (темы 5.1 - 5.4) - (2ч.)

Контрольная работа № 3 (примерный вариант).

1. Пусть задано аффинное преобразование $f: \begin{cases} x' = y - 9, \\ y' = 9x + 1. \end{cases}$

- 1.1). Найдите инвариантные прямые аффинного преобразования f ;
- 1.2). Найдите образ фигуры $x^2 + y^2 - 1 = 0$ при преобразовании f ;
- 1.3) Как запишется преобразование в системе координат, в которой координатными осями являются инвариантные прямые преобразования f ?
2. Выясните, лежат ли точки A, B, C на одной прямой. Если «да», укажите простое отношение трех точек A, B, C
- 1) $A = (2, 1, -2, 0), B = (1, -3, -3, 1), C = (4, 9, 0, -2)$;
- 2) $A = (-1, 0, 2, 2), B = (2, 1, 0, 4), C = (-2, -1, 3, 0)$.

2. Напишите параметрическое уравнение прямой $\begin{cases} x - 1 = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$.

3. Напишите параметрические уравнения плоскости, являющейся аффинной оболочкой точек

$$A = (1, 1, -2, 2), B = (-3, 1, 4, 4), C = (-1, 2, 3, 6), D = (0, 2, -1, 3), E = (-1, 0, 1, 2).$$

4. Даны плоскости $\Pi_1^2 = M_0 + W^2$ и $\Pi_2^2 = N_0 + U^2$ в аффинном пространстве A^4

Здесь $M_0 = (2, 5, 1, 5), W^2 = \langle (1, 3, -1, 2), (2, 4, -3, 5) \rangle$;

$$N_0 = (0, -3, -1, -2), U^2 = \langle (1, 5, 3, 5), (2, 4, -6, 1) \rangle.$$

Найдите характеристику и определите взаимное расположение этих плоскостей.

5. Даны две плоскости Π_1, Π_2 в аффинном пространстве A^5 и их характеристика (k, l, m, s) . Поясните, что означают числа k, l, m, s в характеристике и укажите взаимное расположение плоскостей в каждом из следующих случаев:

- 1) $(2, 3, 0, 5), 2) (2, 3, 2, 4), 3) (2, 3, 2, 3), 4) (3, 3, 2, 5)$.

Раздел 5. «Аффинные пространства» (тема 5.5), Раздел 6. «Евклидовы пространства» (темы 6.1 – 6.3) - (2ч.)

Контрольная работа № 4 (примерный вариант).

1. Назовите фигуры, заданные уравнениями, и сделайте схематические рисунки, показав их расположение относительно правой ортонормированной системы координат:

- а) $x^2 - 2y^2 + 3z^2 = 1$, б) $x^2 - 2y^2 + z^2 = 0$, в) $x^2 - 2y^2 = 1$, г) $-y^2 + 2z^2 = 2x$,
д) $y^2 = 4$

2. В евклидовом пространстве E^4 найдите расстояние от точки $M_0 = (8, 10, -9, -1)$ до плоскости Π , заданной системой уравнений:

$$\Pi: \begin{cases} 4x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 21, \\ -2x_2 + x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$$

а также ортогональную проекцию данной точки на плоскость Π .

3. Пусть $(O, \vec{c}_1, \dots, \vec{c}_n)$ – ортонормированный репер в евклидовом пространстве E^n . Найдите расстояние от начала координат до гиперплоскости, которая отсекает на координатных осях отрезки величиной b_1, \dots, b_n .

4. Доказать, что аффинное преобразование $\begin{cases} x' = -\frac{5}{13}x + \frac{12}{13}y + 2 \\ y' = \frac{12}{13}x + \frac{5}{13}y \end{cases}$

является движением. Указать вид этого движения и охарактеризовать его.

Примерная тематика лабораторных занятий

Очная форма получения образования, 1 семестр.

Тема 1.1. Понятие вектора. Линейные операции над векторами. **Тема 1.2.** Базисы и координаты векторов (6 час.)

Занятие 1. Работа с векторами (без координат). Построение суммы и разности векторов. Выразить одни векторы через другие.

Занятие 2. Линейные операции над векторами. Базисы. Координаты векторов в базисе.

Занятие 3. Координаты линейной комбинации векторов. Коллинеарность и компланарность.

Тема 1.3. Полилинейные операции над векторами (4 час.)

Занятие 4. Скалярное произведение векторов. Векторное произведение: определение, свойства.

Занятие 5. Векторное произведение векторов в координатах. Смешанное произведение: подсчет в координатах, характер линейной зависимости, ориентация базиса, объем.

Тема 2.1. Системы координат. Фигуры и уравнения (2 час.)

Занятие 6. Системы координат. Фигуры и уравнения. Преобразование координат точек при переходе к другому реперу. Случай ортогональных реперов на плоскости.

Тема 2.2. Прямые на плоскости E^2 (4 час.)

Занятие 7. Прямые на плоскости E^2 : составление уравнений, переход от одного уравнения к другому. Базовые задачи: а) через точку провести прямую, параллельную данной, б) опустить перпендикуляр из точки на прямую, в) нахождение проекции точки на прямую, г) нахождение точки, симметричной данной относительно прямой.

Занятие 8. Угол между прямыми. Комбинированные задачи на тему «Прямые на плоскости». Геометрический смысл линейного неравенства с двумя неизвестными.

Тема 2.3. Плоскости и прямые в пространстве E^3 (4 час.)

Занятие 9. Уравнения прямой и плоскости в пространстве, взаимное расположение прямых и плоскостей.

Занятие 10. Построение параллельных прямых, параллельных плоскостей, построение плоскости перпендикулярно прямой и прямой перпендикулярно плос-

кости, перпендикуляры из точки на плоскость и прямую, проекции и симметричные точки, построение общего перпендикуляра к скрещивающимся прямым.

Тема 3.1. Фигуры второго порядка на плоскости E^2 (6 час.)

Занятие 11. Эллипс и гипербола: определение, каноническое уравнение, полуоси, форма, фокальные радиусы, эксцентриситет, директрисы. Парабола.

Занятие 12. Эллипс, гипербола, парабола: построение уравнений в неканонической декартовой системе координат.

Занятие 13. Приведение уравнения второго порядка с двумя неизвестными к каноническому виду.

Тема 3.2. Фигуры второго порядка в пространстве E^3 (4 час.)

Занятие 14. Фигуры вращения. Цилиндрические фигуры. Конус. Расположение фигур относительно осей координат.

Занятие 15. Эллипсоид, гиперболоиды, параболоиды: канонические и почти канонические уравнения, расположение относительно системы координат.

Очная форма получения образования, 2 семестр.

Тема 4.1. Векторные пространства.

Занятие 1. Определение и примеры векторных пространств. Линейная зависимость и независимость, базисы и координаты.

Занятие 2. Способы задания векторных подпространств.

Тема 5.1. Определение, примеры и простейшие свойства аффинного пространства (1 час). **Тема 5.2.** Координаты в аффинном пространстве (1 час)

Занятие 3. Определение, примеры и простейшие свойства аффинных пространств. Координаты в аффинном пространстве и их преобразование при переходе к другому реперу.

Тема 5.3. Плоскости в аффинном пространстве (4 час.)

Занятия 4-5. Составление уравнений плоскостей. Взаимное расположение плоскостей.

Тема 5.4. Аффинные преобразования (4 час.)

Занятия 6. Координатное выражение и групповые свойства аффинных преобразований. Нахождение образа и прообраза при действии аффинных преобразований. Простое отношение трех точек.

Занятия 7. Инвариантные точки и инвариантные прямые аффинных преобразований аффинной плоскости.

Тема 5.5. Фигуры второго порядка в вещественных аффинных пространствах (4 час.)

Занятия 8. Пересечение квадрики с прямой. Асимптотические направления. Центры квадрик. Диаметральные плоскости квадрики. Диаметры линий второго порядка.

Занятия 9 Нахождение нормальных уравнений квадрики в A^n . Аффинная классификация линий второго порядка на аффинной плоскости.

Тема 6.1. Евклидовы векторные пространства (1 час). **Тема 6.2.** Евклидовы точечные пространства (3 час.)

Занятия 10-11. Процесс ортогонализации. Ортогональное дополнение подпространства. Нахождение: проекции точки на плоскость, расстояния от точки до плоскости, расстояния от точки до гиперплоскости, угол между прямыми, угол между прямой и плоскостью.

Тема 6.3. Движения и евклидова геометрия (2 час.)

Занятие 12. Классификация движений евклидовой плоскости.

Тема 7.1. Кривые в пространстве E^3 (2 час.)

Занятие 13. Касательная прямая в точке кривой. Вычисление длины дуги кривой. Репер Френе. Формулы Френе. Кривизна и кручение кривой.

Тема 7.2. Поверхности в пространстве E^3 (4 час.)

Занятие 14. Внутренние уравнения кривой на поверхности. Касательная плоскость и нормаль в точке поверхности.

Занятие 15. Первая фундаментальная форма поверхности. Вычисление длины дуги кривой и угла между кривыми на поверхности.

Описание инновационных подходов и методов к преподаванию учебной дисциплины

При организации образовательного процесса используются следующие подходы и методы:

- **эвристический**, ориентированный на: - осуществление студентами лично-значимых открытий в процессе подготовки к практическим занятиям по методике преподавания математики; - демонстрацию многообразия решений математических задач, методов, форм, средств и приемов организации учебной деятельности; - творческую самореализацию студентов в процессе создания планов-конспектов уроков и их видеофрагментов; - индивидуализацию обучения через возможность самостоятельно ставить цели, осуществлять рефлексию собственной образовательной деятельности;
- **практико-ориентированный**, предполагающий: - освоение содержание образования через решения практических задач; - приобретение навыков эффективного выполнения разных видов профессиональной деятельности; - использование процедур, способов оценивания, фиксирующих сформированность профессиональных компетенций;
- **метод учебной дискуссии**, предусматривающий участие студентов в целенаправленном обмене мнениями, идеями для предъявления и/или согласования существующих позиций по определенной проблеме.

Методические рекомендации по организации и выполнению самостоятельной работы студентов

В процессе **самостоятельной работы** по дисциплине «Геометрия» студент должен выполнять следующие виды внеаудиторной деятельности:

- изучение и конспектирование материала, вынесенного на лекциях и лабораторных занятиях на самостоятельное изучение по источникам основной и дополнительной литературы;

- подготовка к экзаменам;
- поиск и изучение понятий и фактов из параллельно изучаемых дисциплин «Алгебра и теория чисел», «Математический анализ», необходимых для усвоения дисциплины «Геометрия»;
- выполнение домашних заданий;
- подбор необходимой литературы, поиск необходимой информации в сети Интернет.

Критерием оценки результатов внеаудиторной самостоятельной работы обучающихся по дисциплине «Геометрия», является уровень усвоения учебного материала, который проверяется и оценивается при выполнении контрольных работ и при сдаче экзаменов.

К организационным формам проведения УСР по дисциплине «Геометрия» относится аудиторная деятельность на лабораторных занятиях. Видами отчетности УСР являются контрольные работы.

Контроль УСР по дисциплине «Геометрия» проводится преподавателем, как правило, во время аудиторных занятий и осуществляется в виде:

- экспресс-опроса на аудиторных занятиях;
- контрольной работы;

Учет результатов контроля текущей аттестации студентов ведется преподавателем. Полученные студентом количественные результаты УСР учитываются как составная часть итоговой отметки по дисциплине в рамках рейтинговой системы. Задания студентам по УСР разрабатываются преподавателями, обеспечивающими преподавание дисциплины в соответствии с учебной программой.

Примерный перечень вопросов к экзамену

1 семестр очная форма получения высшего образования

2 семестр заочная форма получения высшего образования

1. Отрезки. Направленные отрезки. Сонаправленные, противоположные отрезки.
2. Эквивалентные направленные отрезки. Свойства эквивалентных направленных отрезков.
3. Определение вектора. Сложение векторов, умножение векторов на числа (определения и их корректность).
4. Свойства операции сложения векторов (абелева группа).
5. Свойства операции умножения векторов на числа.
6. Коллинеарные и неколлинеарные векторы. Базисы плоскости и координаты векторов на плоскости.
7. Компланарные и некопланарные векторы. Базисы пространства и координаты векторов в пространстве.
8. Линейная зависимость и независимость векторов на плоскости и в пространстве: определение, критерии.

9. Координаты вектора в базисе (определение, единственность). Формулы преобразования координат векторов при переходе от одного базиса к другому.
10. Формулы преобразования координат векторов при переходе от ортонормированного базиса к ортонормированному на плоскости.
11. Координаты линейной комбинации векторов. Линейно зависимые и линейно независимы системы векторов.
12. Реперы. Координаты точек на плоскости и в пространстве. Откладывание вектора от точки (вектор, заданный началом и концом). Координаты середины отрезка.
13. Формулы преобразования координат точек при переходе от одного репера к другому. Ортонормированные реперы. Преобразование координат точек при переходе от одного ортонормированного репера к другому на плоскости. Уравнение фигуры. Уравнение фигуры в различных реперах.
14. Проекция (точки на прямую параллельно плоскости, точки на плоскость параллельно прямой). Проекция вектора на вектор (на ось). Ортогональные проекции. Проекция линейной комбинации векторов.
15. Определение и свойства скалярного произведения.
16. Скалярное произведение в координатах. Нахождение длины вектора и угла между векторами через скалярное произведение. Расстояние между точками на плоскости и в пространстве.
17. Ориентация плоскости и пространства. Правые и левые базисы и реперы.
18. Векторное произведение: определение, свойства.
19. Векторное произведение в ортонормированном базисе.
20. Смешанное произведение векторов.
21. Критерии коллинеарности и компланарности векторов.
22. Уравнения прямой в аффинной системе координат на плоскости.
23. Общее уравнение прямой и взаимное расположение прямых на плоскости.
24. Геометрический смысл линейного неравенства с двумя переменными.
25. Угол между прямыми на плоскости.
26. Расстояние от точки до прямой на плоскости.
27. Взаимное расположение прямых на плоскости: исследование с помощью уравнений.
28. Признаки перпендикулярности прямых на плоскости.
29. Нахождение точки на плоскости, симметричной данной относительно заданной прямой.
30. Параметрические и канонические уравнения прямой на плоскости и в пространстве.
31. Задание прямой в пространстве в виде пересечения двух плоскостей.
32. Определение взаимного расположения прямых в пространстве.
33. Параллельные прямые в пространстве и расстояние между ними.
34. Способы вычисления угла между прямыми на плоскости и в пространстве.
35. Уравнения плоскости в пространстве.
36. Общее уравнение плоскости в пространстве.
37. Общее уравнение плоскости и взаимное расположение плоскостей в пространстве.

38. Уравнения плоскости, проходящей через а) три неколлинеарные точки, б) прямую и точку вне её, в) пару пересекающихся прямых, г) пару параллельных прямых.
39. Особенности расположения плоскостей, заданных неполными общими уравнениями.
40. Расстояние от точки до плоскости.
41. Вычисление угла между прямой и плоскостью, между плоскостями.
42. Критерии ортогональности прямой и плоскости.
43. Параметрические уравнения плоскостей в пространстве.
44. Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве: исследование для различных типов уравнений.
45. Параллельные плоскости и расстояние между ними.
46. Скрещивающиеся прямые в пространстве (определение, критерии, расстояние, общий перпендикуляр).
47. Пусть $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$ - прямая. Доказать, что плоскость проходит через заданную прямую тогда и только тогда, когда она может быть задана уравнением $\alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$, где $\alpha, \beta \in R$.
48. Уравнение фигуры. Фигуры второго порядка на плоскости (определение, корректность).
49. Эллипс: определение, каноническое уравнение и форма.
50. Гипербола: определение, каноническое уравнение и форма.
51. Парабола: определение, каноническое уравнение и форма.
52. Свойства эллипса, гиперболы, параболы (фокусы, директрисы и эксцентриситет).
53. Классификация (евклидова) фигур второго порядка на плоскости.
54. Приведение уравнения второго порядка с двумя неизвестными к каноническому виду.
55. Метод сечений: исследование эллипсоида.
56. Фигуры второго порядка в пространстве. Метод сечений. Эллиптический параболоид: исследование формы.
57. Метод сечений. Гиперболический параболоид: исследование формы.
58. Метод сечений. Двуполостный гиперболоид: исследование формы.
59. Метод сечений. Однополостный гиперболоид: исследование формы.
60. Цилиндрические и конические фигуры.
61. Поверхности вращения.

Примерный перечень вопросов к экзамену

2 семестр очная форма получения высшего образования

4 семестр заочная форма получения высшего образования

1. Определение векторного пространства. Примеры. Линейная зависимость и независимость векторов. Базисы. Координаты векторов.

2. Определение аффинного пространства. Примеры.
3. Аффинные реперы и координаты точек.
4. Преобразование координат точек при замене репера в аффинном пространстве.
5. Понятие плоскости в аффинном пространстве.
6. Способы задания плоскостей в аффинном пространстве.
7. Аффинная оболочка множества точек: определение, существование и единственность, технология построения.
8. Критерии пересечения пары плоскостей в A^n .
9. Инвариантность характеристики пары плоскостей. Взаимное расположение плоскостей.
10. Координатное выражение отображений из A^n в A^n . Аффинные преобразования.
11. Уравнения образа и прообраза фигуры при аффинном преобразовании в A^n .
12. Группа автоморфизмов (аффинных преобразований) аффинного пространства. Способы задания аффинных преобразований.
13. Линейная часть аффинного отображения, его координатное выражение и свойства.
14. Способы задания аффинных преобразований.
15. Аффинная эквивалентность фигур в A^n .
16. Свойство инвариантности аффинной оболочки фигуры.
17. Критерий эквивалентности пар плоскостей.
18. Аффинная эквивалентность троек точек в A^n . Простое отношение трех точек. Отрезок. Середина отрезка. Центр фигуры.
19. Свойства аффинных преобразований в A^n (репер отображается в репер, прямая в прямую, плоскость в плоскость).
20. Простое отношение трех точек. Отрезок. Середина отрезка
21. Асимптотические и неасимптотические направления относительно квадрики. Центры и диаметральные плоскости квадрики в A^n .
22. Нормальные уравнения фигур второго порядка.
23. Скалярное произведение в вещественном векторном пространстве, способы задания. Длина вектора и угол между векторами в евклидовом векторном пространстве.
24. Процесс ортогонализации. Ортогональные подпространства и дополнения.
25. Движения в \vec{E}^n : определение, координатное выражение в ортонормированном репере.
26. Евклидовы точечные пространства. Расстояние между точками. Движения евклидова точечного пространства.
27. Гомотетия, поворот, параллельный перенос как аффинные преобразования (для \vec{E}^n).
28. Подобие в \vec{E}^n как аффинное преобразование.
29. Расстояние от точки до гиперплоскости и угол между прямыми, между прямой и гиперплоскостью в евклидовом точечном пространстве.

30. Собственные движения евклидовой плоскости
31. Несобственные движения евклидовой плоскости.
32. Кривые в \vec{E}^n . Касательная прямая и соприкасающаяся плоскость кривой в точке. Длина дуги кривой. Кривизна и кручение кривой.
33. Поверхности в \vec{E}^n . Внутренние координаты и внутренние уравнения фигур на поверхности. Касательная плоскость и нормаль к поверхности в точке.
34. Поверхности в \vec{E}^n . Длина дуги кривой на поверхности.
35. Поверхности в \vec{E}^n . Угол между кривыми на поверхности.

ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УВО

Название учебной дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы учреждения высшего образования по учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола)*
Алгебра и теория чисел	Высшей алгебры и защиты информации	нет	Вносить изменения не требуется (протокол № 12 от 23.05.2023)
Математический анализ	Теории функций	нет	Вносить изменения не требуется (протокол № 12 от 23.05.2023)