БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Объект авторского права
УДК 517.58

ПАВЛОВСКИЙ
Владислав Андреевич

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ И АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА h-ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 01.01.01 — вещественный,
комплексный и функциональный анализ

Минск, 2023

Научная работа выполнена в **Белорусском государственном университете**.

НАУЧНЫЙ РУКОВОДИТЕЛЬ –

Васильев Игорь Леонидович,
кандидат физико-математических наук, доцент,
доцент кафедры теории функций
Белорусского государственного университета.

ОФИЦИАЛЬНЫЕ ОППОНЕНТЫ:

Антоневич Анатолий Борисович,
доктор физико-математических наук, профессор,
профессор кафедры функционального анализа
и аналитической экономики
Белорусского государственного университета;

Смотрицкий Константин Анатольевич,
кандидат физико-математических наук, доцент,
доцент кафедры фундаментальной
и прикладной математики
УО «Гродненский государственный университет
имени Я. Купалы».

ОППОНИРУЮЩАЯ ОРГАНИЗАЦИЯ –

**ГНУ «Институт математики
НАН Беларуси»**.

Защита состоится **«27» октября 2023 г.** в ***10.00*** часов на заседании совета по защите диссертаций Д 02.01.07 при Белорусском государственном университете по адресу: *г. Минск, ул. Ленинградская, 8 (корпус юридического факультета), ауд. 407.* Телефон ученого секретаря (017) 209-57-09, e-mail: Mardvilko@bsu.by.

Почтовый адрес: пр-т Независимости 4, Минск, 220030.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке Белорусского государственного университета.

Автореферат разослан «26» сентября 2023 года.

Ученый секретарь
совета по защите диссертаций
кандидат физ.-мат. наук доцент Т.С. Мардвилко

ВВЕДЕНИЕ

Теория функций h-комплексного переменного в математической литературе отражена недостаточно полно. h-Комплексные числа имеют и другие названия: гиперболические числа, двойные числа, паракомплексные числа, расщепляемые комплексные числа, комплексные числа гиперболического типа, контркомплексные числа. Нами выбрана терминология h-комплексные функции и числа, поскольку она отражает связь с гиперболическими система дифференциальных уравнений.

Исследование чисел вида $a + bj$, где элемент j наделен различными свойствами, находит свое отражение в работах отечественных и зарубежных авторов. Это обусловлено интересом к построению новых математических структур, усовершенствованию подходов к вычислительным операциям, получению нестандартных и эффективных методов решения прикладных задач. Основоположниками такого направления был У. Клиффорд, который в 1873 году ввел понятие двойного (h-комплексного) числа. Исследованиями в данной области занимался советский математик-геометр И. М. Яглом. На рубеже XX и XXI столетий возобновился интерес к данной теме. Стоит отметить следующих авторов, работавших над приложениями h-комплексных чисел: Ф. Антонуччио, А. Хренников, В. В. Кисил, С. Декельман, М. Либайн, С. Брюер, Д. Э. Эмануелло, Г. Собчик, Д. Г. Павлов и Г. И. Гарасько. Основное внимание в их исследованиях уделено алгебраическим свойствам кольца h-комплексных чисел и примерам конкретных функций, связанным с задачами геометрии и теории дифференциальных уравнений.

В настоящее время интерес к изучению свойств h-комплексных функций связан с их применением при решении задач геометрии, физики и механики. Функции h-комплексного переменного геометрически могут интерпретироваться с помощью векторов на псевдоевклидовой плоскости, поэтому оказываются удобным математическим аппаратом для решения задач плоской теории относительности. Кроме того, многие классические задачи физики и механики могут быть сведены к дифференциальным уравнениям, разрешимым с помощью h-комплексных функций. Однако, до сих пор общая теория h-голоморфных функций недостаточно развита. Имеющиеся работы посвящены отдельным конкретным вопросам и носят фрагментарный характер. Вопрос изучения общих свойств h-голоморфных функций и построение элементов соответствующей теории остаётся актуальным.

Предлагаемая диссертация посвящена поиску недостающих элементов теории h-комплексных функций и её упорядоченному изложению. Отличие теории функций h-комплексного переменного от классического комплексного анализа обусловлено наличием делителей нуля в кольце h-комплексных чисел, в силу этого h-комплексные функции не имеют конечных изолированных особых точек. Таким образом, для таких функций нет прямого аналога интегральной формулы Коши, теории вычетов и теорем из них вытекающих. Для функций h-комплексного переменного понятия дифференцируемости, голоморфности, аналитичности не эквивалентны. Такие важные для комплексного анализа утверждения, как теоремы Лиувилля, Сохоцкого, Римана, Руше, основная теорема алгебры оказываются неверны. В наших исследованиях роль интегральной формулы Коши выполняют теорема о конечных приращениях для h-голоморфных функций, теорема о локальной обратимости, а также общее представление h-голоморфных функций. На их основе выводятся утверждения о геометрических свойствах h-голоморфных функций, изучаются свойства соответствующих отображений, h-аналитических и h-целых функций.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Связь работы с научными программами и темами

Тема диссертации соответствует приоритетному направлению фундаментальных и прикладных научных исследований Республики Беларусь (ГПНИ «Конвергенция-2025», подпрограмма «Математические модели и методы»). Работа над диссертацией проводилась на кафедре теории функций БГУ в рамках государственной программы научных исследований 2021–2025 гг., задание 1.3.2.1 «Теория функций, гармонический анализ и их приложения к задачам естествознания и экономики», номер гос. регистрации №20211888, финансовый номер 641/25.

Цель, задачи, объект и предмет исследования

Цель диссертационной работы — построить элементы теории h-комплексных функций.

Основные задачи:

1) описать общие свойства h-голоморфных функций;

2) построить элементы геометрической теории h-голоморфных функций и сравнить полученные результаты с соответствующими утверждениями классического комплексного анализа;

3) дать описание свойствам равномерно сходящихся последовательностей и рядов h-комплексных функции;

4) установить свойства h-целых функций. Дать оценки роста h-целых функций на бесконечности.

Объектом исследования являлись функции и отображения в кольце h-комплексных чисел. Предметом исследования являлись свойства дифференцируемости, интегрируемости, голоморфности и аналитичности h-комплексных функций.

Научная новизна

Полученные в диссертации результаты являются новыми. Новизна и основное содержание этих результатов заключаются в следующем.

1. Найден общий вид h-голоморфных функций, доказаны теоремы о конечных приращениях и локальной обратимости h-голоморфных функций.

2. Сформулированы и доказаны: принципы сохранения области, максимума нормы и соответствия границ для h-голоморфных функций; теоремы о глобальном h-диффеоморфизме и образе произвольной области при h-голоморфном отображении. Показаны различия между полученными результатами и утверждениями из классической теории аналитических функций.

3. Доказаны теоремы об аппроксимации h-комплексных функций многочленами, h-голоморфности и h-аналитичности предела функциональной последовательности и суммы функционального ряда. Сформулирован и доказан принцип компактности для h-голоморфных функций.

4. Даны оценки роста h-целых функций, порядка и типа h-аналитических функций.

Положения, выносимые на защиту

1. Теоремы об общем виде, конечных приращениях и локальной обратимости h-голоморфных функций.

2. Теоремы о глобальном h-диффеоморфизме и образе произвольной области при h-голоморфном отображении.

3. Теоремы об аппроксимации h-комплексных функций многочленами, принцип компактности для h-голоморфных функций и аналог теоремы Витали для h-аналитических функций.

4. Теоремы об оценках роста h-целых функций, порядке и типе

h-аналитических функций.

Личный вклад соискателя ученой степени

Основные результаты диссертации получены автором лично. Первоначальная постановка задач осуществлялась доктором физико-математических наук профессором Зверовичем Э.И. Дальнейшие исследования и анализ полученных результатов производились под руководством кандидата физико-математических наук доцента Васильева И.Л.

Апробация диссертации и информация об использовании ее результатов

Результаты, вошедшие в диссертационную работу, докладывались и обсуждались на следующих научных семинарах и конференциях: Объединенном семинаре кафедр теории функций и функционального анализа и аналитической экономики БГУ; XXVIII Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых «Ломоносов 2021» (Москва, 12-23 апреля 2021 г.); 78-й научной конференции студентов и аспирантов БГУ (Минск, 10-21 мая 2021 г.); Международной математической конференции «Седьмые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям» (Минск, 1-4 июня 2021 г.); IX Международной научно-практической конференции «Наука и образование в современном мире : вызовы XXI века» (Нур-Султан, Республика Казахстан, 15 сентября 2021 г.); 10-м Международном семинаре (Воркшоп) «Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений (АМАДЕ 2021)» (Минск, 13-17 сентября 2021 г.); Международной научной конференции «XIII Белорусская математическая конференция БМК-2021» (Минск, 22-25 ноября 2021 г.); 79-й научной конференции студентов и аспирантов БГУ (Минск, 10-21 мая 2022 г.).

Опубликованность результатов диссертации

Основные результаты диссертации опубликованы в 14 научных работах, из которых 8 статей в научных изданиях, включенных в Перечень изданий, и в иностранных научных изданиях (общим объемом 3 авторских листа), 4 статьи в сборниках материалов научных конференций, 2 тезисов.

Структура и объем диссертации

Диссертационная работа состоит из перечня сокращений и обозначений, введения, общей характеристики работы, четырех глав, заключения, списка использованных источников.

Полный объем диссертации составляет 104 страницы, в том числе 17 рисунков занимают 6 страниц. Список использованных источников содержит 95 наименований, включая собственные публикации соискателя ученой степени (на 9 страницах).

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Глава 1 содержит аналитический обзор результатов, посвященных исследованиям свойств h-комплексных чисел и функций. Кратко приводится история развития теории h-комплексных функций с учетом её прикладного значения. Делается акцент на том, что свойства множества h-комплексных чисел не эквивалентны свойствам множества обычных комплексных чисел.

Приведём некоторые, необходимые в дальнейшем, понятия.

Пусть $\mathbb{C}_h$ — множество h-комплексных (двойных) чисел, то есть множество упорядоченных пар вещественных чисел, на котором $\forall\, z_1 = (a; b)$, $z_2 = (c; d) \in \mathbb{C}_h$ заданы следующие операции сложения и умножения:

1) $z_1 + z_2 = (a + c; b + d)$;

2) $z_1 \cdot z_2 = (ac + bd; ad + bc)$.

Вещественную единицу отождествим с h-комплексным числом $(1; 0)$. Гиперболической единицей назовем h-комплексное число $j = (0; 1)$. В кольце $\mathbb{C}_h$ имеются делители нуля, каковыми являются числа вида $a \pm aj$. При $a = \frac{1}{2}$ делители нуля обладают следующими свойствами [1]:

- $\forall\, n \in \mathbb{N} : \left(\frac{1\pm j}{2}\right)^n = \frac{1\pm j}{2}$;
- числа $\frac{1\pm j}{2}$ образуют базис в $\mathbb{C}_h$, то есть

$$z = a + jb = (a + b)\,\frac{1 + j}{2} + (a - b)\,\frac{1 - j}{2} \qquad \forall z \in \mathbb{C}_h.$$

Модулем h-комплексного числа назовем, как обычно, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, а норму определим следующим образом: $\|z\| = |a| + |b|$. На множестве $\mathbb{C}_h$ топология вводится с помощью вышеуказанной нормы.

Функции, заданные на множестве $\mathbb{C}_h$, в отличие от классических комплекснозначных функций, являются решениями систем уравнений не эллиптического, а гиперболического типа. Следствием этого является значительное отличие свойств h-комплекснозначных функций.

В **главе 2** диссертации формулируются и доказываются теоремы, связанные со свойством h-голоморфности.

Рассмотрим функцию h-комплексного переменного

$$w = f(z) = u(x,y) + jv(x,y) \quad (z = x + jy),$$

где $u(x,y)$, $v(x,y)$ — действительные функции двух переменных. Таким образом исследование свойств h-комплексных функций сводится к исследованию функций двух переменных методами вещественного анализа.

Пусть D — область в $\mathbb{C}_h$, а $f : D \to \mathbb{C}_h$.

Определение 1. *Функция f называется h-дифференцируемой в точке $z \in D$, если существует такое число $k \in \mathbb{C}_h$, что*

$$f(z+h) - f(z) = kh + \alpha(h) \cdot h,$$

где $h \in D$ не является делителем нуля, причем $z+h \in D$, а $\lim\limits_{h\to 0} \alpha(h) = 0$, k не зависит от h.

Теорема 1 [4]. *Пусть $f(z) = u(x,y) + jv(x,y)$ определена в окрестности точки $z = x + jy$, функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ дифференцируемы в точке (x,y). Тогда следующие два утверждения эквивалентны:*

1. *функция $f(z)$ h-дифференцируема в точке z;*
2. *в точке (x,y) верны равенства*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}. \tag{1}$$

Понятия дифференцируемости и голоморфности не эквивалентны для h-комплексных функций.

Определение 2. *Функция $f(z) = u(x,y) + jv(x,y)$ называется h-голоморфной в точке $z \in D$, если в некоторой окрестности этой точки функции u и v имеют непрерывные вторые частные производные и выполнены условия* (1).

Сформулируем теорему об общем виде h-голоморфной функции. Пусть $f(z) = u + jv : D \to \mathbb{C}_h$, функции u и v дважды непрерывно дифференцируемы в D.

Теорема 2 [4]. *Пусть функция* $f : D \to \mathbb{C}_h$ *дважды непрерывно дифференцируема, тогда следующие утверждения эквивалентны:*

- *функция* f *h-голоморфна в* D,
- *функция* f *представима в виде:*

$$f(z) = \frac{1+j}{2} f(x+y) + \frac{1-j}{2} f(x-y). \tag{2}$$

Множество функций, h-голоморфных на множестве $D \subset \mathbb{C}_h$ обозначим через $\mathcal{H}_h(D)$. Далее говоря о h-голоморфности функции будем понимать, что справедливо представление (2).

Теорема 3 (О конечных приращениях для *h*-голоморфной функции)[4]. *Пусть функция* f *h-голоморфна в области* $D \subset \mathbb{C}_h$. *Тогда*

$$\|f(z+h) - f(z)\| \leq 2 \max_{\zeta \in (z,\, z+h)} \|f'(\zeta)\| \ \|h\|. \tag{3}$$

Пусть $f(z) = u(x,y) + jv(x,y) \in \mathcal{H}_h(D)$. Тогда всюду в D $u'_x = v'_y$, $u'_y = v'_x$, $f'(z) = u'_x + v'_x$. В отличие от классических голоморфных функций условие $f'(z) \neq 0$ не является достаточным для локальной обратимости h-голоморфных функций. Например, для функции $f(z) = (1+j) \cdot z$ производная $f'(z) = 1 + j \neq 0$ всюду в $\mathbb{C}_h$, однако эта функция ни в одной точке локально не обратима. Покажем, что при более сильных ограничениях локальная обратимость h-голоморфных функций имеет место.

Теорема 4 [6]. *Пусть функция* $w = f(z) = u(x,y) + jv(x,y)$ *h-голоморфна в области* $D \subset \mathbb{C}_h$, $z_0 = a + jb \in D$. *Если* $|u'_x(a,b)| \neq |u'_y(a,b)|$, *то существует открытая окрестность* U *точки* z_0 *и открытая окрестность* V *точки* $w_0 = f(z_0)$, *такие, что функция* $f : U \to V$ *имеет обратную* $f^{-1} : V \to U$, *которая непрерывно дифференцируема в* V *и*

$$\left\{f^{-1}\right\}'(w) = \left\{f'(z)\right\}^{-1}. \tag{4}$$

Если $|u'_x(x,y)| \equiv |u'_y(x,y)|$ *в некоторой окрестности точки* z_0, *то* f *не обратима в этой окрестности.*

Теорема 5 (Аналог интегральной теоремы Коши) [10]. *Пусть* $D \subset \mathbb{C}_h$ — *область, ограниченная кусочно-гладкой замкнутой кривой* ∂D. *Если* f *h-голоморфна в* ∂D *и непрерывна в замыкании* $D \cup \partial D$, *то*

$$\int\limits_{\partial D} f(z)\, dz = 0.$$

Теорема 6 (Теорема о глобальной первообразной) [10]. *Пусть f h-голоморфна в односвязной области $D \subset \mathbb{C}_h$. Тогда f имеет в D глобальную первообразную, которую можно взять в виде $F(z) = \int\limits_a^z f(t)\,dt$, где интегрирование ведется по любой кусочно-гладкой кривой с концами a, z, целиком лежащей в D.*

Перейдём к рассмотрению свойств отображений с помощью h-голоморфных функций.

Определение 3. *Множество $\mathcal{D}(f) \subset \mathbb{C}_h$ называется естественным множеством h-голоморфности функции f, если $f \in \mathcal{H}_h(\mathcal{D}(f))$ и $\forall \mathcal{D}' \supset \mathcal{D}(f)$ таких, что $f \in \mathcal{H}_h(\mathcal{D}')$ выполняется $\mathcal{D}' = \mathcal{D}(f)$.*

Определение 4. *Элементарным множеством в $\mathbb{C}_h$ назовём любой прямоугольник со сторонами, параллельными прямым $y = x$ и $y = -x$ соответственно. Элементарной областью назовем внутренность элементарного множества.*

Теорема 7 [5]. *Пусть $f \in \mathcal{H}_h(D)$, где $D \subset \mathcal{D}(f)$ — элементарная область, $|u'_x(x,y)| \neq \left|u'_y(x,y)\right|$ в области D. Тогда $E = f(D)$ — элементарная область.*

Определение 5. *Стандартным назовем компактное множество со связной внутренностью, ограниченное замкнутой ломаной, образованной конечным числом отрезков, параллельных прямым $y = x$ или $y = -x$. Стандартной областью назовем внутренность стандартного множества.*

Теорема 8 [5]. *Пусть $f \in \mathcal{H}_h(D)$, где $D \subset \mathcal{D}(f)$ — стандартная область, $|u'_x(x,y)| \neq \left|u'_y(x,y)\right|$ в области D. Тогда $E = f(D)$ — стандартная область.*

Определение 6. *Последовательность множеств D_k называется исчерпанием множества D, если*

1. $D_1 \subset D_2 \subset \ldots \subset D_k \subset D_{k+1} \subset \ldots$,
2. $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} D_k = D$.

Теорема 9 [5]. *Пусть $D \subset \mathrm{C}_h$ — область, ограниченная кусочно-гладкой замкнутой кривой ∂D, $\{D_k\}_{k=1}^{\infty}$ — её исчерпание стандартными областями, $f \in \mathcal{H}_h(D_k)$ $\forall k$. Тогда*

1. $f\left(D_k\right) \subset f\left(D_m\right)$ *при* $k < m$,
2. $f\left(D\right) = f\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} D_k\right) = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} f(D_k)$,
3. $f \in \mathcal{H}_h\left(D\right)$,
4. *Если для всех* $k = 1, 2, \ldots$ $E_k = f(D_k)$ *— область, то* $E = f\left(D\right)$ *— область и* $\left\{E_k\right\}_{k=1}^{\infty}$ *— её исчерпание стандартными областями.*

Сформулируем теперь теоремы о геометрических свойствах h-голоморфных функций и сравним полученные результаты с соответствующими утверждениями классического комплексного анализа.

Для h-голоморфных функций обычный принцип сохранения области не имеет места. Например, образом открытого h-круга $D = \left\{\|z\| < 1\right\}$ при отображении $f\left(z\right) = \left(1 + j\right) \cdot u\left(x + y\right)$ будет интервал $\gamma = \left\{w = \left(1 + j\right) \cdot u\left(x + y\right) \mid -1 < x + y < 1\right\}$, который не является областью в $\mathbb{C}_h$. Для h-голоморфных функций верна следующие теоремы.

Теорема 10 [6]. *Пусть функция* $w = f\left(z\right) = u\left(x, y\right) + jv\left(x, y\right)$ *h-голоморфна в области* $D \subset \mathbb{C}_h$, u'_x, u'_y *непрерывны в области* D. *Если* $\left|u'_x\left(x, y\right)\right| \neq \left|u'_y\left(x, y\right)\right|$ *всюду в* D, *то множество* $E = f\left(D\right)$ *является областью. Если* $\left|u'_x\left(x, y\right)\right| \equiv \left|u'_y\left(x, y\right)\right|$ *всюду в* D, *то* $f\left(D\right)$ *— открытый интервал вида*

$$\gamma = \left\{w = \left(1 \pm j\right) \cdot u\left(\frac{x \pm y}{2}\right) + jC \mid C \in \mathbb{R};\ (x; y) \in D\right\}.$$

Теорема 11 (О глобальном h-диффеоморфизме) [11]. *Пусть функция* $w = f\left(z\right) = u\left(x, y\right) + jv\left(x, y\right)$ *h-голоморфна в области* $D \subset \mathbb{C}_h$ *и* $|u'_x(x, y)| \neq |u'_y(x, y)|$ *для любых* (x, y) *таких, что* $z = x + jy \in D$. *Тогда* f *h-диффеоморфно отображает область* D *на область* $E = f\left(D\right)$. *При этом для производной обратной функции* $f^{-1} : E \to D$ *верна формула*

$$\left(f^{-1}(w)\right)' = \frac{1}{f'(z)}.$$

Принцип максимума нормы для h-голоморфных функций формулируется следующим образом.

Теорема 12 [6]. *Пусть функция* $w = f\left(z\right) = u\left(x, y\right) + jv\left(x, y\right)$ *h-голоморфна в области* $D \subset \mathbb{C}_h$. *Если* $\left|u'_x\left(x, y\right)\right| \neq \left|u'_y\left(x, y\right)\right|$ *всюду в* D, *то функция* $\|f\left(z\right)\|$ *не может достигать локального максимума во внутренней точке области* D.

Следствие 1. *Если в условиях теоремы* 12 $f \in C\left(\bar{D}\right)$, то функция $\|f(z)\|$ достигает максимума на границе ∂D.

Следствие 2. *Если в условиях теоремы* 12 $f(z) \neq 0$ для любой точки $z \in D$, то $\|f(z)\|$ не может достигать локального минимума внутри D.

Для h-голоморфных функций классический принцип соответствия границ не имеет места. Из-за наличия в кольце $\mathbb{C}_h$ делителей нуля h-голоморфная в области функция может вообще никак не продолжаться на границу области. При выполнении более сильных условий h-голоморфную функцию можно продолжить до h-диффеоморфизма замкнутых областей.

Определение 7. *Пусть* Γ *— кусочно-гладкая кривая в* $\mathbb{C}_h$, $t = \sigma + j\omega$. *Функция* $f : \Gamma \to \mathbb{C}_h$ *называется h-голоморфной в точке* $t \in \Gamma$, *если*

$$f(t + \Delta t) - f(t) = f'(t)\Delta t + \alpha(\Delta t)\Delta t,$$

где $t + \Delta t \in \Gamma,\ f'(t) = \frac{1+j}{2}\varphi'(\sigma+\omega) + \frac{1-j}{2}\psi'(\sigma-\omega),\ \lim\limits_{\Delta t \to 0} \alpha(\Delta t) = 0,$ *а* φ, ψ *— некоторые дважды непрерывно дифференцируемые функции. Функция* f *h-голоморфна на* Γ, *если* f *h-голоморфна в любой точке* $t \in \Gamma$.

Теорема 13 (Усиленный принцип соответствия границ) [11]. *Пусть* $D \subset \mathbb{C}_h$ *— область, ограниченная замкнутой кусочно-гладкой кривой* ∂D, $f \in \mathcal{H}_h(D)$, $E = f(D)$, $f'(z)$ *не обращается в делитель нуля на* D. *Если для любого* $t \in D$ *существует* $\lim\limits_{D \ni z \to t} f'(z)$, *отличный от делителя нуля, то* $f : D \to E$ *можно продолжить до h-диффеоморфизма замкнутых областей.*

В **главе 3** сформулирована и доказана теорема единственности для h-аналитических функций, доказаны теоремы о равномерном приближении h-голоморфных функций многочленами; рассмотрены свойства равномерно сходящихся последовательностей h-голоморфных функций.

Сформулируем теоремы о приближении h-комплексных функций многочленами.

Теорема 14 [8]. *Пусть* $f : [a, b] \to \mathbb{C}_h$ *непрерывна на отрезке* $[a, b] \in \mathbb{R}$. *Тогда существует последовательность многочленов* $P_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$ *с коэффициентами из* $\mathbb{C}_h$, *равномерно сходящаяся на* $[a, b]$ *к функции* $f(x)$.

Определение 8. *Функциональная последовательность* $f_n(z)$, $n \in \mathbb{N}$ *сходится равномерно к функции* $f(z)$ *на множестве* $D \subset \mathbb{C}_h$, *если*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n(\varepsilon) \quad \forall n \geq n(\varepsilon) \quad \forall z \in D \ : \ \|f_n(z) - f(z)\| \leq \varepsilon.$$

Определение 9. *Функциональная последовательность* $f_n(z)$, $n \in \mathbb{N}$ *сходится равномерно внутри области* $D \subset \mathbb{C}_h$, *если она сходится равномерно на любых компактных подмножествах* $K \subset D$.

Теорема 15 [8]. *Пусть* $f \in \mathcal{H}_h(B)$, *где* $B = \{\|z - z_0\| < r\} \subset \mathbb{C}_h$ *— некоторый открытый h-круг с центром в точке* z_0. *Тогда существует последовательность многочленов* $P_n(z)$, $n \in \mathbb{N}$, *равномерно сходящихся к функции* $f(z)$ *внутри* B.

Теорема 16 [8]. *Пусть последовательность h-голоморфных в области* $D \subset \mathbb{C}_h$ *функций* $f_n(z)$, $n \in \mathbb{N}$ *сходится равномерно внутри* D *к функции* $f(z)$. *Тогда* $f(z)$ *h-голоморфна в* D.

Теорема 17 [8]. *Пусть* $B = \{\|z - z_0\| < r\}$ *— h-круг с центром в точке* $z_0 = \frac{a+b}{2}$ *радиуса* $r = \frac{b-a}{2}$, *где* $0 < a < b < +\infty$, *функции* $f_n(z)$, $n \in \mathbb{N}$ *h-голоморфны в* B. *Если последовательность* $f_n(t)$ *сходится равномерно на* $[a, b] \subset \mathbb{R}$ *к дважды непрерывно дифференцируемой функции* $f(t)$, *то последовательность* $f_n(z)$ *сходится равномерно внутри* B *к h-голоморфной функции* (2).

Однако, теоремы 16 и 17 не содержат информации о производной предельной функции последовательности h-голоморфных функций. Покажем, что при дополнительных условиях верна более общая теорема.

Теорема 18 [8]. *Пусть* $D \subset \mathbb{C}_h$ *— односвязная область, ограниченная кусочно-гладкой замкнутой кривой,* $f_n, f_n' \in \mathcal{H}_h(D)$, $\forall n \in \mathbb{N}$; *последовательность производных* $f_n'(z)$ *сходится равномерно внутри* D *к h-голоморфной функции* $g(z)$; *числовая последовательность* $f_n(z_0)$ *сходится в некоторой точке* $z_0 \in D$. *Тогда последовательность* $f_n(z)$ *сходится равномерно внутри* D *к некоторой функции* $f \in \mathcal{H}_h(D)$ *и* $f'(z) = g(z)$ $\forall z \in D$.

Определение 10. *Функциональная последовательность* $f_n : D \subset \mathbb{C}_h \to \mathbb{C}_h$, $n \in \mathbb{N}$ *называется компактной в* D, *если любая её подпоследовательность содержит подпоследовательность, сходящуюся равномерно внутри области* D.

Для h-голоморфных функций классический принцип компактности неверен. При более сильных ограничениях верна следующая теорема.

Теорема 19 (Принцип компактности) [8]. *Пусть* $D \subset \mathbb{C}_h$ *— односвязная область, ограниченная кусочно-гладкой замкнутой кривой* ∂D,

$f_n \in \mathcal{H}_h(D)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ *и для любого компакта* $K \subset D$ *существует такое число* $M(K)$, *что*

$$\|f_n(z)\| \leq M(K), \; \|f_n'(z)\| \leq M(K) \quad \forall n \in \mathbb{N}, \; \forall z \in K.$$

Тогда функциональная последовательность $f_n(z)$ *компактна внутри* D.

Определение 11. *Функция* f *называется* h*-аналитической в точке* $z_0 \in D$, *если существует некоторая окрестность этой точки, в которой* f *разлагается в сходящийся степенной ряд*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k, \quad c_k \in \mathbb{C}_h.$$

Теорема 20 (Теорема единственности) [4]. *Пусть* f_1 *и* f_2 h*-аналитичны в области* $D \subset \mathbb{C}_h$, $f_1(z_k) \equiv f_2(z_k)$, *где* $z_k \in D$, $\lim\limits_{k\to\infty} z_k = z_0 \in D, (1 \pm j) \cdot (z_k - z_0) \neq 0$ $k = 1, 2, ...$ *Тогда* $f_1(z) \equiv f_2(z)$ *всюду в* D.

Пусть $f_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k^n (z - z_0)^k, n \in \mathbb{N}$ — последовательность функций, h-аналитических в h-круге $B = \{\|z - z_0\| < r\}$.

Определение 12. *Функция* $f^M(z)$ *называется* h*-аналитической мажорантой для последовательности* $f_n(z)$ *в* B, *если она представима в виде суммы степенного ряда* $f^M(z) = \sum_{k=0}^{\infty} M_k (z - z_0)^k$, *сходящегося в* B *и такого, что* $\|d_k^n\| \leq M_n$ $\forall k, n \in \mathbb{N}$.

Теорема 21 [8]. *Пусть* $f_n(z) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k^n (z - z_0)^k$ — *последовательность функций,* h*-аналитических в* h*-круге* $B = \{\|z - z_0\| < r\}$, *имеющая в* B h*-аналитическую мажоранту. Если для любого* $k \in \mathbb{N}$ *существует* $d_k = \lim\limits_{n\to\infty} d_k^n$, *то последовательность* $f_n(z)$ *сходится равномерно внутри* B *к* h*-аналитической функции* $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k (z - z_0)^k$.

Определение 13. *Последовательность* $f_n(z)$ *функций,* h*-аналитических в области* $D \subset \mathbb{C}_h$, *называется компактной в себе в этой области, если любая её подпоследовательность содержит подпоследовательность, равномерно сходящуюся внутри* D *к* h*-аналитической функции.*

Теорема 22 [8]. *Пусть последовательность функций* $f_n(z)$, h*-аналитических в области* $D \subset \mathbb{C}_h$, *компактна в себе в этой области* *и сходится на некоторой последовательности* $z_k \in D$, $k \in \mathbb{N}$, *такой, что существует* $\lim\limits_{k\to\infty} z_k = z \in D$ *и для любого* $k \in \mathbb{N}$ *разность* $(z_k - z)$ *не является делителем нуля. Тогда последовательность* $f_n(z)$ *сходится равномерно внутри* D *к* h*-аналитической функции.*

В **главе 4** рассматриваются свойства h-целых функций и многочленов h-комплексного переменного. В ней исследовано поведение h-целых функций в окрестности особой точки.

Определение 14. *Функция* $f(z) = u(x,y) + jv(x,y)$ *называется* h*-целой, если* $u(x,y)$ *и* $v(x,y)$ *бесконечно дифференцируемы в* $\mathbb{R}^2$ *и верны равенства* (1).

Очевидно, сумма и произведение конечного числа h-целых функций снова будет h-целой функцией. Из равенств (1) вытекает, что для h-целой функции $f(z)$ во всех точках $z \in \mathbb{C}_h$ верно представление (2). Таким образом, все производные h-целой функции также являются h-целыми функциями и

$$f^{(k)}(z) = \frac{1+j}{2} f^{(k)}(x+y) + \frac{1-j}{2} f^{(k)}(x-y), \qquad k = 0, 1, 2, \dots \tag{5}$$

Точка $z = \infty$ является единственной изолированной особой точкой h-целой функции. Из (2) легко выводится следующая теорема.

Теорема 23 [7]. *Пусть функция* $f(z)$ h*-целая. Если существует* $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = d \in \mathbb{C}_h$, *то* $f(z) \equiv d$ *в* $\mathbb{C}_h$.

Из формулы (2) также следует, что если бесконечно дифференцируемая функция $f(x)$ ограничена на вещественной оси, то h-целая функция $f(z)$, определяемая равенством (2), ограничена всюду в $\mathbb{C}_h$. Например, $\forall z \in \mathbb{C}_h$ $\|\sin z\| \le 1$, $\left\|e^{-z^2}\right\| \le 1$. Таким образом, теорема Лиувилля для h-целых функций не верна.

Классическая теорема Вейерштрасса непосредственно на h-целые функции не переносится. Налагая на последовательность нулей дополнительные условия, получим следующий аналог этой теоремы.

Теорема 24 [7]. *Пусть* $c_k \in \mathbb{C}_h$ *— последовательность такая, что*

1. $0 < \|c_1\| \le \dots \le \|c_k\| \le \|c_{k+1}\| \le \dots$,
2. c_k *не является делителем нуля* $\forall k$,
3. $\lim\limits_{k\to\infty} c_k = \infty, \lim\limits_{k\to\infty} \frac{1}{c_k} = 0$.

Тогда существует h-целая функция

$$f(z) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{c_k}\right) e^{\frac{z}{c_k} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{c_k}\right)^2 + \dots + \frac{1}{k}\left(\frac{z}{c_k}\right)^k},$$

имеющая нули в точках c_k.

Определение 15. *Порядком h-целой функции $f(z)$ назовём число*

$$\rho = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln\ln M_f(r)}{\ln r} .$$

Типом h-целой функции $f(z)$ порядка ρ назовём число

$$\sigma = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln M_f(r)}{r^\rho} .$$

Дальнейшие рассуждения о об оценках роста будут основываться на представлении h-целых функций в виде канонического произведения.

Определение 16. *Первичным множителем назовём функцию*

$$G(u;p) = (1-u)\, e^{u + \frac{1}{2}u^2 + \ldots + \frac{1}{p}u^p}, \quad p \in \mathbb{N} .$$

При $p = 0$

$$G(u;0) = 1 - u .$$

Определение 17. *Каноническим произведением назовём равномерно сходящееся бесконечное произведение*

$$F(z) = \prod_{k=1}^{\infty} G\left(\frac{z}{c_k}; p\right) , \tag{6}$$

где p — наименьшее целое число, при котором сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|c_k|^{p+1}}$.

Определение 18. *Число p назовём родом канонического произведения* (6).

Теорема 25 [7]. *Каноническое произведение* (6) — *h-целая функция. При этом, если $p = 0$, то верна оценка*

$$\|F(z)\| \le e^{B_1 \|z\|} , \tag{7}$$

где $B_1 = \sum_{k=0}^{\infty} \left\| \frac{1}{c_k} \right\|$. Если $p \in \mathbb{N}$, то для любого $z \in \{\|z\| \le R\}$

$$\|F(z)\| \le e^{2\|z\| \sum\limits_{k=0}^{k_0-1} \left\|\frac{1}{c_k}\right\| + \frac{1}{2}\|z\|^2 \sum\limits_{k=0}^{k_0-1} \left\|\frac{1}{c_k}\right\|^2 + \dots + \frac{1}{p}\|z\|^p \sum\limits_{k=0}^{k_0-1} \left\|\frac{1}{c_k}\right\|^p} \cdot$$

$$\cdot e^{\frac{1}{p+1} B_{p+1}\|z\|^{p+1} \frac{2}{p+1} B_{p+2}\|z\|^{p+2}} = \qquad (8)$$

$$= e^{\|z\| \sum\limits_{k=0}^{k_0-1} \left\|\frac{1}{c_k}\right\| + \sum\limits_{m=1}^{p} \left(\frac{1}{m}\|z\|^m \sum\limits_{k=0}^{k_0-1} \left\|\frac{1}{c_k}\right\|^m\right) + \frac{1}{p+1} B_{p+1}\|z\|^{p+1} \frac{2}{p+1} B_{p+2}\|z\|^{p+2}} ,$$

где $B_{p+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \left\|\frac{1}{c_k}\right\|^{p+1}$, $B_{p+2} = \sum_{k=0}^{\infty} \left\|\frac{1}{c_k}\right\|^{p+2}$, k_0 *зависит от* R.

Неравенства (7) и (8) дают достаточно грубую оценку роста h-целой функции внутри h-круга $\{\|z\| \le R\}$. Если ограничится случаем вещественных корней, то можно получить верхнюю оценку для порядка канонического произведения. Пусть a_k — последовательность вещественных чисел такая, что

$$0 < |a_1| \le \ldots \le |a_k| \le |a_{k+1}| \le \ldots, \quad \lim_{k\to\infty} a_k = \infty \, .$$

Обозначим через $n(r)$ число точек последовательности a_k, лежащих в h-круге $\{\|z\| \le r\}$.

Определение 19. *Показателем сходимости последовательности* a_k *назовём число* $\rho_1 = \inf \lambda$, $\lambda \in \mathbb{N}$, *таких, что сходится ряд* $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^{-\lambda}$.

Определение 20. *Порядком функции* $n(r)$ *назовём число*

$$\widetilde{\rho}_1 = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln n(r)}{\ln r} \, .$$

Теорема 26 [7]. *Показатель сходимости последовательности* a_k *равен порядку соответствующей функции* $n(r)$.

Пусть p — наименьшее целое число, при котором сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^{-p-1}$.

Теорема 27 [7]. *Каноническое произведение*

$$F(z) = \prod_{k=1}^{\infty} G\left(\frac{z}{a_k}; p\right) \qquad (9)$$

всюду в $\mathbb{C}_h$, *кроме точек* $z = a_k$, *удовлетворяет неравенству*

$$\ln \|F(z)\| < K_p r^p \left(\int_0^r \frac{n(t)\,dt}{t^{p+1}} + r\int_r^{\infty} \frac{n(t)\,dt}{t^{p+2}}\right) ,$$

где $r = \|z\|$, $K_p = 3e(p+1)(2+\ln p)$. *При* $p \in \mathbb{N}$, $K_0 = 1$.

Сформулируем теперь аналог теоремы Бореля

Теорема 28 (Аналог теоремы Бореля) [7]. *Порядок* ρ *канонического произведения* (9) *не превышает показателя сходимости* ρ_1 *последовательности* a_k *.*

Замечание 1. Теорема 28 даёт лишь верхнюю оценку порядка канонического произведения.

Можно сделать вывод, что, в отличие от классического случая, порядок канонического произведения, вообще говоря, не равен показателю сходимости последовательности корней. Кроме того, в **главе 4** даны верхние оценки порядка и типа функций, h-аналитических в $\mathbb{C}_h$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные научные результаты диссертации

1. Сформулированы и доказаны теоремы об общем виде, дифференциальных и интегральных свойствах h-голоморфных функций [3, 4, 9, 10, 13].

2. Сформулированы и доказаны теоремы о геометрических свойствах h-голоморфных функций и соответствующих отображений [5, 6, 14, 11].

3. Сформулированы и доказаны теоремы о равномерно сходящихся последовательностях h-голоморфных функций [1, 8].

4. Получены оценки порядка и типа h-целых функций [2, 7, 12].

Рекомендации по практическому использованию результатов

Результаты диссертации носят теоретический характер. Они могут применяться при исследовании задач неклассического комплексного анализа, механики реальных жидкостей, псевдоевклидовой геометрии, а также использоваться в учебном процессе при чтении спецкурсов по современному анализу.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ СОИСКАТЕЛЯ УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ

Статьи в научных рецензируемых изданиях, включенных в перечень изданий, и в иностранных научных изданиях

1. Зверович, Э.И. Нахождение областей сходимости и вычисление сумм степенных рядов от h-комплексного переменного / Э.И. Зверович, В.А. Павловский // Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук. — 2020. — Т. 56, № 2. — С. 189-193.

2. Павловский, В.А. Алгебраические уравнения с вещественными коэффициентами в кольце h-комплексных чисел / В.А. Павловский // Весці БДПУ. Серыя 3. Фізіка. Матэматыка. Інфарматыка. Біялогія. Геаграфія. — 2020. — № 4. — С. 25-31.

3. Pavlovsky, V.A. On h-holomorphy and h-analyticity of functions of an h-complex variable / V.A. Pavlovsky, I.L. Vasiliev // Bulletin of L.N. Gumilyov ENU. Mathematics. Computer science. Mechanics series. — 2020. — Vol. 133, № 4. — P. 19-27.

4. Павловский, В.А. О свойствах h-дифференцируемых функций / В.А. Павловский, И.Л. Васильев // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. — 2021. — № 2. — С. 29-37.

5. Васильев, И.Л. Отображения с помощью h-голоморфных функций / И.Л. Васильев, В.А. Павловский // Весці БДПУ. Серыя 3. Фізіка. Матэматыка. Інфарматыка. Біялогія. Геаграфія. — 2021. — № 2. — С. 37-43.

6. Павловский, В.А. О локальной обратимости функций h-комплексного переменного / В.А. Павловский, И.Л. Васильев // Журнал Белорусского государственного университета. Математика. Информатика. — 2022. — № 1. — С. 103-107.

7. Павловский, В.А. Некоторые оценки роста h-целых функций / В.А. Павловский, И.Л. Васильев // Весці БДПУ. Серыя 3. Фізіка. Матэматыка. Інфарматыка. Біялогія. Геаграфія. — 2022. — № 2. — С. 18-23.

8. Павловский, В.А. Принцип компактности и теорема Витали для h-голоморфных функций / В.А. Павловский // Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук. — 2022. — Т. 58, № 4. — С. 381-388.

Статьи в сборниках материалов научных конференций

9. Павловский, В.А. О дифференцируемости и аналитичности функций h-комплексного переменного / В.А. Павловский // Седьмые Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям, посвященные 100-летию со дня рождения профессора Ю.С. Богданова : материалы Междунар. математической конф., Минск, 1-4 июня 2021 г. / Мин. обр. Респ. Бел., Бел. гос. ун-т, ГНУ «Институт математики НАН Беларуси». — Минск, 2021. — С. 270-272.

10. Павловский, В.А. Дифференцирование и интегрирование функций h-комплексного переменного / В.А. Павловский // Наука и образование в современном мире : вызовы XXI века : материалы IX Междунар. науч. практич. конф., Нур Султан, 15 сентября 2021 г. / Объединение юридических лиц в форме Ассоциации “Общенациональное движение “БОБЕК” ; Конгресс ученых Казахстана. — Нур-Султан, 2021. — Т. 1: Физико-математические науки. — С. 70-73.

11. Павловский, В.А. h-диффеоморфизмы областей на множестве h-комплексных чисел / В.А. Павловский // Труды 10-го Междунар. науч. семинара AMADE 2021, Минск, 13-17 сентября 2021 г. / Бел. гос. ун-т, Институт математики НАН Беларуси; ред.: С.В. Рогозин. — Минск, 2022. — С. 59-64.

12. Павловский, В.А. Некоторые свойства h-целых функций [Электронный ресурс] / В.А. Павловский // 79-я научная конференция студентов и аспирантов Белорусского государственного университета : материалы конф., Минск, 10-21 мая 2022 г. В 3 ч. / Бел. гос. ун-т ; редкол.: В.Г. Сафонов (гл. ред.) [и др.]. — Минск, 2022. — Ч. 1. — С. 525-528. — Режим доступа: https://elib.bsu.by/bitstream/123456789/295260/1/525-528.pdf. — Дата доступа: 29.03.2023.

Тезисы

13. Павловский, В.А. Теорема о неявной h-голоморфной функции / В.А. Павловский, И.Л. Васильев // XIII Белорусская математическая конференция : материалы Междунар. науч. конф., Минск, 22-25 ноября 2021 г. В 2 ч. / Институт математики НАН Беларуси, Бел. гос. ун-т. — Минск, 2021. — Ч. 1. — С. 9-10.

14. Павловский, В.А. Свойства h-голоморфных отображений / В.А. Павловский // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений : материалы 10-ого Междунар. семинара, Минск, 13-17 сентября 2021 г. / Институт математики НАН Беларуси, Бел. гос. ун-т. — Минск, 2021. — С. 64-65.

РЕЗЮМЕ

Павловский Владислав Андреевич

Геометрические и аналитические свойства h-голоморфных функций

Ключевые слова: множество h-комплексных чисел, делители нуля, h-голоморфные функции, отображения стандартных областей, геометрическая теория h-голоморфных функций, равномерная сходимость последовательностей h-комплексных функций, последовательности h-аналитических функций, h-целые функции, рост h-целых функций.

Цель работы: исследование свойств функций h-комплексного переменного, построение элементов соответствующей теории.

Методы исследования. В работе использовались методы вещественного, комплексного и функционального анализа.

Полученные результаты и их новизна. В диссертации получены следующие новые результаты:

– теоремы об общем виде, конечных приращениях, локальной обратимости h-голоморфных функций;

– теорема об образе произвольной области при h-голоморфном отображении;

– теорема о глобальном h-диффеоморфизме, принципы сохранения области, максимума нормы и соответствиям границ для h-голоморфных функций;

– теоремы об h-голоморфности и h-аналитичности предела функциональной последовательности, а также об аппроксимации h-комплексных функций многочленами;

– оценки роста h-целых функций в терминах канонического произведения.

Рекомендации по использованию. Результаты могут применяться при исследовании задач неклассического комплексного анализа, механики реальных жидкостей, псевдоевклидовой геометрии и в учебном процессе при чтении спецкурсов по современному анализу для студентов физико-математических специальностей.

Область применения: неклассический комплескный анализ, плоская теория относительности, механика сжимаемых жидкостей.

РЭЗЮМЭ

Паўлоўскі Уладзіслаў Андрэевіч

Геаметрычныя і аналітычныя ўласцівасці h-галаморфных функцый

Ключавыя словы: мноства h-камплексных лікаў, дзельнікі нуля, h-галаморфныя функцыі, адлюстраванні стандартных абсягаў, геаметрычная тэорыя h-галаморфных функцый, раўнамерная збежнасць паслядоўнасцяў h-камплексных функцый, паслядоўнасці h-аналітычных функцый, h-цэлыя функцыі, рост h-цэлых функцый.

Мэта працы: даследаванне ўласцівасцяў функцый h-камплекснага пераменнага, пабудова элементаў адпаведнай тэорыі.

Метады даследвання. У рабоце выкарыстоўваліся метады рэчаіснага, камплекснага і функцыянальнага аналізу.

Атрыманныя вынікі і іх навізна. У дысертацыі атрыманы наступныя новыя вынікі:

– тэарэмы аб агульным выглядзе, канчатковых прыростах, лакальнай зварачальнасці h-галаморфных функцый;

– тэарэма аб выяве адвольнага абсягу пры h-галаморфным адлюстраванні;

– тэарэма аб глабальным h-дыфеамарфізме, прынцыпы захавання абсягу, максімуму нормы і адпаведнасці межаў для h-галаморфных функцый;

– тэарэмы аб h-галаморфнасці і h-аналітычнасці ліміту функцыянальнай паслядоўнасці, а таксама аб апраксімацыі h-камплексных функцый мнагаскладамі;

– ацэнкі росту h-цэлых функцый у тэрмінах кананічнага здабытку.

Рэкамендацыі па выкарыстанні. Вынікі могуць выкарыстоўвацца пры даследаванні задач некласічнага камплекснага аналізу, механікі рэальных вадкасцей, псеўдаеўклідавай геаметрыі і ў навучальным працэсе пры выкладанні спецкурсаў па сучасным аналізе для студэнтаў фізіка-матэматычных спецыяльнасцей.

Галіна ўжывання: некласічны камплескны аналіз, плоская тэорыя адноснасці, механіка сцікаемых вадкасцей.

SUMMARY

Pavlovsky Vladislav Andreevich

Geometric and analytical properties of the *h*-holomorphic functions

Keywords: set of h-complex numbers, zero divisors, h-holomorphic functions, standard domains mappings, geometric theory of h-holomorphic functions, uniform convergence of sequences of h-complex functions, sequences of h-analytic functions, h-entire functions, growth of h-entire functions.

Reserch aim: to study the properties of functions of h-complex variable, to construct elements of the corresponding theory.

Reserch methotds. The work used methods of real, complex and functional analysis.

Obtained results and their novelty. The following new results were obtained:

– theorems on general form, finite increments, local invertibility of h-holomorphic functions;

– theorem on the image of an arbitrary domain under h-holomorphic mapping;

– global h-diffeomorphism theorem, domain preservation (open mapping) theorem, boundary matching (Caratheodory's) theorem and maximum norm principle for h-holomorphic functions;

– theorems on the h-holomorphism and h-analyticity of the limit of a functional sequence, also on the approximation of h-complex functions by polynomials;

– estimates of the growth of h-entire functions in terms of the canonical product.

Recommendations for use. The results can be used in the study of problems of non-classical complex analysis, mechanics of real fluids, pseudo-Euclidean geometry and in the educational process when reading special courses on modern analysis for students of physical and mathematical specialties.

Application field: non-classical complex analysis, flat theory of relativity, mechanics of compressible fluids.