

**Белорусский государственный университет**

**УТВЕРЖДАЮ**

Проректор по учебной работе и  
образовательным инновациям

О.Г. Прохоренко

«12» июня 2023 г.

Регистрационный № УД – 11863/уч.

**МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ**

**Учебная программа учреждения высшего образования  
по учебной дисциплине для специальностей:**

**1-31 03 03 Прикладная математика (по направлениям)**

Направление специальности

1-31 03 03-01 Прикладная математика (научно-производственная деятельность)

**1-31 03 04 Информатика**

**1-31 03 05 Актуарная математика**

**1-31 03 06 Экономическая кибернетика (по направлениям)**

Направление специальности

1-31 03 06-01 Экономическая кибернетика

(математические методы и компьютерное моделирование в экономике)

**1-98 01 01 Компьютерная безопасность (по направлениям)**

Направление специальности

1-98 01 01- 01 Компьютерная безопасность (математические методы и  
программные системы)

2023 г.

Учебная программа составлена на основе ОСВО 1-31 03 03-2021, 1-31 03 04-2021, 1-31 03 05-2021, 1-31 03 06-2021, 1-98 01 01-2021, типовых учебных планов №G 31-1-026/пр.-тип. от 30.06.2021, №G 31-1-029/пр.-тип. от 30.06.2021, №G 31-1-027/пр.-тип. от 30.06.2021, №G 31-1-028/пр.-тип. от 30.06.2021, №P 98-1-003/пр.-тип. от 02.07.2021 и учебных планов БГУ: №G 31-1-030/уч. от 30.06.2021, №G 31-1-022/уч. ин. от 23.07.2021, №G 31-1-031/уч. от 30.06.2021, №G 31-1-021/уч. ин. от 23.07.2021, №G 31-1-032/уч. от 30.06.2021, №G 31-1-033/уч. от 30.06.2021, №P 98-1-005/уч. от 23.07.2021, №P 98-1-024/уч. ин. от 09.08.2021

### **СОСТАВИТЕЛИ:**

**В.В. Альсевич**, профессор кафедры методов оптимального управления Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, профессор;

**В.В. Крахотко**, доцент кафедры методов оптимального управления Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент;

**Л.И. Лавринович**, доцент кафедры методов оптимального управления Белорусского государственного университета, кандидат физико-математических наук, доцент

### **РЕЦЕНЗЕНТЫ:**

**О.И. Костюкова**, главный научный сотрудник отдела нелинейного и стохастического анализа Государственного научного учреждения «Институт математики Национальной академии наук Беларуси» доктор физико-математических наук, профессор;

**И.К. Асмыкович**, доцент кафедры высшей математики Белорусского государственного технологического университета, кандидат физико-математических наук, доцент

### **РЕКОМЕНДОВАНА К УТВЕРЖДЕНИЮ:**

Кафедрой методов оптимального управления БГУ  
(протокол № 9 от 19.04.2023 г.)

Научно-методическим Советом БГУ  
(протокол № 8 от 31.05.2023 г.)

Заведующий кафедрой методов  
оптимального управления

кандидат физико-математических наук, доцент



Н.М. Дмитрук

## ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

Учебная дисциплина «Методы оптимизации» знакомит студентов с классическими и современными подходами к решению экстремальных задач, возникающих в повседневной человеческой деятельности (техника, наука, экономика, финансы). Базой для изучения методов оптимизации являются дисциплины модулей «Математический анализ», «Геометрия и алгебра», а также дисциплины «Дифференциальные уравнения», «Вычислительные методы алгебры».

### Цели и задачи учебной дисциплины

**Цели** учебной дисциплины «Методы оптимизации»:

1. формирование и развитие практико-ориентированной компетентности, позволяющей использовать полученные знания для решения задач в сфере профессиональной и социальной деятельности;
2. формирование логического мышления, позволяющего грамотно анализировать получаемую информацию и делать соответствующие выводы для достижения желаемых результатов;
3. формирование навыков исследовательской и активной профессиональной деятельности, постановки задач, выработки и принятия решений;
4. изучение математического аппарата и методов, применяемых при решении экстремальных задач, возникающих в практической деятельности при решении задач оптимального управления, распределения ресурсов, организации производства, сетевого планирования и т.п.

**Задачи** учебной дисциплины:

1. выработать навыки применения методов оптимизации и алгоритмов решения прикладных задач на высоком профессиональном уровне;
2. подготовить студентов к внедрению этих методов и алгоритмов в современной экономической системе.

**Место учебной дисциплины** в системе подготовки специалиста с высшим образованием.

Учебная дисциплина «Методы оптимизации» относится к компоненту учреждения высшего образования и входит **в модуль** «Математические методы принятия решения» для всех специальностей.

**Связи** с другими учебными дисциплинами, включая учебные дисциплины компонента учреждения высшего образования, дисциплины специализации и др.

Учебная дисциплина «Методы оптимизации» служит базой для учебных дисциплин «Исследование операций», «Математическая экономика», «Методы оптимизации в машинном обучении».

### Требования к компетенциям

Освоение учебной дисциплины «Методы оптимизации» должно обеспечить формирование следующих **специализированных компетенций**:

для специальности **1-98 01 01 Компьютерная безопасность (по направлениям)**:

СК-4. Использовать методы решения задач математического программирования, включая линейное, выпуклое, нелинейное, дискретное программирование, методы решения бесконечномерных задач оптимизации, применять теорию двойственности при исследовании оптимизационных задач.

Для специальностей: **1-31 03 05 Актуарная математика, 1-31 03 06 Экономическая кибернетика (по направлениям):**

СК – 6. Строить и анализировать математические модели для задач принятия оптимальных решений в прикладных областях экономики, обосновывать методы их теоретического исследования, включающие аппарат математического программирования, теории игр, вариационного исчисления, оптимального управления и упорядочения.

Для специальности **1-31 03 04 Информатика:**

СК – 3. Строить и анализировать математические модели для задач принятия оптимальных решений в прикладных областях экономики, обосновывать методы их теоретического исследования, включающие аппарат математического программирования, теории игр, вариационного исчисления, оптимального управления и упорядочения.

Для специальности **1-31 03 03 Прикладная математика (по направлениям):**

СК-8. Строить и анализировать математические модели для задач принятия оптимальных решений в прикладных областях экономики, обосновывать методы их теоретического исследования, включающие аппарат математического программирования, теории игр, вариационного исчисления, оптимального управления и упорядочения.

В результате изучения дисциплины студент должен

**знать:**

- основы теории оптимизации и управления;
- линейное программирование;
- транспортные задачи;
- методы решения задач выпуклого и нелинейного программирования;
- основы динамического и целочисленного программирования;
- принцип максимума;

**уметь:**

- моделировать оптимизационные задачи экономики;
- применять методы решения оптимизационных задач;
- проводить анализ решения;
- корректировать решения при изменении исходных данных;

**владеть:**

- методами моделирования оптимизационных задач;
- методами решения оптимизационных задач;
- методами проведения анализа решения и прогнозирования.

**Структура учебной дисциплины**

Форма получения высшего образования – очная (дневная).

Дисциплина изучается в 5 семестре. Всего на изучение учебной дисциплины «Методы оптимизации» отведено:

– для очной формы получения высшего образования – 216 часов, в том числе 102 аудиторных часа, из них: лекции – 68 часов, лабораторные занятия – 30 часов, управляемая самостоятельная работа – 4 часа.

Трудоемкость учебной дисциплины 6 зачетных единиц.

Форма текущей аттестации – экзамен.

# СОДЕРЖАНИЕ УЧЕБНОГО МАТЕРИАЛА

## **Введение**

Предмет методов оптимизации. Историческая справка. Место дисциплины среди других математических наук.

## **Раздел 1. Линейное программирование**

### **Тема 1.1. Симплекс-метод**

Производственная задача. Графический метод решения. Каноническая и нормальная формы задач линейного программирования.

Базисный план. Потенциалы и оценки. Критерий оптимальности. Итерация симплекс-метода. Первая фаза. Конечность метода.

### **Тема 1.2. Двойственность в линейном программировании**

Двойственная каноническая задача линейного программирования. Базисный двойственный план и псевдоплан. Теория двойственности в линейном программировании.

Критерий оптимальности базисного двойственного плана. Итерация двойственного симплекс-метода. Первая фаза.

Анализ решения: единственность оптимальных прямого и двойственного планов, физический смысл двойственных переменных, анализ чувствительности.

### **Тема 1.3. Специальные задачи**

Сетевая транспортная задача. Матричная транспортная задача. Некоторые приложения линейного программирования: задачи на минимакс, кусочно-линейная экстремальная задача, приложение к исследованию линейных соотношений и матричных игр.

## **Раздел 2. Выпуклое программирование**

### **Тема 2.1. Выпуклые множества и функции. Основная задача выпуклого программирования**

Выпуклые множества и функции и их свойства. Основная задача выпуклого программирования. Теорема Куна-Таккера.

### **Тема 2.2. Двойственность в выпуклом программировании**

Теория двойственности в выпуклом программировании. Квадратичное программирование. Задача геометрического программирования.

## **Раздел 3. Нелинейное программирование**

### **Тема 3.1. Задачи математического и нелинейного программирования**

Классификация задач нелинейного программирования. Задачи на безусловный минимум.

### **Тема 3.2. Задачи со смешанными ограничениями**

Задачи на условный минимум. Обобщенное правило множителей Лагранжа. Классическое правило множителей Лагранжа. Лемма о включении. Необходимые условия оптимальности второго порядка. Достаточные условия оптимальности.

### **Тема 3.3. Линейное и нелинейное программирование**

## **Раздел 4. Вычислительные методы нелинейного программирования**

### **Тема 4.1. Классификация методов. Метод ветвей и границ**

Классификация вычислительных методов. Методы нулевого порядка. Метод ветвей и границ: схемы одностороннего и полного ветвления. Задача целочисленного линейного программирования. Задача о рюкзаке.

### **Тема 4.2. Методы безусловной и условной оптимизации**

Минимизация унимодальных функций: методы золотого сечения и Фибоначчи, дихотомический поиск. Методы безусловной оптимизации: градиентные методы, метод Ньютона. Методы условной оптимизации: метод проекции градиента, метод условного градиента, метод штрафных функций.

### **Тема 4.3. Динамическое программирование**

Многоэтапные задачи оптимизации. Применение метода динамического программирования к решению конечномерных задач. Задача распределения ресурсов. Задача о кратчайшем пути. Задачи сетевого планирования.

## **Раздел 5. Вариационное исчисление**

### **Тема 5.1. Основная задача вариационного исчисления. Необходимые условия оптимальности первого порядка**

Задача о брахистохроне. Допустимые кривые. Основная задача вариационного исчисления. Слабая и сильная минимали. Необходимые условия оптимальности слабой минимали в терминах вариаций функционала. Условия Эйлера, Вейерштрасса-Эрдмана.

### **Тема 5.2. Необходимые условия оптимальности второго порядка. Достаточные условия оптимальности**

Условие Лежандра-Клебша. Присоединенная задача о минимуме. Условие Якоби. Достаточные условия оптимальности.

### **Тема 5.3. Дискретная оптимизация, динамическое программирование, вариационное исчисление**

## **Раздел 6. Оптимальное управление**

### **Тема 6.1. Принцип максимума**

Задача предельного быстродействия. Теорема существования. Классификация задач оптимального управления. Принцип максимума Понтрягина для задачи типа Больца. Достаточные условия оптимальности. Задачи с ограничениями. Принцип максимума для задачи предельного быстродействия. Краевая задача принципа максимума.

### **Тема 6.2. Специальные задачи оптимального управления. Динамическое программирование в теории оптимального управления**

Оптимизация непрерывных динамических систем в классе дискретных управляющих воздействий. Оптимизация дискретных систем управления.

Применение динамического программирования для исследования оптимальных систем управления.

### **Тема 6.3. Проблема синтеза оптимальных систем управления**

Синтез оптимальных систем управления с помощью принципа максимума. Применение динамического программирования к синтезу оптимальных систем управления. Оптимальное управление в реальном времени.



## УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ КАРТА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Дневная форма получения образования с применением электронных средств обучения (ДО)

Номер раздела, темы	Наименование раздела, темы	Количество аудиторных часов		Количество часов УСР	Форма контроля знаний
		Лекции	Лабораторные занятия		
	<b>Введение</b>	1			
<b>1</b>	<b>Линейное программирование</b>				
1.1	Симплекс-метод	5	6		Решение задач, расчетно-графическое задание № 1
1.2	Двойственность в линейном программировании	4	2		Решение задач
1.3.	Специальные задачи	4	4		Решение задач, расчетно-графическое задание № 2
<b>2</b>	<b>Выпуклое программирование</b>				
2.1	Выпуклые множества и функции. Основная задача выпуклого программирования	4	4		Решение задач
2.2	Двойственность в выпуклом программировании	2			Устный опрос, расчетно-графическое задание № 3
<b>3</b>	<b>Нелинейное программирование</b>				
3.1	Задачи математического и нелинейного программирования	4			Устный опрос
3.2	Задачи со смешанными ограничениями	6	4		Решение задач,

					расчетно-графическое задание № 4
3.3	Линейное и нелинейное программирование			2	Контрольная работа №1
<b>4</b>	<b>Вычислительные методы нелинейного программирования</b>				
4.1	Классификация методов. Метод ветвей и границ	4	2		Решение задач
4.2	Методы безусловной и условной оптимизации	4			Устный опрос
4.3	Динамическое программирование	4	2		Решение задач, расчетно-графическое задание № 5
<b>5</b>	<b>Вариационное исчисление</b>				
5.1	Основная задача вариационного исчисления. Необходимые условия оптимальности первого порядка	4	2		Решение задач
5.2	Необходимые условия оптимальности второго порядка. Достаточные условия оптимальности	4	2		Решение задач
5.3	Дискретная оптимизация, динамическое программирование, вариационное исчисление			2	Контрольная работа № 2
<b>6</b>	<b>Оптимальное управление</b>				
6.1	Принцип максимума	8	2		Устный опрос, решение задач
6.2	Специальные задачи оптимального управления. Динамическое	8			Устный опрос, коллоквиум

	программирование в теории оптимального управления				
6.3	Проблема синтеза оптимальных систем управления	2			Устный опрос
	<b>Итого</b>	<b>68</b>	<b>30</b>	<b>4</b>	

## ИНФОРМАЦИОННО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

### Перечень основной литературы

1. Методы оптимизации: электронный учебно-методический комплекс для специальностей: 1-31 03 03 «Прикладная математика (по направлениям)»; 1-31 03 04 «Информатика»; 1-31 03 05 «Актуарная математика»; 1-31 03 06-01 «Экономическая кибернетика (по направлениям)», 1-98 01 01-01 «Компьютерная безопасность (по направлениям)» / В. В. Альсевич [и др.]; БГУ, Фак. прикладной математики и информатики, Каф. методов оптимального управления. – Минск: БГУ, 2020. – 203 с. : ил., табл. – Библиогр.: с. 202–203. – URL: <https://elib.bsu.by/handle/123456789/243989>.
2. Ржевский, С. В. Математическое программирование : учебное пособие / С. В. Ржевский. — Санкт-Петербург : Лань, 2022. — 608 с. — Текст : электронный // Лань : электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/206993>.
3. Пантелеев, А. В. Методы оптимизации в примерах и задачах: учебное пособие / А. В. Пантелеев, Т. А. Летова. — 4-е изд., испр. — Санкт-Петербург: Лань, 2022. — 512 с. — Текст: электронный // Лань: электронно-библиотечная система. — URL: <https://e.lanbook.com/book/212129>.

### Перечень дополнительной литературы

4. Методы оптимизации / Р. Габасов, Ф. М. Кириллова, В. В. Альсевич [и др.]. – Минск: Четыре четверти, 2011. – 472 с
5. Альсевич, В.В. Методы оптимизации: упражнения и задания: Учебное пособие / В.В. Альсевич, В.В. Крахотко – Мн.: БГУ, 2005. – 405 с.
6. Васильев, Ф.П. Методы оптимизации: В 2-х кн: Кн. 1 / Ф.П. Васильев. – Москва: МЦНМО, 2011. – 620 с.
7. Карманов, В.Г. Математическое программирование: Учебное пособие / В.Г. Карманов – М.: Физматлит, 2001. – 263 с.
8. Моисеев, Н.Н. Методы оптимизации: Учебное пособие / Н.Н. Моисеев, Ю.П. Иванилов, Е.М. Столярова – М.: Наука, 1978. – 351 с.
9. Интрилигатор, М. Математические методы оптимизации и экономическая теория / М. Интрилигатор – М.: Айрис-пресс, 2002. –565 с.
10. Ашманов, С.А. Линейное программирование: Учебное пособие / С.А. Ашманов –М.: URSS. 2021. – 304 с.

## **Перечень используемых средств диагностики и методика формирования итоговой отметки**

Текущая аттестация проводится в соответствии с Постановлением Министерства образования Республики Беларусь № 53 от 29 мая 2012 г. «Об утверждении Правил проведения аттестации студентов, курсантов, слушателей при освоении содержания образовательных программ высшего образования»; Положением о рейтинговой системе оценки знаний обучающихся по учебной дисциплине в Белорусском государственном университете (приказ ректора БГУ № 189-ОД от 31.03.2020); Критериями оценки результатов учебной деятельности обучающихся в учреждениях высшего образования по десятибалльной шкале (Письмо Министерства образования Республики Беларусь от 28.05.2013 г. № 09-10/53-ПО).

Для диагностики компетенций используются следующие формы:

*Устная форма:*

- коллоквиум;
- устный опрос.

*Письменная форма:*

- контрольная работа;
- расчетно-графические задания.

*Устно-письменная форма:*

- решение задач;
- экзамен.

На лекционных занятиях по учебной дисциплине «Методы оптимизации» предусматривается изложение теории с включением проблемного подхода к изучению отдельных тем.

Расчетно-графические задания по каждой изученной теме предложены на образовательном портале EDUFPMI.

Формой текущей аттестации по дисциплине «Методы оптимизации» учебным планом предусмотрен **экзамен**.

При формировании итоговой отметки используется рейтинговая система оценки знаний студента, дающая возможность проследить и оценить динамику процесса достижения целей обучения. Рейтинговая система предусматривает использование весовых коэффициентов для текущего контроля знаний и текущей аттестации студентов по дисциплине.

Примерные весовые коэффициенты, определяющие вклад текущего контроля знаний в итоговую отметку:

Формирование отметки за текущую успеваемость:

- устный опрос, решение задач – 10 %;
- расчетно-графические задания – 30 %;

– контрольная работа – 60 %.

Итоговая отметка по дисциплине рассчитывается на основе отметки текущей успеваемости и экзаменационной отметки с учетом их весовых коэффициентов. Вес отметки текущей успеваемости составляет 40 %, вес экзаменационной отметки составляет 60 %.

### **Примерный перечень заданий для управляемой самостоятельной работы студентов**

#### **Тема 3.3. Линейное и нелинейное программирование. (2 ч)**

##### **Примерный перечень заданий:**

1. а) Решить задачу линейного программирования графическим методом.  
б) Свести задачу из пункта а) к канонической задаче линейного программирования.  
в) Записать для канонической задачи из пункта б) задачу первой фазы, указать для нее начальный базисный план.  
г) Решить каноническую задачу из пункта в) симплекс методом, построив начальный базисный план на основе небазисной вершины и подобрав к нему базис.  
д) Построить задачу, двойственную к исходной задаче из пункта а)  
е) Записать решение построенной двойственной задачи.  
ж) Для задачи из пункта б) провести одну итерацию двойственного симплексметода, взяв в качестве начального базис, выбранный в пункте г).
2. Решить задачу выпуклого или нелинейного программирования со смешанными ограничениями.

**Форма контроля** - контрольная работа № 1.

#### **Тема 5.3. Дискретная оптимизация, динамическое программирование, вариационное исчисление. (2 ч)**

##### **Примерный перечень заданий:**

1. Решить задачу целочисленного программирования.
2. Решить задачу распределения ресурсов.
3. Решить основную задачу вариационного исчисления.

**Форма контроля**- контрольная работа № 2.

### **Описание инновационных подходов и методов преподавания учебной дисциплины**

При организации образовательного процесса рекомендуется использовать перечисленные ниже методы.

**Метод учебной дискуссии**, который предполагает участие студентов в целенаправленном обмене мнениями, идеями для предъявления и/или согласования существующих позиций по определенной проблеме. Использование метода обеспечивает появление нового уровня понимания изучаемой темы, применение знаний (теорий, концепций) при решении проблем, определение способов их решения.

**Метод группового обучения**, который представляет собой форму организации учебно-познавательной деятельности обучающихся, предполагающую функционирование разных типов малых групп, работающих как над общими, так и специфическими учебными заданиями.

### **Методические рекомендации по организации самостоятельной работы обучающихся**

Для обеспечения возможности самостоятельной работы при изучении теории и выполнении практических заданий рекомендуется использовать изданные учебные пособия, размещенные в электронной библиотеке университета.

Для самоконтроля усвоения учебного материала рекомендуется использовать образовательный портал EDUFPMI, где размещены:

- учебно-методические материалы,
- учебные издания для теоретического изучения дисциплины,
- практические задания и примеры их решений,
- материалы текущего контроля и текущей аттестации,
- вопросы для подготовки к экзамену.

## Примерный перечень вопросов к экзамену

1. Выпуклые множества. Свойства выпуклых множеств. Теорема о строгой отделимости выпуклых множеств.
2. Опорная плоскость. Теорема о существовании опорной плоскости\*. Теорема об отделимости выпуклых множеств.
3. Лемма о несовместности системы линейных соотношений.
4. Выпуклые функции. Критерии выпуклости.
5. Постановка основной задачи ВП. Теорема Куна-Таккера для основной задачи ВП\*.
6. Гладкая задача ВП. Условия Куна-Таккера.
7. Теория двойственности в ВП. Прямая и двойственная задачи. Соотношения двойственности.
8. Решение простейшей задачи квадратичного программирования.
9. Задача безусловной оптимизации в НЛП. Необходимые условия минимума первого и второго порядка. Достаточное условие локального минимума.
10. Общая задача НЛП. Вспомогательная теорема.
11. Общая задача НЛП. Обобщенное правило множителей Лагранжа.
12. Общая задача НЛП. Классическое правило множителей Лагранжа.
13. Условно-стационарные и нормальные планы в задачах НЛП.
14. Необходимое и достаточное условия минимума второго порядка\*. Общая схема решения задачи НЛП.
15. Векторная оптимизация.
16. Каноническая форма задач ЛП. Основные понятия. Графический метод решения задачи ЛП.
17. Базис. Базисный план. Невырожденный базисный план. Формула приращения целевой функции\*. Потенциалы, оценки.
18. Критерий оптимальности базисного плана.
19. Итерация прямого симплекс-метода.
20. Первая фаза симплекс-метода.
21. Двойственные задачи в ЛП. Правила построения двойственных задач.
22. Теория двойственности в ЛП. Основное неравенство теории двойственности ЛП. Теорема существования. Теорема двойственности. Критерий несовместности ограничений.
23. Базисные двойственный план и псевдоплан. Критерий оптимальности базисного двойственного плана.
24. Итерация двойственного СМ.
25. СТЗ. Постановка задачи. Основные понятия и определения. Базисный сетевой поток. Алгоритм прямого метода потенциалов для СТЗ. Первая фаза метода потенциалов.
26. МТЗ. Постановка задачи. Основные понятия и определения. Базисный план перевозок. Алгоритм прямого метода потенциалов для МТЗ. Первая фаза метода потенциалов.
27. Задача на минимакс.



28. Теорема Фаркаша.
29. Теорема о совместности систем неравенств\*
30. Теорема о несовместности неравенств.
31. Методы поиска точек минимума унимодальных функций. Дихотомический поиск. Метод “золотого сечения”, метод Фибоначчи\*.
32. Метод ветвей и границ. Основные понятия. Схема полного и одностороннего ветвления. Задача о рюкзаке.
33. Метод ветвей и границ. Основные понятия. Схема полного и одностороннего ветвления. Задача целочисленного линейного программирования.
34. Динамическое программирование. Общая схема.
35. Динамическое программирование. Задача о замене оборудования.
36. Динамическое программирование. Задача распределения ресурсов. Задача о кратчайшем пути.
37. Вариационное исчисление. Основная задача ВИ. Понятия слабой и сильной минималей. Классификация задач ВИ.
38. Метод вариаций. Вариации кривой и функционала. Условия оптимальности в терминах вариаций функционала.
39. Лемма Дюбуа-Раймона. Теорема Эйлера.
40. Теорема Гильбердта. Условия Вейерштрасса-Эрдмана
41. Присоединенная задача о минимуме. Условие Лежандра-Клебша.
42. Условие Якоби. Достаточные условия слабого минимума.
43. Постановка задачи терминального управления. Приращение критерия качества.
44. Принцип максимума для терминальной задачи. Условия достаточности принципа максимума.
45. Принцип максимума для задач оптимизации переходного процесса.
46. Задача оптимального быстрогодействия. Принцип максимума для задачи оптимального быстрогодействия. Решение линейной задачи оптимального быстрогодействия.

## ПРОТОКОЛ СОГЛАСОВАНИЯ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ УВО

Название учебной дисциплины, с которой требуется согласование	Название кафедры	Предложения об изменениях в содержании учебной программы учреждения высшего образования по учебной дисциплине	Решение, принятое кафедрой, разработавшей учебную программу (с указанием даты и номера протокола) <sup>1</sup>
Исследование операций	Кафедра информационных систем управления	Нет	Изменения не требуются (протокол № 9 от 19.04.2023г.)
Математическая экономика	Кафедра методов оптимального управления	Нет	Изменения не требуются (протокол № 9 от 19.04.2023 г.)

**ДОПОЛНЕНИЯ И ИЗМЕНЕНИЯ К УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЕ УВО**  
**на \_\_\_\_ / \_\_\_\_ учебный год**

№№ пп	Дополнения и изменения	Основание

Учебная программа пересмотрена и одобрена на заседании кафедры  
методов оптимального управления (протокол № \_\_\_\_ от \_\_\_\_\_ 20\_\_ г.)

Заведующий кафедрой  
к.ф.-м.н., доцент \_\_\_\_\_

Н.М.Дмитрук

УТВЕРЖДАЮ  
Декан факультета  
доцент \_\_\_\_\_

Ю.Л.Орлович