

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ДВУХСЛОЙНОЙ БАЛКИ-ПОЛОСЫ С ВЫСОКОКОНТРАСТНЫМИ СВОЙСТВАМИ МАТЕРИАЛА

Nguyen Le¹⁾, Г. И. Михасев²⁾

¹⁾ *Белорусский государственный университет, Беларусь, Минск,
dinhnguyen081017@gmail.com*

²⁾ *Белорусский государственный университет, Беларусь, Минск, mikhasev@bsu.by*

Рассматривается изотропная двухслойная полоса с высококонтрастными упругими свойствами. Исходя из двухмерной теории упругости выведены уравнение типа Бернулли-Эйлера и уравнение типа Уфлянда-Миндлина, описывающие длинноволновую динамику двухслойной балки-полосы под действием объемных и поверхностных сил.

Ключевые слова: двухслойная балка-полоса; высококонтрастные свойства; сдвиги; низкочастотные колебания.

EQUATIONS OF MOTION FOR TWO-LAYER BEAM-STRIP WITH HIGH CONTRAST MATERIAL PROPERTIES

Nguyen Le¹⁾, G. I. Mikhasev²⁾

¹⁾ *Belarussian State University, Belarus, Minsk, dinhnguyen081017@gmail.com*

²⁾ *Belarussian State University, Belarus, Minsk, mikhasev@bsu.by*

An isotropic two-layer strip with high contrast elastic properties is considered. The Bernoulli-Euler and Uflyand-Mindlin type equations describing the long-wave dynamics of a two-layer beam-strip under action of volume and surface forces has been derived.

Keywords: two-layer beam-strip; high contrast properties; shears; low-frequency vibrations.

Введение

Существующие теории слоистых балок, пластин и оболочек основаны, как правило, на введении кинематических гипотез, предполагающих определенный закон распределения тангенциальных перемещений по толщине слоя [1, 2]. Классические модели типа Бернулли-Эйлера для балок и Кирхгофа-Лява для пластин и оболочек не учитывают поперечные сдвиги и не удовлетворяют граничным условиям на свободной поверхности. Теории первого, второго и высших порядков, основанные на кинематических гипотезах, устраняют вышеуказанные недостатки, но они

достаточно сложны и пригодны, как правило, в случаях, когда свойства слоев различаются незначительно [3].

Целью данной работы является вывод разрешающих уравнений для двухслойной балки-полосы с существенно различными механическими свойствами составляющих частей, которые описывают длинноволновую динамику. В качестве исходных используются двумерные уравнения упругости. Рассматривается два случая: а) механические свойства слоев различаются незначительно; б) свойства слоев отличаются высокой контрастностью. В первом случае выведено уравнение типа Бернулли-Эйлера, а во втором случае получено уравнение типа Уфлянда-Миндлина, учитывающее сдвиги в жестком слое. В качестве примера рассмотрены свободные колебания балки-полосы

Постановка задачи

Рассмотрим двухслойную балку-полосу, состоящую из двух различных жестко связанных изотропных упругих слоев толщиной h_k , характеризующихся константами Ламе λ_k, μ_k и плотностями материалов ρ_k ($k=1,2$). Системы координат приведены на Рис.1. На балку-полосу действуют как внешняя поверхностная нагрузка $Q^{(k)} = (q_1^{(k)}, q_2^{(k)})$, так и объемные силы $F^{(k)} = (f_1^{(k)}, f_2^{(k)})$. В качестве исходных используем двумерные уравнения движения среды

$$s_{ij,j}^{(k)} - \rho_k \frac{\partial^2 u_i^{(k)}}{\partial t^2} + f_i^{(k)} = 0, \quad i, j, k = 1, 2 \quad (1)$$

где $s_{ij}^{(k)}$ — компоненты тензора напряжений в обоих слоях, а $u_i^{(k)}(x_j^{(k)}, t)$ — компоненты вектора перемещений.

Рассмотрим случай, когда $\lambda_2 \ll \lambda_1, \mu_2 \ll \mu_1$, а также $h \ll l$. Второе предположение заключается в малости общей толщины слоя по сравнению с длиной волны либо длиной балки-полосы. Введем два малых параметра:

$$\varepsilon = h/l, \quad E_2/E_1 = \varepsilon_{21} = \varepsilon^\alpha \nu, \quad \alpha \geq 0, \quad \nu \ll 1, \quad h = h_1 + h_2 \quad (2)$$

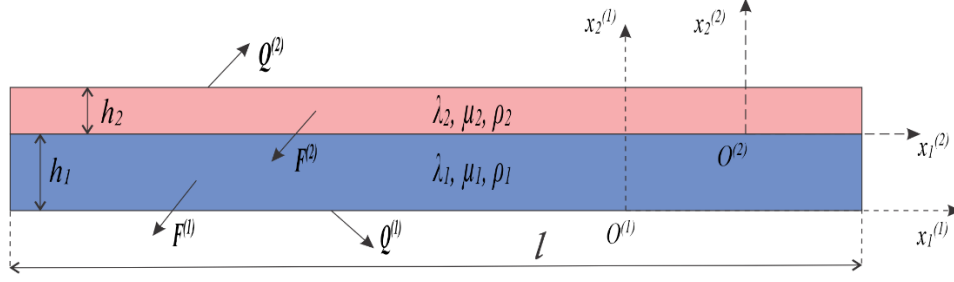


Рис. Двухслойная балка-полоса под действием поверхностных и объемных сил системы координат

Переходя в уравнениях (1) к безразмерному виду, подобно тому, как это было сделано в [4], учитывая уравнения физического состояния для изотропного материала, и вводя асимптотические оценки

$$w^{(k)} = \varepsilon^{-4} W^{(k)}, \quad u^{(k)} = \varepsilon^{-3} U^{(k)}, \quad \sigma_{12}^{(k)} = \varepsilon^{-1} \tau^{(k)}, \quad \sigma_{22}^{(k)} = \sigma^{(k)}, \quad (3)$$

соответствующие случаю низкочастотных колебаний, приходим к системе дифференциальных уравнений [5]

$$\begin{aligned} \frac{\partial W^{(k)}}{\partial z} &= -\varepsilon^2 \kappa_k c_v^{(k)} \frac{\partial U^{(k)}}{\partial x} + \varepsilon^4 \kappa_k c_3^{(k)} \sigma^{(k)}, \\ \frac{\partial U^{(k)}}{\partial z} &= -\kappa_k \frac{\partial W^{(k)}}{\partial x} + \varepsilon^2 \kappa_k c_g^{(k)} \tau^{(k)}, \\ \frac{\partial \tau^{(k)}}{\partial z} &= -\kappa_k c_0^{(k)} \frac{\partial^2 U^{(k)}}{\partial x^2} - \varepsilon^2 \kappa_k c_v^{(k)} \frac{\partial \sigma^{(k)}}{\partial x} + \varepsilon^2 \kappa_k c_\omega^{(k)} \frac{\partial^2 U^{(k)}}{\partial t^2} - \varepsilon^2 f_1^{(k)}, \\ \frac{\sigma^{(k)}}{\partial z} &= -\kappa_k \frac{\partial \tau^{(k)}}{\partial x} + \kappa_k c_\omega^{(k)} \frac{\partial^2 W^{(k)}}{\partial t^2} - f_3^{(k)}, \quad k=1,2 \end{aligned} \quad (4)$$

где $W^{(k)}, U^{(k)}, \tau^{(k)}, \sigma^{(k)} \ll 1$ - безразмерные нормальное и тангенциальное перемещения, а также напряжение сдвига и нормальное напряжение соответственно.

Граничные условия и условия на интерфейсе имеют вид:

$$\begin{aligned} \tau^{(1)}|_{z=0} &= \varepsilon^2 s^{(1)}(x, t), & \sigma^{(1)}|_{z=0} &= q^{(1)}(x, t), \\ \tau^{(2)}|_{z=1} &= \varepsilon^2 s^{(2)}(x, t), & \sigma^{(2)}|_{z=1} &= q^{(2)}(x, t). \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} W^{(1)}|_{z=1} &= W^{(2)}|_{z=0}, & U^{(1)}|_{z=1} &= U^{(2)}|_{z=0}, \\ \tau^{(1)}|_{z=1} &= \varepsilon^\alpha \nu \tau^{(2)}|_{z=0}, & \sigma^{(1)}|_{z=1} &= \varepsilon^\alpha \nu \sigma^{(2)}|_{z=0}. \end{aligned} \quad (6)$$

Решение краевой задачи (4)–(6), отвечающей длинноволновой деформации, может быть найдено в виде формальных асимптотических рядов

$$\begin{aligned} W^{(k)} &= w_0^{(k)} + \varepsilon^2 w_2^{(k)} + \dots, & U^{(k)} &= u_0^{(k)} + \varepsilon^2 u_2^{(k)} + \dots, \\ \tau^{(k)} &= \tau_0^{(k)} + \varepsilon^2 \tau_2^{(k)} + \dots, & \sigma^{(k)} &= \sigma_0^{(k)} + \varepsilon^2 \sigma_2^{(k)} + \dots \end{aligned} \quad (7)$$

Уравнение типа Бернулли-Эйлера

Рассмотри случай, когда $\alpha = 0$. Этот случай соответствует балке-полосе, состоящей из двух изотропных слоев с разными, но близкими упругими свойствами.

Асимптотическое интегрирование уравнение (4) с условиями (5) и б), приводит к последовательности уравнений, относительно неизвестных функций, входящих в разложения (7). Ограничиваясь лишь главным приближением, приходим к уравнению

$$I_r \frac{\partial^4 w_0}{\partial x^4} + J_r \frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2} = F_r(x, t), \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} I_r &= \frac{(c_0^{(1)} \kappa_1^2 + \varepsilon_{21} c_0^{(2)} \kappa_2^2)^2 + 4\varepsilon_{21} c_0^{(1)} c_0^{(2)} \kappa_1 \kappa_2 (\kappa_1 + \kappa_2^2)}{12(c_0^{(1)} \kappa_1 + \varepsilon_{21} c_0^{(2)} \kappa_2)}, & J_r &= c_\omega^{(1)} \kappa_1 + \varepsilon_{21} c_\omega^{(2)} \kappa_2, \\ F_r &= -q^{(1)}(x, t) + \int_0^1 f_2^{(1)}(x, z, t) dz + \varepsilon_{21} \left[q^{(2)}(x, t) + \int_0^1 f_2^{(2)}(x, z, t) dz \right], \\ c_0^{(k)} &= \frac{4\mu_k (\lambda_k + \mu_k)}{E_k (\lambda_k + 2\mu_k)}, & c_\omega^{(k)} &= \frac{h^2 \rho_k}{\varepsilon^4 E_k}, & \kappa_k &= \frac{h_k}{h}, \end{aligned} \quad (9)$$

E_k – модуль Юнга k -ого слоя, а F_r – внешняя нагрузка, приведенная к интерфейсной линии [5].

Уравнение (9) описывает изгибные колебания интерфейсной линии двухслойной балки-полосы и соответствует модели, основанной на гипотезах Бернулли-Эйлера. Данное уравнение не учитывает сдвиги в слоях.

Уравнение типа Уфлянда-Миндлина

Пусть $\alpha = 2$. Данный случай соответствует балке-полосе с высококонтрастными механическими свойствами составляющих слоев. В дан-

ном случае поэтапное интегрирование уравнений (4) с учетом граничных и интерфейсных условий (5) - (6) приводит к последовательности дифференциальных уравнений относительно неизвестных функций, фигурирующих в разложении (7). В частности, рассмотрение первых двух приближений, дает дифференциальное уравнение типа Уфлянда-Миндлина [6]:

$$I_{12} \frac{\partial^4 w^0}{\partial x^4} + J_{12} \frac{\partial^2 w^0}{\partial t^2} = F_{12}(x, t). \quad (10)$$

Здесь w^0 – безразмерное нормальное перемещение интерфейсной линии,

$$I_{12} = \frac{1}{12} (c_0^{(1)} \kappa_1^3 + \varepsilon^2 \nu c_0^{(2)} \kappa_2^3),$$

$$J_{12} = \eta_1 + \varepsilon^2 \left[\nu \eta_2 - \eta_1 \kappa_1^2 \left(\frac{1}{5} + \frac{(1+\nu_1)}{12(1-\nu_1)} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right], \quad \eta_k = \frac{\rho_k h_k h}{g^4 E_k}, \quad (11)$$

F_{12} – внешние объемные и поверхностные силы, приведенные к интерфейсной поверхности, а ν_1 - коэффициент Пуассона жесткого слоя.

В отличие от (8), уравнение (10) учитывает сдвиги, возникающие в жестком слое. Слагаемые, содержащие параметр ν (см. [2]) учитывают контрастность упругих свойств материалов. Заметим, что полагая $h_2 = 0$, мы приходим к уравнению типа Уфлянда-Миндлина, полученного для изотропной пластинки с корректирующим коэффициентом на сдвиг, равным $\frac{5}{6-\nu_1}$.

Заключение

В предположении малости отношения модулей мягкого и жесткого изотропных слоев для двухслойной балки-полосы, предложена асимптотическая процедура интегрирования по толщине полосы двухмерных уравнений теории упругости. Предложенный метод позволяет построить иерархические модели для двухслойной балки-полосы с контрастными свойствами. В частности, рассматривая только главное приближение, можно получить уравнение типа Бернулли-Эйлера, справедливое при любом соотношении упругих характеристик слоев. Построение первых двух приближений с учетом высокой контрастности упругих свойств слоев, приводит к уравнению, соответствующему модели Уфлянда-Миндлина. Во второй модели сдвиговые эффекты учитываются только в

более жестком слое, а для учета этого эффекта в более мягком слое необходимо рассмотреть приближение третьего порядка.

Библиографические ссылки

1. *Mikhasev G.* Equivalent single layer model for thin laminated cylindrical shells/G. Mikhasev, H. Altenbach // In: Thin-walled Laminated Structures, Advanced Structured Materials, vol 106. – Cham: Springer, 2019. - pp 29–84.

2. *Reddy J.* Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells: Theory and Analysis, 2nd edn. - Boca Raton: CRC Press. 2004.

3. *Tovstik P.* On the 2d models of plates and shells including the transversal shear / P. Tovstik, T. Tovstik // Z Angew Math Mech. – 2007. –V. 87. - 160–171.

4. *Mikhasev G.* On governing equations for a nanoplate derived from the 3d gradient theory of elasticity/G. Mikhasev//Mathematics and Mechanics of Solids. -2022. V. 27(9). - 1688– 1702.

5. *Mikhasev G.* Asymptotically Correct Analytical Model for Flexural Response of a Two-Layer Strip with Contrast Elastic Constants / G. Mikhasev, N. Le // In: Altenbach, H., Berezovski, A., dell'Isola, F., Porubov, A. (eds) Sixty Shades of Generalized Continua. Advanced Structured Materials, vol 170. -2023.-Cham: Springer. - 497-519.

6. *Mindlin R.* Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic elastic plates / R. Mindlin// Trans ASME J Appl Mech. -1951. – V. 18. - 31–38.