УДК 330.4

А. Ф. Проневич[1], Г. А. Хацкевич[2]

[1] *Гродненский государственный университет имени Я. Купалы, Гродно, Беларусь, pranevich@grsu.by*

[2] *Институт бизнеса БГУ, Минск, Беларусь, khatskevich@sbmt.by*

ДИНАМИЧЕСКИЕ ТРЕХФАКТОРНЫЕ ПРОИЗВОДСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ И ПОЛНОСТЬЮ НЕЙТРАЛЬНЫЙ ПО ХИКСУ НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ПРОГРЕСС

В работе представлена концепция учета полностью нейтрального по Хиксу научно-технического прогресса в задании динамической трехфакторной производственной функции. Получены аналитические формы динамических трехфакторных производственных функций, учитывающие полностью нейтральный по Хиксу первого (второго, третьего) типа научно-технический прогресс. Установлена связь между продуктоувеличивающим и полностью нейтральным по Хиксу научно-техническим прогрессом. Результаты работы могут быть использованы при моделирования реальных производственных процессов на базе динамических трехфакторных производственных функций.

Ключевые слова: *производственная функция, научно-технический прогресс, динамическая трехфакторная модель, полная нейтральность по Хиксу*

A. Pranevich[1], G. Khatskevich[2]

[1] *Yanka Kupala State University of Grodno, Grodno, Belarus, pranevich@grsu.by*

[2] *School of Business of BSU, Minsk, Belarus, khatskevich@sbmt.by*

DYNAMIC THREE-FACTOR PRODUCTION FUNCTIONS AND COMPLETE HICKS NEUTRAL TECHNOLOGICAL PROGRESS

In this paper, we consider dynamic three-factor production functions and present a concept of complete Hicks neutrality for technological progress. Analytical forms of dynamic three-factor production functions with complete Hicks-neutral technological progress are obtained. A connection between product-augmenting technological progress and complete Hicks-neutral technological progress is established. The obtained results can be applied in modeling of production processes on base dynamic three-factor production functions.

Keywords: *production function, technological progress, dynamic three-factor model, complete Hicks neutrality*

Любая задача моделирования и прогнозирования экономического развития начинается с анализа факторов и структуры производства [1, с. 15]. Среди множества факторов, которые влияют на решающую роль в экономическом росте и развитии, выделяют четыре – капитал K, труд L, природные ресурсы (земля, нефть, газ и др.) N и научно-технический прогресс (НТП) T. Они определяют максимально возможный объем выпуска продукции Y через производственную функцию (ПФ)

$$Y = F(K, L, N, t), \tag{1}$$

где t – параметр времени из числового луча $\mathbf{R}_+ = [0; +\infty)$, каждое значение которого выражает определенный уровень НТП, а неотрицательная функция F является дважды непрерывно дифференцируемой на множестве $D = G \times \mathbf{R}_+$, экономическая область $G \subset \mathbf{R}_+^3 = \{(K, L, N) : K \geq 0, L \geq 0, N \geq 0\}$.

ПФ [1, с. 15] представляет собой доминирующий технологический уклад, а также способ организации производства и описывает функциональную связь между выпуском продукции и затратами основных факторов.

Отметим, что значимость использования динамических трехфакторных ПФ (1) в экономическом анализе впервые была теоретически обоснована в монографии английского экономиста Д. Э. Мида [2]. В настоящее время, модели экономического роста с трехфакторными ПФ применяются для изучения «голландской болезни» и «ресурсного проклятия» (см., например, [3]).

В данной работе авторами получены аналитические представления ПФ, которые учитывают полностью нейтральный по Хиксу НТП. Статья продолжает исследования авторов [4–8] по изучению классификаций нейтральности НТП в зависимости от соотношений между экономическими характеристиками.

Будем говорить, что НТП является *полностью нейтральным по Хиксу первого* (второго; третьего) *типа*, если для динамической трехфакторной ПФ (1), учитывающей этот НТП, выполняется система тождеств

$$\partial_K\left(\ln F(K,L,N,t)\right)=\varphi(K,L,N), \quad \partial_L\left(\ln F(K,L,N,t)\right)=\psi(K,L,N), \tag{2}$$

$$\left(\partial_K\left(\ln F(K,L,N,t)\right)=\varphi(K,L,N), \quad \partial_N\left(\ln F(K,L,N,t)\right)=\rho(K,L,N);\right. \tag{3}$$

$$\left.\partial_L\left(\ln F(K,L,N,t)\right)=\psi(K,L,N), \quad \partial_N\left(\ln F(K,L,N,t)\right)=\rho(K,L,N)\right), \tag{4}$$

где φ, ψ и ρ – некоторые непрерывно дифференцируемые на экономической области G функции, которые не зависят от параметра НТП t. Если НТП является одновременно полностью нейтральным по Хиксу первого, второго и третьего типов, то НТП является *полностью нейтральным по Хиксу* [9].

Основные результаты работы выражают следующие две закономерности.

Утверждение 1 (аналитический вид ПФ, учитывающих полностью нейтральный по Хиксу первого, второго и третьего типов НТП). *Динамическая трехфакторная ПФ* (1) *учитывает НТП*:

1) *полностью нейтральный по Хиксу тогда и только тогда*, *когда ее можно представить в аналитическом вида* [9]

$$F(K,L,N,t)=A(t)\cdot\Lambda(K,L,N); \tag{5}$$

2) *полностью нейтральный по Хиксу первого типа тогда и только тогда*, *когда ее можно представить в аналитическом виде*

$$F(K,L,N,t)=A(N,t)\cdot\Lambda(K,L,N); \tag{6}$$

3) *полностью нейтральный по Хиксу второго типа*, *если и только если ее можно представить в следующей аналитической форме*

$$F(K,L,N,t)=A(L,t)\cdot\Lambda(K,L,N);$$

4) *полностью нейтральный по Хиксу третьего типа в том и только в том случае*, *когда ее можно представить в аналитической форме*

$$F(K,L,N,t)=A(K,t)\cdot\Lambda(K,L,N),$$

где A и Λ – некоторые неотрицательные непрерывно дифференцируемые функции.

Доказательство 1). *Необходимость*. Пусть ПФ (1) учитывает полностью нейтральный по Хиксу НТП. Тогда, на основании тождеств (2) – (4), заключаем, что выполняется система тождеств

$$\partial_K \left(\ln F(K,L,N,t)\right) = \varphi(K,L,N), \quad \partial_L \left(\ln F(K,L,N,t)\right) = \psi(K,L,N), \tag{7}$$
$$\partial_N \left(\ln F(K,L,N,t)\right) = \rho(K,L,N).$$

Из первого уравнения системы в частных производных первого порядка (7) находим, что

$$\ln F(K,L,N,t) = \int \varphi(K,L,N)\, dK + C_1(L,N,t), \tag{8}$$

где C_1 – произвольная непрерывно дифференцируемая функция.

Подставляя выражение (8) во второе уравнение системы в частных производных (7) и используя правило Лейбница дифференцирования по параметру под знаком интеграла (см., например, [10, с. 141 – 143])

$$\int \partial_L \varphi(K,L,N)\, dK + \partial_L C_1(L,N,t) = \psi(K,L,N).$$

Отсюда следует, что функция $\partial_L C_1(L,N,t)$ не зависит от параметра НТП t, а является функцией только от двух переменных L и N, т. е.

$$\partial_L C_1(L,N,t) = \tilde{C}_1(L,N),$$

а значит, функция

$$C_1(L,N,t) = \int \tilde{C}_1(L,N)\, dL + C_2(N,t)$$

и функция (8) примет вид

$$\ln F(K,L,N,t) = \int \varphi(K,L,N)\, dK + \int \tilde{C}_1(L,N)\, dL + C_2(N,t). \tag{9}$$

Подставляя выражение (9) в третье уравнение системы в частных производных (7) имеем

$$\int \partial_N \varphi(K,L,N)\, dK + \int \partial_N \tilde{C}_1(L,N)\, dL + \partial_N C_2(N,t) = \rho(K,L,N).$$

Аналогично, из последнего тождества, заключаем, что функция $\partial_N C_2(N,t)$ не зависит от параметра НТП t, а является функцией только от одной переменной N, т. е. $\partial_N C_2(N,t) = \tilde{C}_2(N)$, а значит, $C_2(N,t) = \int \tilde{C}_2(N)\, dN + \tilde{A}(t)$.

Следовательно, функция

$$F = \exp\left(\int \varphi(K,L,N)\, dK + \int \tilde{C}_1(L,N)\, dL + \int \tilde{C}_2(N)\, dN + \tilde{A}(t)\right) = A(t)\Lambda(K,L,N),$$

где приняты следующие обозначения

$$A(t) = \exp \tilde{A}(t), \;\; \Lambda(K,L,N) = \exp\left(\int \varphi(K,L,N)\, dK + \int \tilde{C}_1(L,N)\, dL + \int \tilde{C}_2(N)\, dN\right).$$

Таким образом, для динамической ПФ (1) имеет место представление (5).

Достаточность. Пусть для ПФ (1) имеет аналитическое представление (5). Тогда темпы прироста по капиталу, труду и природным ресурсам

$$\partial_K \ln F = \frac{\partial_K F}{F} = \frac{\partial_K \left(A(t)\Lambda(K,L,N)\right)}{A(t)\Lambda(K,L,N)} = \frac{\partial_K \Lambda(K,L,N)}{\Lambda(K,L,N)} = \partial_K \ln \Lambda(K,L,N),$$
$$\partial_L \ln F = \frac{\partial_L F}{F} = \frac{\partial_L \left(A(t)\Lambda(K,L,N)\right)}{A(t)\Lambda(K,L,N)} = \frac{\partial_L \Lambda(K,L,N)}{\Lambda(K,L,N)} = \partial_L \ln \Lambda(K,L,N),$$

$$\partial_N \ln F = \frac{\partial_N F}{F} = \frac{\partial_N \left(A(t)\Lambda(K,L,N)\right)}{A(t)\Lambda(K,L,N)} = \frac{\partial_N \Lambda(K,L,N)}{\Lambda(K,L,N)} = \partial_N \ln \Lambda(K,L,N),$$

а значит, верны тождества (7) при условии, что $\varphi(K,L,N) = \partial_K \ln \Lambda(K,L,N)$, $\psi(K,L,N) = \partial_L \ln \Lambda(K,L,N)$, $\rho(K,L,N) = \partial_N \ln \Lambda(K,L,N)$, и динамическая трехфакторная ПФ (1) учитывает НТП, полностью нейтральный по Хиксу. □

Доказательство 2). *Необходимость* следует из тождества (9). В этом случае

$$F(K,L,N,t) = \exp\left(\int \varphi(K,L,N)\,dK + \int \tilde{C}_1(L,N)\,dL + C_2(N,t)\right) = A(N,t)\Lambda(K,L,N),$$

что соответствует представлению (6), где положено $A(N,t) = \exp C_2(N,t)$ и

$$\Lambda(K,L,N) = \exp\left(\int \varphi(K,L,N)\,dK + \int \tilde{C}_1(L,N)\,dL\right).$$

Достаточность. Пусть для ПФ (1) имеет аналитическое представление (6). Тогда темпы прироста по капиталу и труду

$$\partial_K \ln F = \frac{\partial_K F}{F} = \frac{\partial_K \left(A(N,t)\Lambda(K,L,N)\right)}{A(N,t)\Lambda(K,L,N)} = \frac{\partial_K \Lambda(K,L,N)}{\Lambda(K,L,N)} = \partial_K \ln \Lambda(K,L,N),$$
$$\partial_L \ln F = \frac{\partial_L F}{F} = \frac{\partial_L \left(A(N,t)\Lambda(K,L,N)\right)}{A(N,t)\Lambda(K,L,N)} = \frac{\partial_L \Lambda(K,L,N)}{\Lambda(K,L,N)} = \partial_L \ln \Lambda(K,L,N),$$

а значит, верны тождества (2) при условии, что $\varphi(K,L,N) = \partial_K \ln \Lambda(K,L,N)$, $\psi(K,L,N) = \partial_L \ln \Lambda(K,L,N)$, и динамическая трехфакторная ПФ (1) учитывает НТП, полностью нейтральный по Хиксу первого типа. □

Замечания:

1. В работе [9] закономерность 1) утверждения 1 сформулировано и доказано для более общего случая – многофакторных динамических ПФ. В данной работе нами предложено иное доказательство.

2. Так как функция F является дважды непрерывно дифференцируемой на множестве $D = G \times \mathbf{R}_+$, то функции φ, ψ и ρ удовлетворяют тождествам

$$\begin{aligned}
&\partial_L \varphi(K,L,N) = \partial_K \psi(K,L,N), \quad \partial_N \varphi(K,L,N) = \partial_K \rho(K,L,N),\\
&\partial_K \psi(K,L,N) = \partial_L \varphi(K,L,N), \quad \partial_N \psi(K,L,N) = \partial_L \rho(K,L,N),\\
&\partial_K \rho(K,L,N) = \partial_N \varphi(K,L,N), \quad \partial_L \rho(K,L,N) = \partial_N \psi(K,L,N).
\end{aligned} \tag{10}$$

Система тождеств (10) выражает условия интегрируемости [11, с. 59–60] системы в частных производных (7) для неизвестной функции $\ln F(K, L, N, t)$.

3. Доказательство закономерностей 3) и 4) утверждения 1 аналогично доказательству утверждений 1) и 2), с учетом формул (3) и (4).

На основании Утверждения 1 и понятия «*продуктоувеличивающий НТП*» (см, например, [12, с. 224; 13, с. 83]) получаем следующую закономерность.

Утверждение 2. *НТП является полностью нейтральным по Хиксу в том и только в том случае*, *когда он является продуктоувеличивающим*.

Следовательно, понятия «продуктоувеличивающий НТП» и «полностью нейтральный по Хиксу НТП» равносильны и их можно использовать на равных правах (как синонимы).

В статье для динамических трехфакторных ПФ представлена концепция полной нейтральности НТП по Хиксу. Описаны множества (Утверждение 1) динамических трехфакторных ПФ, учитывающих полностью нейтральный НТП по Хиксу первого (второго, третьего) типа. Установлена связь (Утверждение 2) между полностью нейтральным по Хиксу НТП и продуктоувеличивающим НТП. Полученные в данной работе результаты могут быть использованы при моделирования реальных производственных процессов на основе динамических моделей трехфакторных ПФ.

Список использованных источников

1. *Акаев*, *А. А.* От эпохи Великой дивергенции к эпохе Великой конвергенции / А. А. Акаев. – М. : ЛЕНАНД, 2019. – 352 с.

2. *Meade*, *J. E.* A new-classical theory of economic growth / J. E. Meade. – New York : Oxford University Press, 1961. – 147 p.

3. *Полтерович*, *В. М.* Экономическая политика, качество институтов и механизмы «ресурсного проклятия» / В. М. Полтерович, В. В. Попов, А. С. Тонис // Вопросы экономики. – 2007. – № 6. – С. 4–27.

4. *Проневич*, *А. Ф.* Научно-технический прогресс и нейтральность по Хиксу, Харроду и Солоу: генезис, построение и обобщение / А. Ф. Проневич, Г. А. Хацкевич // Белорус. экон. журн. – 2020. – № 3. – С. 87–105.

5. *Хацкевич*, *Г. А.* Классификация Сато – Беккмана учета научно-технического прогресса: генезис, обобщение и дополнение / Г. А. Хацкевич, А. Ф. Проневич // Журн. Белорус. гос. ун-та. Экономика. – 2020. – № 2. – С. 4–16.

6. *Проневич*, *А. Ф.* Автономный экзогенный научно-технический прогресс и нейтральность по Хиксу, Харроду и Солоу / А. Ф. Проневич, Г. А. Хацкевич // Вестн. Ин-та экономики НАН Беларуси. – 2021. – Вып. 2. – С. 105–120.

7. *Проневич*, *А. Ф.* Динамические производственные функции для моделирования производственных процессов, учитывающих одновременно нейтральный по Хиксу и Харроду научно-технический прогресс / А. Ф. Проневич, Г. А. Хацкевич // Вестн. Ин-та экономики НАН Беларуси. – 2022. – Вып. 4. – С. 9–27.

8. *Проневич*, *А. Ф.* Динамические трехфакторные производственные функции, учитывающие нейтральный по Харроду научно-технический прогресс / А. Ф. Проневич, Г. А. Хацкевич // Бизнес. Инновации. Экономика : сб. науч. ст. / Ин-т бизнеса БГУ. – Минск, 2022. – Вып. 6. – С. 253–263.

9. *Blackorby*, *Ch.* Extended Hicks neutral technical change / Ch. Blackorby, C. A. K. Lovell, M. C. Thursby // The Economic Journal. – 1976. – Vol. 35, № 344. – P. 845–852.

10. *Фихтенгольц*, *Г. М.* Основы математического анализа : в 2 т. / Г. М. Фихтенгольц. – СПб. : Лань, 2001. – Т. 1. – 448 с.

11. *Камке*, *Э.* Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка / Э. Камке. – М. : Наука, 1966. – 260 с.

12. *Черемных*, *Ю. Н.* Микроэкономика. Продвинутый уровень / Ю. Н. Черемных. – М. : ИНФРА-М, 2008. – 844 с.

13. *Иванилов*, *Ю. П.* Математические модели в экономике / Ю. П. Иванилов, А. В. Лотов. – М. : ФИЗМАЛИТ, 1979. – 304 с.