$$F(z) = C(\rho) - \cos z + \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\tau|=\rho} \frac{\varphi(\tau)}{2} \operatorname{ctg} \frac{\tau - z}{2} d\tau =$$

$$= C(\rho) - \cos z + \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|t|=\rho} \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j \left(\frac{t^{2j}}{\rho^{2j}} - \frac{\rho^{2j}}{t^{2j}} \right) \operatorname{ctg} \frac{t - z}{2} dt =$$

$$= C(\rho) - \cos z - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \rho^{2j} \varphi_j \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|t|=\rho} \frac{1}{t^{2j}} \operatorname{ctg} \frac{t - z}{2} dt =$$

$$= C(\rho) - \cos z - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\rho^{2j} \varphi_j}{2^{2j-1}\,(2j-1)!} \operatorname{ctg}^{(2j-1)} \left(-\frac{z}{2} \right) =$$

$$= C(\rho) - \cos z - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varphi_j}{(2j-1)!} \left(\frac{\varphi}{2} \right)^{2j} \operatorname{ctg}^{(2j-1} \left(\frac{z}{2} \right).$$

Постоянная $C(\rho)$ находится из условия нормировки

$$C(\rho) = \cos(i\rho) + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varphi_j}{(2j-1)!} \left(\frac{\rho}{2} \right)^{2j} \operatorname{ctg}^{(2j-1)} \left(\frac{i\rho}{2} \right).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. З в е р о в и ч Э. И.— Сибир. матем. ж., 1973, т. 14, № 1, с. 64.
2. К о п п е н ф е л ь с В., Ш т а л ь м а н Ф. Практика конформных отображений.— М., 1963.
3. К в е с е л а в а Д. А.— Труды Тбил. матем. ин-та АН ГрузССР, 1948, т. 16, с. 39.
4. К а н т о р о в и ч Л. В., К р ы л о в В. И. Приближенные методы высшего анализа.— М.— Л., 1962.

Кафедра теории функций

УДК 517.966

Р. ГАБАСОВ

ВОПРОСЫ КОНСТРУКТИВНОЙ ТЕОРИИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

1. Двадцать пять лет тому назад с принципа максимума Л. С. Понтрягина [1] — фундаментального результата прикладной математики началась математическая теория оптимальных процессов. Задачи оптимального управления возникли в современной технике, экономике, военном деле и других сферах человеческой деятельности, где успех, существенное развитие связаны с исключительными затратами, с использованием предельных возможностей. Практическая значимость результатов была и остается главной причиной большого интереса к новому разделу математики и бурного развития теории оптимального управления в течение последней четверти века. Принцип максимума наряду с динамическим программированием Р. Беллмана [2] резко увеличил интенсивность исследований по экстремальным задачам.

Успехи теории оптимального управления обыкновенными динамическими системами стимулировали исследования по оптимизации систем с последействием [3], стохастических систем [4] и систем с распределенными параметрами [5]. В последнее десятилетие много внимания уделялось теории дифференциальных игр [6, 7], которая явилась развитием теории оптимального управления одним участником на случай, когда в процессе управления принимают участие игроки с несовпадающими интересами.

Достигнутый к настоящему времени уровень теоретических разработок позволяет для любой прикладной задачи сформулировать полный набор необходимых условий оптимальности [8].

Необходимые условия оптимальности позволяют в ряде случаев получить такие качественные характеристики решения, которые в совокупности с известными свойствами конкретных систем достаточны для построения полного решения. В приложениях широко используется и второй путь, когда, исходя из необходимых условий оптимальности, строятся алгоритмы вычисления оптимальных управлений. Для относительно простых задач с хорошо изученной динамикой объектов оптимизации указанные и другие аналогические им способы являются эффективными. Однако давно было замечено, что по мере усложнения задач достижимая степень качественного исследования уже не достаточна для построения эффективных алгоритмов. Впервые это обстоятельство четко проявилось в задачах оптимального управления с фазовыми ограничениями. Затем с подобными трудностями столкнулись в стохастическом и адаптивном управлении, в управлении системами с распределенными параметрами. Особенно сильно разрыв между качественными результатами и возможностью их конструктивных приложений ощущается в теории дифференциальных игр.

2. Следует отметить, что в теории оптимизации еще за десять лет до появления принципа максимума был создан и уже в течение тридцати пяти лет развивается раздел, полностью основанный на конструктивном подходе. Речь идет о линейном программировании (ЛП). Элементы ЛП появились в тридцатые годы в работах Л. В. Канторовича, но как мощное оружие прикладной математики ЛП оформилось в 40—50-е годы после создания Дж. Данцигом симплекс-метода [9]. С появлением теории оптимальных процессов как-то смялся интерес к ЛП. Казалось, что этот элементарный раздел теории оптимизации достиг своего предела развития. Из ЛП выросли сначала выпуклое программирование, затем нелинейное программирование (НП) многочисленными разделами, носящие в своих названиях слово «программирование», которое в комбинации с другими словами отражает специфику раздела. Удивительным было то, что в течение длительного времени две ветви теории оптимизации (НП и теория оптимального управления) развивались совершенно независимо, различными путями, выделяя разные стороны проблемы оптимизации. В НП основные усилия направлялись на создание эффективных алгоритмов, в оптимальном управлении — на совершенствование аналитических методов и результатов. Однако в последние годы как в оптимальном управлении, так и в НП явно усилились тенденции к взаимному сближению. В оптимальном управлении это проявилось в повышении интереса к применению вычислительных методов НП для расчета оптимальных управлений, в НП — в переходе к исследованию больших задач, среди которых особое внимание стали привлекать динамические задачи. Можно надеяться, что обе тенденции в недалеком будущем приведут к созданию единой теории оптимизации, состоящей из тонких качественных и эффективных конструктивных методов.

Каждый, кто собирается заняться конструктивными методами оптимального управления нелинейными системами, довольно быстро путем несложных рассуждений приходит к мысли о необходимости изучения и анализа методов решения задач ЛП. Действительно, любой эффективный алгоритм построения оптимального управления в нелинейной задаче должен быть достаточно эффективным и в линейной задаче, ибо среди прикладных нелинейных задач очень много слабонелинейных, для которых эффект линейности еще очень заметен. По аналогичным причинам принципы, заложенные в алгоритмы оптимизации динамических систем, должны быть эффективными и для статических задач.

Рассмотрим общую линейную статическую задачу оптимизации

$$c'x \to \max, \quad b_* \leqslant Ax \leqslant b^*, \quad d_* \leqslant x \leqslant d^*, \tag{1}$$

где A — $m \times n$-матрица. Различные частные случаи задачи (1) исследовались многими учеными. Современная теория линейного программирования имеет ряд законченных аналитических результатов и эффективных всесторонне испытанных численных алгоритмов. Среди последних особое место занимает симплекс-метод, основной вариант которого разработан для канонической задачи.

$$c'x \to \max, \quad Ax=b, \quad x \geqslant 0. \qquad (2)$$

Именно он в различных версиях широко представлен в математическом обеспечении современных ЭВМ. Поэтому анализ классических конструктивных методов с целью их обобщения и использования в оптимальном управлении естественно начать с симплекс-метода.

Основные достоинства симплекс-метода: 1) он точный и прямой, т. е. в процессе его работы все ограничения задачи постоянно выполняются; 2) он релаксационный, т. е. в нем от итерации к итерации значение целевой функции увеличивается; 3) он конечен, т. е. решение задачи получается с помощью конечного числа итераций на ЭВМ. Перечисленные свойства позволяют в любой момент процесса решения задачи иметь план, который лучше начального. К недостаткам симплекс-метода можно отнести следующее: 1) он начинает работу только со специального (базисного) плана, начальная информация в практической задаче не обязательно имеет плоский вид; 2) на каждой итерации базисный план преобразуется в базисный, что представляет ограничение на принцип преобразования информации, не вызванное существом задачи; в алгоритме нет критерия останова после построения ε-оптимального плана.

В основу нового метода решения линейных задач [10], в котором почти полностью сохранены и в значительной мере преодолены отмеченные недостатки, положена задача (1). Выбор модели (1) вместо (2) позволяет более точно учесть особенности конкретных прикладных задач и согласовать их с априорной информацией о планах. В новом методе учтена возможность использования любой информации, отражающей опыт функционирования реальных систем, догадки и интуицию специалистов и т. п. Чем ценнее эта информация, тем меньше затрат на ее алгоритмическое преобразование с целью получения ε-оптимальных планов. Симплекс-алгоритм на геометрическом языке является реализацией принципа направленного перемещения по вершинам множества планов. Алгоритм нового метода основан на принципе уменьшения оценки субоптимальности. Этот принцип непосредственно связан с расширенной целью задачи (1), под которой понимается не вычисление оптимального плана x^0, а построение для заданного $\varepsilon \geqslant 0$ субоптимального плана $x^\varepsilon (c'x^0 - c'x^\varepsilon \leqslant \varepsilon)$. При этом не накладывается других условий на способ преобразования информации.

Численные эксперименты на ЭВМ показали эффективность нового метода. Сейчас разработаны различные его модификации, обладающие рядом преимуществ перед основным вариантом.

Симплекс-метод — основной метод, но им не исчерпывается арсенал методов ЛП. Работа в этой области продолжается и по сей день. Исследования особенно интенсифицировались в связи с необходимостью решения больших задач специальной структуры, среди которых стали выделять динамические задачи. В ответ на это в теории оптимизации наряду с анализом ранее известных методов стали разрабатываться новые, среди которых в последние годы особое внимание уделялось приближенным методам и, в частности, методам с модифицированной функцией Лагранжа.

В линейном и нелинейном программировании наступает этап распространения и обобщения испытанных алгоритмов решения статических задач на динамические задачи. Таким образом осуществляется постепенная состыковка указанных методов с конструктивной теорией оптимального управления.

3. Под конструктивной теорией оптимального управления понимается та часть общей теории оптимальных процессов, в которой в основу изучения оптимальных управлений положены алгоритмы их численного построения. При этом те или иные аналитические характеристики оптимальных управлений, описание которых является основной целью качественной теории, получаются попутно как свойства конкретного алгоритма. Элементы конструктивной теории возникли вместе с принципом максимума. В дальнейшем они дополнялись и развивались в разных направ-

лениях. Однако до сих пор нельзя с уверенностью сказать, что основы конструктивной теории оптимального управления созданы, что в ней уже открыт свой «принцип максимума». Бросается в глаза оснащенность ЛП добротными вычислительными алгоритмами, с одной стороны, и скудность оптимального управления в области эффективных (устойчивых и испытанных) алгоритмов — с другой.

В конструктивной теории оптимального управления целесообразно различать 1) алгоритмы оптимизации в специальных классах функций, выбранных из соображений удобства технической реализации или с целью понижения сложности экстремальной задачи, 2) алгоритмы оптимизации в общих классах функций, типичных для качественной теории оптимального управления. Алгоритмы первой группы очень близки к алгоритмам нелинейного программирования и являются модификациями последних, в которых учтены «динамические» особенности новых моделей. Они с позиций нового подхода, упомянутого в п. 2, разработаны в [10]. В данном пункте излагаются первые результаты по второй группе алгоритмов, полученные С. В. Гневко, Ф. М. Кирилловой и автором.

Рассмотрим линейную задачу оптимального управления

$$I(u) = c'x(t_1) \to \max, \quad \dot{x} = Ax + bu, \quad x(0) = x_0, \tag{3}$$

$$f_* \leqslant u(t) \leqslant f^*, \quad t \in T = [0, t_1], \quad Hx(t_1) = g,$$

где x — n-вектор состояния динамической системы; u — скаляр (управление).

Допустимыми управлением и траекторией будем называть кусочно-непрерывную функцию $u(t)$, $t \in T$, и соответствующее ей решение $x(t)$, $t \in T$, системы (3), вдоль которых выполняются все ограничения (3).

Решение $u^0(t)$, $t \in T$, задачи (3) называется оптимальным управлением: $I(u^0) = \max I(u)$. Оптимальному управлению соответствует оптимальная траектория $x^0(t)$, $t \in T$.

Допустимое управление $u^\varepsilon(t)$, $t \in T$, называется ε-оптимальным (субоптимальным), если $I(u^0) - I(u^\varepsilon) \leqslant \varepsilon$. В конструктивной теории является построение именно ε-оптимального, а не оптимального управления как в качественной теории основной целью. Заметим, что ε — оптимальные управления ($\varepsilon > 0$) в отличие от оптимальных существуют в каждой задаче и фактически удовлетворяют потребностям всех приложений.

Следуя одному из принципов конструктивной теории, будем считать, что наряду с моделью (3) известна некоторая априорная информация о решении задачи (3). Для определенности из всех типов априорной информации рассмотрим один, когда известно некоторое допустимое управление $u(t)$, $t \in T$. Цель алгоритма — преобразовать эту информацию и получить ε-оптимальное управление.

Далее описывается только прямой точный релаксационный алгоритм, в котором на всех итерациях допустимые управления прямой задачи (3) преобразуются опять в допустимые управления и значение критерия качества при этом не убывает.

Для соблюдения ограничений в алгоритме используется опора, под которой понимается каждая совокупность $T_{оп} = \{T_j,\ j = \overline{1, m}\}$ непересекающихся отрезков $T_j = [\tau_j, \tau_j] \subset T$, таких, что невырождены импульсная опорная $A_{оп} = \{a(\tau_j),\ j = \overline{1, m}\}$, $a(t) = H\Phi(t_1)\Phi^{-1}(t)b$, $\Phi = A\Phi$, $\Phi(0) = E$, $\tau_j = \tau_j \vee \tau_j = \bar{\tau}_j$. и опорная $A(T_{оп}) = \{\int_{T_j} a(t)\,dt,\ j = 1, m\}$ матрицы.

Выбор начальной опоры — специальный вопрос, который здесь не обсуждается.

Пару $\{u(\cdot), T_{оп}\}$ из допустимого управления и опоры назовем опорным управлением.

Пусть $\{u(\cdot), T_{оп}\}$ — начальное опорное управление. Первая задача каждого алгоритма: проверить начальную информацию на субоптимальность. В предлагаемом алгоритме это осуществляется с помощью кри-

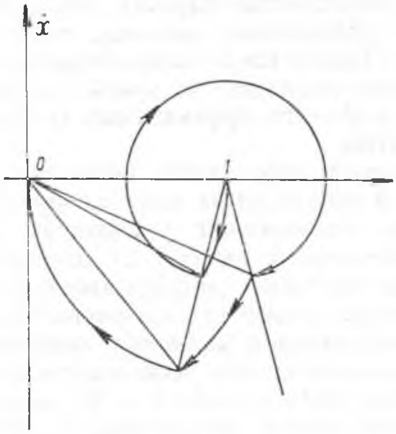

Рис. 1

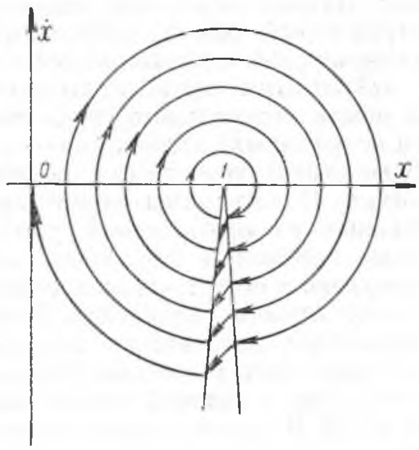

Рис. 2

терия субоптимальности: для ε-оптимальности допустимого управления $u(t)$, $t \in T$, необходимо и достаточно существование таких опоры $T_{\text{оп}}$ и кусочно-непрерывной функции $\varepsilon(t) \geqslant 0$, $t \in T$, что выполняется принцип ε-максимума

$$\mathscr{H}(x(t), \psi(t), u(t)) = \max_{f_* \leqslant u \leqslant f^*} \mathscr{H}(x(t), \psi(t), u) - \varepsilon(t), \quad t \in T, \quad \int_T \varepsilon(t)dt \leqslant \varepsilon. \quad (4)$$

Здесь $\mathscr{H}(x, \psi, u) = \psi'(Ax + bu)$; $x(t)$, $\psi(t)$, $t \in T$, траектории системы (3) и сопряженной системы $\dot{\psi} = -A'\psi$, $\psi(t_1) = c - H'\nu$, $\nu' = c'_{\text{оп}} A^{-1}_{\text{оп}}$, $c_{\text{оп}} = \{c(\overline{\tau}_j), j = \overline{1, m}\}$. $c(t) = c' \Phi(t_1(\Phi^{-1}(t) \cdot b$

Если на опорном управлении $\{u(\cdot), T_{\text{оп}}\}$ выполняются состношения (4), то процесс решения задачи (3) прекращается на ε-оптимальном управлении $u(t)$, $t \in T$. В противном случае задача алгоритма состоит в построении нового опорного управления $\{\bar{u}(\cdot), \bar{T}_{\text{оп}}\}$, $I(\bar{u}) \geqslant I(u)$.

За недостатком места здесь не приводится описание алгоритма. Его работа иллюстрируется на следующем примере:

$$\int_0^{t_1} u(t)\,dt \to \max, \quad \ddot{x} + x = u, \quad x(0) = 1, \ \dot{x}(0) = 0, \quad 0 \leqslant u(t) \leqslant 1, \quad t \in [0, \ t_1[,$$

$$x(t_1) = \dot{x}(t_1) = 0.$$

Эта задача тесно связана с задачей об успокоении маятника с минимальным расходом топлива:

$$\int_0^{t_1} u(t)\,dt \to \min, \quad \ddot{x} + x = u, \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = 0, \ 0 \leqslant u(t) \leqslant 1, \ t \in [0, \ t_1],$$

$$x(t_1) = \dot{x}(t_1) = 0. \quad (5)$$

Пусть $t_1 = 2\pi$. В качестве начального приближения возьмем следующее допустимое управление: $u_0(t) = 0$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \vee \left[\frac{2\pi}{3}, 2\pi\right]$, $u_0(t) = 1$, $t \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$, Начальные опорные моменты $\tau_2^{(0)} = \frac{\pi}{3}$, $\tau_2^{(0)} = \frac{2\pi}{3}$, опорные отрезки $T_1^0 = \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$, $T_2^{(0)} = \left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right]$. Первая итерация приводит к управлению $u_1(t) = 1$, $t \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right) \cup \left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right)$, $u_1(t) = \frac{2}{3}$, $t \in \left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right)$, $u_1(t) = \frac{1}{3}$, $t \in [\pi, 2\pi]$. Новые опорные моменты: $\tau_1^{(1)} = \frac{4\pi}{4}$, $\tau_2^{(1)} = \frac{5\pi}{3}$, опорные отрезки: $T_1^{(1)} = \left[\pi, \frac{4\pi}{3}\right]$, $T_2^{(1)} = \left[\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right]$. Следующая итерация приводит к оптимальному управлению $u^0(t) = 1$, $t \in \left[0, \frac{4\pi}{3}\right) \cup \left[\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right]$, $u^0(t) = 0$, $t \in \left[\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right)$.

Значительно сложнее оптимальное управление для $t_1 = 4\pi$:

$$u^0(t) = 1,\ t \in \left[0,\ \pi + \arcsin\frac{\sqrt{15}}{4}\right) \cup \left[2\pi - \arcsin\frac{\sqrt{15}}{4},\right.$$

$$\left.3\pi + \arcsin\frac{\sqrt{15}}{4}\right) \cup \left[4\pi - \arcsin\frac{\sqrt{15}}{4},\ 4\pi\right],\ u^0(t) = 0,$$

$$t \in \left[\pi + \arcsin\frac{\sqrt{15}}{4},\ 2\pi - \arcsin\frac{\sqrt{15}}{4}\right) \cup \left[3\pi + \arcsin\frac{\sqrt{15}}{4},\right.$$

$$\left.4\pi - \arcsin\frac{\sqrt{15}}{4}\right).$$

Оптимальная траектория на фазовой плоскости для этого случая изображена на рис. 1. Следует отметить, что общее время движения с $u = 0$ меньше, чем для случая $t_1 = 2\pi$.

При $t_1 \to \infty$ полное время движения с $u = 0$ уменьшается. Этот факт физически особенно интересен, если его перевести на язык задачи (5).

Качественный вид оптимальных траекторий при больших t_1 приведен на рис. 2. Результаты для больших значений получаются продолжением по параметру t_1 предыдущего решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов.— М., 1961.
2. Беллман Р. Динамическое программирование.— М., 1960.
3. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Принцип максимума в теории оптимального управления.— Минск, 1974.
4. Флеминг У., Ришел Р. Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами.— М., 1978.
5. Лионс Ж. Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными.— М., 1972.
6. Айзекс Р. Дифференциальные игры.— М., 1967.
7. Красовский Н. Н., Субботин А. И. Позиционные дифференциальные игры.— М., 1974.
8. Дубовицкий А. Я., Милютин А. А. Необходимые условия слабого экстремума в общей задаче оптимального управления.— М., 1971.
9. Данциг Дж. Линейное программирование, его приложения и обобщения.— М., 1966.
10. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Методы линейного программирования: Ч. 1—3.— Минск, 1977, 1978, 1980.

Кафедра методов оптимального управления

УДК 519.62

В. В. БОБКОВ

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ С УЛУЧШЕННЫМИ СВОЙСТВАМИ СОГЛАСОВАННОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ И РАЗНОСТНОЙ ЗАДАЧ

При построении методов численного решения задачи Коши для системы уравнений вида

$$u_i' = f_i(t, u_1, u_2, \ldots, u_m),\ i = 1, 2, \ldots, m, \tag{1}$$

обычно наряду с традиционными требованиями аппроксимации стараются удовлетворить также ряд дополнительных требований, порождаемых специфическими особенностями рассматриваемой системы. Например, в случае так называемых жестких систем [1], характеризующихся большим разбросом собственных значений матрицы Якоби, приходится