УДК 519.21

Н. М. ЗУЕВ

ОЦЕНКА КОВАРИАЦИЙ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН, УДОВЛЕТВОРЯЮЩИХ УСЛОВИЮ КРАМЕРА И ПЕРЕМЕШИВАНИЮ «ПО ИБРАГИМОВУ»

Оценки ковариаций случайных величин используются при доказательстве центральной предельной теоремы для зависимых случайных величин [1] и при оценке скорости сходимости в центральной предельной теореме [2].

Определение 1. Величину

$$\beta = \sup_{A \in F_\xi,\ B \in F_\eta} |P(A/B) - P(A)| \tag{1}$$

назовем коэффициентом перемешивания «по Ибрагимову» случайных величин ξ и η, где F_ξ, F_η — σ-алгебры, порожденные соответственно случайными величинами ξ и η.

Соотношение (1) равносильно следующему (см. [1]):

$$\beta = \sup_{A \in F_\xi} [\operatorname{vrai}\sup_{\omega} |P(A/F_\eta) - P(A)|], \tag{2}$$

$\operatorname{vrai}\sup\limits_{\omega} \xi(\omega) = C$ означает, что $P(\xi > C) = 0$ и для любого $\varepsilon > 0$ $P(\xi > C - \varepsilon) > 0$.

Определение 2. Случайная величина ξ называется удовлетворяющей условию Крамера $K(a, C)$, если $M \exp\{a|\xi|\} \leqslant C$, $a > 0$.

Теорема 1. Пусть случайные величины ξ и η с коэффициентом перемешивания β удовлетворяют условию $K(a, C)$. Тогда

$$|\operatorname{cov}(\xi, \eta)| \leqslant \frac{8C}{a^2} \beta (1 + |\ln \beta|). \tag{3}$$

Доказательство. Введем случайные величины

$$\xi_N = \begin{cases} \xi, & |\xi| \leqslant N \\ 0, & |\xi| > N \end{cases}, \quad \bar{\xi}_N = \xi - \xi_N.$$

Используя неравенство Шварца, имеем

$$|\operatorname{cov}(\xi, \eta)| = |M\xi\eta - M\xi M\eta| \leqslant |M\xi_N\eta - M\xi_N M\eta| + M|\bar{\xi}_N\eta| +$$

$$+ M|\bar{\xi}_N| M|\eta| \leqslant M|\eta| |M(\xi_N|\eta) - M\xi_N| + 2M^{\frac{1}{2}} \bar{\xi}_N^2 M^{\frac{1}{2}} \eta^2. \tag{4}$$

Пусть $\xi_N = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$, $|a_i| \leqslant N$, события A_i образуют полную группу событий, тогда

$$|M(\xi_N|\eta) - M\xi_N| = \left|\sum_{i=1}^{n} a_i \{P(A_i/\eta) - P(A_i)\}\right| \leqslant N \sum_{i=1}^{n} |P(A_i/\eta) - P(A_i)|. \tag{5}$$

Положим $B_i = \{\omega : [P(A_i/\eta) - P(A_i)] > 0\}$. События B_i могут быть совместны. Рассмотрим несовместные события C_j такие, что каждое B_i можно представить в виде конечной суммы событий C_j. Таких событий C_j можно выбрать не более 2^n, тогда

$$\sum_{i=1}^{n} |P(A_i/\eta) - P(A_i)| = \sum_{i=1}^{n} [P(A_i/\eta) - P(A_i)] \chi_{B_i} - \sum_{i=1}^{n} [P(A_i/\eta) - P(A_i)] \chi_{\bar{B}_i}.$$

Используя события C_j, получаем

$$\sum_{i=1}^{n}[P(A_i/\eta)-P(A_i)]\chi_{B_i}=\sum_{i=1}^{n}[P(A_i/\eta)-P(A_i)]\sum_{j:(C_j\subset B_i)}\chi_{C_j}=$$

$$=\sum_j \chi_{C_j}\sum_{i:(B_i\supset C_j)}[P(A_i/\eta)-P(A_i)]=\sum_j \chi_{C_j}[P(\bigcup_{i:(B_i\supset C_j)}A_i/\eta)-P(\bigcup_{i:(B_i\supset C_j)}A_i)].$$

Из условия (2) следует

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{\omega}|P(\bigcup_{i:(B_i\supset C_j)}A_i/\eta)-P(\bigcup_{i:(B_i\supset C_j)}A_i)|\leqslant\beta.$$

Следовательно,

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{\omega}\sum_{i=1}^{n}[P(A_i/\eta)-P(A_i)]\chi_{B_i}\leqslant\beta.$$

Аналогичным образом получим

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{\omega}\left|\sum_{i=1}^{n}[P(A_i/\eta)-P(A_i)]\chi_{\overline{B}_i}\right|\leqslant\beta.$$

Из этих неравенств имеем

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{\omega}\sum_{i=1}^{n}|P(A_i/\eta)-P(A_i)|\leqslant 2\beta.$$

Тогда из (5) следует, что

$$\operatorname*{vrai\,sup}_{\omega}|M(\xi_N/\eta)-M\xi_N|\leqslant 2N\beta. \tag{6}$$

Эта оценка справедлива для любых простых случайных величин ξ_N, поэтому она будет справедлива и для произвольных случайных величин ξ_N. Так как для любых $x>0$, $a>0$, $k=1, 2, \ldots$ справедливо неравенство $x^k\leqslant\frac{k!}{a^k}\exp\{ax\}$, то, заменяя в этом неравенстве x на $|\eta|$ и используя свойства математического ожидания, получаем

$$M|\eta|\leqslant\frac{1}{a}M\exp\{a|\eta|\}\leqslant\frac{C}{a},\quad M\eta^2\leqslant\frac{2}{a^2}M\exp\{a|\eta|\}\leqslant\frac{2C}{a^2}. \tag{7}$$

Из условия $K(a, C)$ следует

$$C\geqslant M\exp\{a|\xi|\}\geqslant M\exp\{a|\bar{\xi}_N|\}\geqslant M\exp\left\{\frac{a}{2}|\bar{\xi}_N|\right\}\times$$

$$\times\exp\left\{\frac{a}{2}|\bar{\xi}_N|\right\}\chi_{(\bar{\xi}_N=0)}\geqslant\exp\left\{\frac{a}{2}N\right\}M\exp\left\{\frac{a}{2}|\bar{\xi}_N|\right\}\chi_{(\bar{\xi}_N=0)},$$

отсюда

$$M\bar{\xi}_N^2\leqslant\frac{8}{a^2}M\exp\left\{\frac{a}{2}|\bar{\xi}_N|\right\}\chi_{(\bar{\xi}_N=0)}\leqslant\frac{8C}{a^2}\exp\left\{-\frac{a}{2}N\right\}. \tag{8}$$

Используя неравенства (4), (6) — (8), получаем

$$|\operatorname{cov}(\xi,\ \eta)|\leqslant\frac{2C}{a}N\beta+\frac{8C}{a^2}\exp\left\{-\frac{a}{4}N\right\}.$$

Так как это неравенство справедливо при любом N, то, полагая $N=\frac{a}{4}|\ln\beta|$, получаем

$$|\operatorname{cov}(\xi,\ \eta)|\leqslant\frac{8C}{a^2}\beta(1+|\ln\beta|),$$

что требовалось доказать.

Данная оценка, как асимптотическая формула, по β неулучшаема, так как справедлива

Теорема 2. Для любого $\beta \leqslant \frac{1}{2}$ справедлива оценка

$$\sup_{\xi,\ \eta} |\operatorname{cov}(\xi,\ \eta)| \geqslant \frac{\ln(2C-1)}{2a^2} \beta \ln \frac{C-1+\beta}{\beta}, \tag{9}$$

где точная верхняя грань берется по всем случайным величинам ξ и η, удовлетворяющим условию $K(a,\ C)$, коэффициент перемешивания «по Ибрагимову» случайных величин ξ и η равен β.

Доказательство. Рассмотрим случайные величины ξ и η, имеющие распределение при $\beta \leqslant \frac{1}{2}$:

$$P(\xi = C_1,\ \eta = C_2) = \beta,\ P(\xi = C_1,\ \eta = 0) = 0,$$
$$P(\xi = 0,\ \eta = C_2) = 0{,}5 - \beta,\ P(\xi = 0,\ \eta = 0) = 0{,}5.$$

Коэффициент перемешивания «по Ибрагимову» случайных величин ξ и η равен β. Случайные величины ξ и η будут удовлетворять условию $K(a,\ C)$, если положить

$$C_1 = \frac{1}{a} \ln \frac{C-1+\beta}{\beta}, \quad C_2 = \frac{1}{a} \ln(2C-1),$$

тогда

$$\operatorname{cov}(\xi,\ \eta) = \frac{\ln(2C-1)}{2a^2} \beta \ln \frac{C-1+\beta}{\beta}.$$

Теорема доказана.

Скорость сходимости к нулю оценок (3), (9) при $\beta \to 0$ отличается только постоянным множителем. Отсюда следует асимптотическая неулучшаемость оценки (3) по β.

В работе [3] приводится оценка ковариаций случайных величин ξ и η при их более слабой зависимости (перемешивание «по Розенблатту»). В этой работе показана асимптотическая неулучшаемость этой оценки по коэффициенту перемешивания.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ибрагимов И. А., Линник Ю. В. Независимые и стационарно связанные величины.— М., 1965.
2. Сунклодас И.— Литовский матем. сб., 1977, т. 17, № 3, с. 41, 194.
3. Журбенко И. Г., Зуев Н. М.— Литовский матем. сб., 1975, т. 15, № 1, с. 111.

Поступила в редакцию 24.04.80.

Кафедра теории вероятностей и математической статистики

УДК 517.917

Б. С. КАЛИТИН

К УСТОЙЧИВОСТИ РАЗРЫВНЫХ ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛОВ ДВУМЕРНЫХ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ

Детальное исследование систем дифференциальных уравнений, подверженных действию импульсных возмущений на заданных множествах фазового пространства, проведено в работах [1, 2]. К примерам конкретных представителей таких систем можно отнести теорию часов с ударами [3], движение осциллятора под действием мгновенной силы [4]. Во всех случаях рассматриваемые процессы описываются дифференциальными системами второго порядка. В частности, ставятся задачи существования единственности и устойчивости разрывных периодических режимов.

Следует отметить, что, если речь идет о разрывных системах, классические методы исследования предельных циклов непосредственно применить нельзя. Здесь существенную роль играют метрические элементы кусков траекторий, причем всякое невырожденное (даже линейное) пре-