УДК 517.9

Б. С. КАЛИТИН

НЕКОТОРЫЕ ПРИЗНАКИ ОГРАНИЧЕННОСТИ РЕШЕНИЙ

В работах по проблемам устойчивости [1, 2] содержатся отдельные результаты по исследованию структуры окрестности устойчивых (неустойчивых) движений. По аналогии с этим в настоящей статье проводится исследование качественного поведения ограниченных по Иосидзава Т. [3] решений.

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}=f(x, t), \tag{1}$$

где $x\in R^n$, n-мерному евклидову пространству; функция $f:R^{n+1}\to R^n$ непрерывна. Предположим, что через каждую точку $(\xi, \tau)\in R^{n+1}$ проходит единственное решение $x(\xi, \tau, t)$ системы (1), определенное в своем максимальном интервале $]a(\xi, \tau), b(\xi, \tau)[$.

I. Ограниченные решения. Следуя [3], рассмотрим

Определение 1. Решения системы (1) называются ограниченными, если $\forall\tau\in R$, $\forall A>0\,\exists\, R_2=R_2(A, \tau)$ такое, что $\|\xi\|\leqslant A\Rightarrow\|x(\xi,\tau,t)\|\leqslant R_2$ $\forall t\geqslant\tau$.

Если $R_2=R_2(A)$ $\forall\,\tau\in I$, где I — интервал R, решения системы (1) равномерно ограничены по $\tau\in I$.

Определение 2 [1]. Функция $\sigma:R\to R$ называется бесконечно большой, если $\sigma(\nu)\to\infty$ при $\nu\to\infty$.

Теорема 1. Положим $\delta(\nu, \tau)=\inf\limits_{a(\xi,\tau)<t\leqslant\tau,\ \|\xi\|=\nu}\|x(\xi,\tau,t)\|$, $\nu>0$.

I. Если функция $\sigma_c(\nu)=\inf\limits_{\tau>c}\sigma(\nu, \tau)$ $(c\geqslant-\infty)$ бесконечно большая, то решения системы (1) равномерно ограничены по $\tau>c$.

2. Если решения системы (1) равномерно ограничены, по $\tau<d$ $(d\leqslant\infty)$, то функция $\sigma_d(\nu)=\inf\limits_{\tau<d}\sigma(\nu, \tau)$ является бесконечно большой.

Доказательство 1. Пусть функция $\sigma_c(\nu)$ является бесконечно большой. Покажем, что решения равномерно ограничены по $\tau>c$. Предположим противное, т. е. $\exists\,\beta>0$, $\exists\{\xi_n\}(\|\xi_n\|\leqslant\beta)$, $\exists\{\tau_n\}$ $(\tau_n>c)$, $\exists$ — неограниченно возрастающая последовательность $\{t_n\}$ $(t_n>\tau_n)$ такие, что $\|x(\xi_n, \tau_n, t_n)\|\to\infty$ при $n\to\infty$. По числу β, согласно определению 2, укажем число $B=B(\beta)$, при котором $\sigma_c(\nu)>\beta$, если $\nu>B$. Кроме того, с учетом сделанных построений можно указать число $N=N(B)$ такое, что $\|x(\xi_n, \tau_n, t_n)\|>B$ $\forall\, n>N$. Поэтому для точки $\eta_n=x(\xi_n, \tau_n, t_n)$ по определению функции $\sigma_c(\nu)$ будем иметь соотношение: $\|x(\eta_n, t_n, \tau_n)\|\equiv\equiv\|\xi_n\|\geqslant\sigma_c(B)>\beta$, противоречащее выбору ξ_n. Это и доказывает 1.

Доказательство 2. Пусть решения равномерно ограничены по $\tau<d$, но функция $\sigma_d(\nu)$ не является бесконечно большой. Другими словами, существует неограниченно возрастающая последовательность $\{\nu_n\}$ и число $\Sigma<\infty$, для которого $\sigma_d(\nu_n)\leqslant\Sigma$, $\forall\, n\geqslant1$. В соответствии с определением $\sigma_d(\nu)$ это значит, что $\exists\{\xi_n\}(\|\xi_n\|=\nu_n)$, $\exists\{\tau_n\}(\tau_n<d)$, $\exists\{t_n\}(t_n<\tau_n)$ такие, что $\|x(\xi_n, \tau_n, t_n)\|\leqslant\Sigma$. В таком случае для точки $\eta_n=x(\xi_n, \tau_n, t_n)$ имеем: $\|\eta_n\|\leqslant\Sigma$, но $\|x(\eta_n, t_n, \tau_n)\|\equiv\|\xi_n\|\to\infty$. Однако это противоречит определению 1 (по $\tau<d$) Теорема доказана.

Следствие 1. Для равномерной ограниченности решений системы (1) по $\tau\in R$ необходимо и достаточно, чтобы функция $\inf\sigma(\nu, \tau)$, $\tau\in R$, являлась бесконечно большой.

Предположим теперь, что существует непрерывная функция $\varphi:R\to R$ $\varphi(\tau)>0$, $\tau\in R$, такая что

$$\|f(\xi, \tau)\|\leqslant\varphi(\tau)\|\xi\|,\ \forall\,\xi\in R^n, \tag{2}$$

$$\int\limits_{\alpha}^{\alpha+\beta}\varphi(\nu)\,d\nu\leqslant\Delta(\beta)<\infty.\quad \forall\alpha\in R,\ \forall\beta>0. \tag{3}$$

Лемма 1. Пусть выполнены условия (2), (3) и решения системы (1) ограничены. Тогда решения системы (1) равномерно ограничены по $\tau \in [\alpha, \alpha+\beta]$ $\forall \alpha \in R$ и $\forall \beta$, $0<\beta<\infty$.

Доказательство. Используя интегральное представление решений системы (1) и лемму Гронуолла — Беллмана [4] можно показать, что для всякого решения $x(\xi, \tau, t)$ справедлива оценка $\|x(\xi, \tau, t)\| \leqslant \leqslant \|\xi\| \exp \Delta(\beta)$ $\forall t \in [\tau, \tau+\beta]$, $\forall \tau \in [\alpha, \alpha+\beta]$.

Поэтому $\forall \nu > 0$ и числа $B=\nu \exp \Delta(\beta)$ можем записать условие

$$\|\xi\| \leqslant \nu \Rightarrow \|x(\xi, \tau, t)\| \leqslant B \ \forall \tau \in [\alpha, \alpha+\beta], \ \forall t \in [\tau, \tau+\beta]. \quad (4)$$

По числу B в силу определения 1 найдется число $R_0=R_0(B, \alpha+\beta)$, для которого

$$\|\eta\| \leqslant B \Rightarrow \|x(\eta, \alpha+\beta, t)\| \leqslant R_0 \ \forall t \geqslant \alpha+\beta. \quad (5)$$

Следовательно, из (4), (5) получаем: $\|\xi\| \leqslant \nu \Rightarrow \|x(\xi, \tau, t)\| \leqslant R_0(\nu)$ $\forall t \geqslant \tau$, $\forall \tau \in [\alpha, \alpha+\beta]$, что и требовалось доказать.

II. Предельно ограниченные решения.

Определение 3 [3]. Решения системы (1) называются предельно ограниченными, если существует число $R_1>0$ такое, что $\forall A>0$, $\forall \tau \in R$ можно указать число $T=T(A, \tau)$, для которого из условия $\|\xi\| \leqslant A$ следует неравенство

$$\|x(\xi, \tau, t)\| \leqslant R_1 \ \forall t \geqslant \tau+T.$$

Если число T можно выбрать не зависящим от $\tau \in I$, где I — интервал R, то решения системы (1) равномерно предельно ограничены по $\tau \in I$.

Лемма 2. Если решения системы (1) равномерно предельно ограничены по $\tau>c$ $(\tau<d)$ и выполнены условия (2), (3), то они и равномерно ограничены по $\tau>c$ (соответственно по $\tau<d$).

На самом деле, согласно равномерной предельной ограниченности $\exists R_1 \forall A>0$ $\exists T=T(A)>0$, что $\|\xi\| \leqslant A \Rightarrow \|x(\xi, \tau, t)\| \leqslant R_1 \forall t \geqslant \tau+ +T$, $\forall \tau>c$. Кроме того, из (2), (3) имеем оценку $\|x(\xi, \tau, t)\| \leqslant \|\xi\| \exp \Delta(T) = A \exp \Delta(T)$, $\tau \leqslant t \leqslant \tau+T$. Следовательно, $\forall A>0$ $\exists R_2 = =\max\{R_2 A \exp \Delta(T)\}$ такое, что $\|\xi\| \leqslant A \Rightarrow \|x(\xi, \tau, t)\| \leqslant R_2 \forall t \geqslant \tau, \forall \tau>c$, что и требуется для определения 1. Аналогично рассматривается и случай $\tau<d$.

Лемма 3. Пусть решения системы (1) равномерно ограничены по $\tau>c$. Если существует число $\Gamma>0$ такое, что $\forall \xi \in R^n$ и $\forall \tau>c$ можно указать неограниченно возрастающую последовательность $\{t_n\}$, для которой $\|x(\xi, \tau, t_n)\| \leqslant \Gamma$, то решения системы (1) предельно ограничены.

Доказательство. В силу равномерной ограниченности по $\tau>c$ решений системы (1) имеем: для $\Gamma>0$, $\exists R_3=R_3(\Gamma)>0$ такое, что $\|\xi\| \leqslant \leqslant \Gamma \Rightarrow \|x(\xi, \tau, t)\| \leqslant R_3 \forall t \geqslant \tau$, $\forall \tau>c$. Предположим, что решения не являются предельно ограниченными. Тогда для произвольного числа $R_1 \geqslant R_3$ существует состояние $\bar{\xi} \in R^n$, момент $\bar{\tau}>c$ и неограниченно возрастающая последовательность чисел $\{\bar{t}_n\}$ такие, что $\|x(\bar{\xi}, \bar{\tau}, \bar{t}_n)\| > R_3$. Кроме того, по условию леммы можно указать неограниченно возрастающую последовательность моментов времени $\{t_k\}$, для которых $\|x(\bar{\xi}, \bar{\tau}, t_k)\| \leqslant \Gamma$. Зафиксировав $t_k>c$, положим $\eta_k=x(\bar{\xi}, \bar{\tau}, t_k)$. В этом случае для точки η_k, $\|\eta_k\| \leqslant \Gamma$, в силу сделанных построений будем иметь: $\|x(\eta_k, t_k, t)\| \leqslant R_3$ $\forall t \geqslant t_k$, $t_k>c$. Но тогда для $\bar{t}_n>t_k$ $\|x(\eta_k, t_k, \bar{t}_n)\| = \|x(\bar{\xi}, \bar{\tau}, \bar{t}_n)\| \leqslant R_3$, что противоречит построению последовательности $\{\bar{t}_n\}$. Лемма доказана.

Для всякой точки $(\xi, \tau) \in R^{n+1}$ множество $\gamma^-(\xi, \tau) = \{(x(\xi, \tau, t), t) \in \in R^{n+1} : t \leqslant \tau\}$ принято называть отрицательной полутраекторией.

Лемма 4. Предположим, что решения системы (1) равномерно предельно ограничены по $\tau<d$ $(d \leqslant \infty)$ и число R_1 соответствует определению 3. Положим $Z=\{\xi \in R^n : \|\xi\|>R_1\}$. Тогда множество $\{\gamma^-(\xi, \tau) \in Z \times \times R : \xi \in Z, \tau<d\}$ отрицательных полутраекторий системы (1) пусто.

Действительно, в силу определения 3 равномерной предельной ограниченности решений всякое решение (1) не может находиться в Z на промежутке времени большем, чем заданное число $T=T(A)$. Это и доказывает лемму.

ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения.— М., 1959.
2. Зубов В. И.— Матем. сб., 1959. т. 48, № 2, с. 149.
3. Иосидзава Т. Математика: Сб. переводов.— М., 1955. т. 9, № 5, с. 95.
4. Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений.— М., 1954.

Поступила в редакцию 19.04.79.

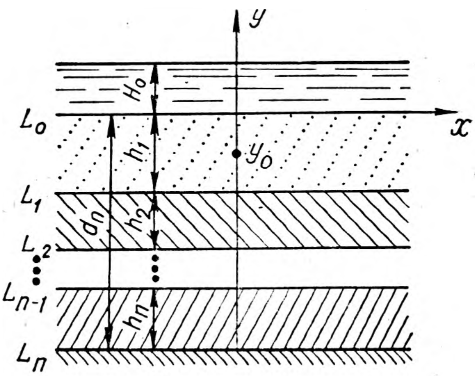
Кафедра МОУ

УДК 532.546

И. А. ВЕРЕМЧУК

СТАЦИОНАРНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ В МНОГОСЛОЙНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ОБЛАСТИ С ТОЧЕЧНЫМ СТОКОМ

Стационарная фильтрация жидкости в многослойном анизотропном грунте с точечным стоком имеет важное значение при решении таких проблем, как определение запасов подземных вод и гидротехническое строительство. Схематически рассматриваемая задача представлена на рисунке.



Обозначим через H_r $(r=1, n)$ значения напора в r-ом слое. Считаем, что жидкость и среда несжимаемы, а фильтрация подчиняется линейному закону, тогда фильтрация в каждом из слоев описывается уравнением [1]:

$$c_{11}^r \frac{\partial^2 H_r}{\partial x^2} + 2c_{12}^r \frac{\partial^2 H_r}{\partial x\, \partial y} + c_{22}^r \frac{\partial^2 H_r}{\partial y^2} = 0 \quad (r=\overline{1,\ n}), \tag{1}$$

где c_{11}^r, c_{12}^r, c_{22}^r — константы.

Граничные условия имеют следующий вид:

$$\begin{gathered} H_1 = H_0 \text{ на } L_0, \\ H_r = H_{r+1},\ c_{12}^r \frac{\partial H_r}{\partial x} + c_{22}^r \frac{\partial H_r}{\partial y} = c_{12}^{r+1} \frac{\partial H_{r+1}}{\partial x} + c_{22}^{r+1} \frac{\partial H_{r+1}}{\partial y} \\ \text{на } L_r\,(r=1,\ n-1), \\ c_{12}^n \frac{\partial H_n}{\partial x} + c_{22}^n \frac{\partial H_n}{\partial y} = 0 \text{ на } L_n. \end{gathered} \tag{2}$$

К поставленным условиям добавляем требование, что $|H_r|<M<\infty$ везде, кроме окрестности стока.

Для решения поставленной задачи воспользуемся формулой

$$F_r^0(\xi_r) + Q_r^0(\bar{\xi}_r) = H_r + i\eta_r \quad (r=\overline{1,\ n}), \tag{3}$$

где $F_r^0(\xi_r)$ и $Q_r^0(\xi_r)$ — аналитические функции от $\xi_r = x + \lambda_0^r y$ в соответствующих областях фильтрации, за исключением точки ξ_0 (где находится сток), $\lambda_0^r = \lambda_{01}^r + i\lambda_{02}^r$ — комплексная константа.

Считая, что функции η_r удовлетворяют условиям, аналогичным (2), на основании формулы (3) получим

$$F_1^0(\xi_1) + Q_1^0(\xi_1) = H_0 \text{ на } L_0,$$