Министерство образования Республики Беларусь
Белорусский государственный университет
Механико-математический факультет
Кафедра общей математики и информатики

О. А. Велько, М. В. Мартон, Н. А. Моисеева

Элементы линейной алгебры и их применение в социально-экономической сфере

Учебно-методическое пособие

Минск
БГУ
2023

УДК 316:512.64(075.8)
В 282

Решение о депонировании вынес:
Совет механико-математического факультета
Протокол № 6 от 28 февраля 2023 года

Авторы:
Велько Оксана Александровна, старший преподаватель;
Мартон Марина Владимировна, кандидат физико-математических наук, доцент;
Моисеева Наталья Александровна, старший преподаватель.

Рецензенты:
Барвенов С.А., доцент кафедры веб-технологий и компьютерного моделирования Механико-математического факультета БГУ, кандидат физико-математических наук, доцент;
Гулина О.В., заместитель декана факультета экономики и менеджмента учреждения образования «Белорусский государственный экономический университет», кандидат физико-математических наук, доцент.

Велько, О. А. Элементы линейной алгебры и их применение в социально-экономической сфере : учебно-методическое пособие / О. А. Велько, М. В. Мартон, Н. А. Моисеева ; БГУ, Механико-математический фак., Каф. общей математики и информатики. – Минск : БГУ, 2023. – 74 с. : ил., табл. – Библиогр.: с. 73–74.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов факультета философии и социальных наук БГУ специальностей «Социология», «Социальные коммуникации». Каждая тема содержит исторические сведения, теоретический материал, примеры решения, задачи для самостоятельного решения и вопросы для самоконтроля. В каждой главе приведены лабораторные работы с использованием MS Excel. Многие математические понятия иллюстрируются примерами из социологии и экономики.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Определители были изобретены дважды, а это в математике встречается не так уж часто. Сначала – без глубокой теории, но с хорошими правилами практического применения – еще в начале нашей эры в Древнем Китае. Ученые этой страны еще тогда обладали глубокими и обширными знаниями из разных областей науки и техники, в том числе и математики. Но, к сожалению, на развитие мировой науки они не оказали большого влияния, так как старались скрывать свои открытия от других народов. В результате то, что было открыто или изобретено китайцами, вновь открывалось или изобреталось в других странах. Так было с бумагой, порохом, фарфором. Так получилось и с определителями и решением уравнений с их помощью. В XVII в. метод решения уравнений с помощью определителей заново изобрел великий немецкий ученый Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646–1716). Лейбниц стремился во всех исследованиях к обобщениям, к единым методам. В частности, он хотел создать единообразный метод решения систем линейных уравнений, что и привело его к определителям.

Впервые матрицы упоминались ещё в древнем Китае, называясь тогда «волшебным квадратом». Основным применением матриц было решение линейных уравнений. Также волшебные квадраты были известны чуть позднее у арабских математиков, примерно тогда появился принцип сложения матриц. После развития теории определителей в конце 17-го века Габриэль Крамер начал разрабатывать свою теорию в 18-м столетии и опубликовал «правило Крамера» в 1751 году. Примерно в этом же промежутке времени появился «метод Гаусса». Теория матриц начала своё существование в середине XIX века в работах Уильяма Гамильтона и Артура Кэли. Фундаментальные результаты в теории матриц принадлежат Карлу Вейерштрассу, Мари Энмон Камиль Жордану, Фердинанду Георгу Фробениусу.

С середины XVII века матрицы использовались Лейбницем, только ко второй половине XIX века матрицы, независимо от систем уравнений, стали объектом самостоятельных исследований. Дело в том, что операции над матрицами, такие как сложение, умножение матриц и умножение скаляра на матрицу, возникли как технический аппарат при решении задачи весьма далекой от проблем теории линейных уравнений – придании геометрического истолкования некоторым обобщениям чисел – кватернионам, которые были открыты Гамильтоном в 1843 году и составляли интерес для многих математиков середины XIX века. Основные идеи матричной алгебры были сформулированы А. Кэли в 1858 году в работе «Мемуар по теории матриц». Он развил некое исчисление, вводя числа специального вида, которые охватывали, как частный случай, известные к тому времени действительные и комплексные числа и кватернионы. В основе его теории лежали именно такие действия с матрицами, что аналогами их были действия с уже изучавшимися в то время математиками и механиками линейными отображениями векторных пространств. Так, странное на первый взгляд правило умножения матриц соответствует композиции таких отображений. Интересно знать, что именно Кэли ввел одно из современных обозначений определителя матрицы – две вертикальные черты. Термин «матрица» ввел Джеймс Сильвестр в 1850 г.

Позднее глубокие результаты в теории матриц были получены Карлом Вейерштрассом (1815 – 1897), Фердинандом Георгом Фробениусом – немецкими математиками, и французом Мари Энмон Камиль Жорданом (1838 – 1922), они стали классическими в теории матриц и носят их имена. Можно сказать, что в современной математике нет, пожалуй, почти ни одного серьезного раздела, в котором в той или иной степени не использовались бы достижения теории матриц. При этом именно в силу поразительной универсальности матричного аппарата результаты отдельной задачи, исследования, зачастую принимают общий и более глубокий характер, связывающий между собой, казалось бы, довольно далекие проблемы.

С точки зрения истории определители стали изучаться раньше, чем сами матрицы. Впервые определители начали использовать в китайских учебниках по математике. Термин «определитель» (перевод с латинского слова «determinant») в современном его значении ввел в 1815 г. французский математик Огюстен Луи Коши (1789 – 1857), хотя как математический инструмент исследования систем линейных уравнений определитель использовал еще немецкий философ и математик Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646 – 1716), который в 1693 г. получил с его помощью формулы решения систем линейных уравнений с невырожденной основной матрицей. Спустя почти три четверти века его результаты повторил Г. Крамер, и они вошли в историю под названием «правила Крамера» решения систем линейных уравнений. Метод Крамера (правило Крамера) – способ решения квадратных систем линейных алгебраических уравнений с ненулевым определителем основной матрицы (причем для таких уравнений решение существует и единственно) – создан Г. Крамером в 1751 году. Габриэ́ль Кра́мер (1704 – 1752) – швейцарский математик, ученик и друг Иоганна Бернулли, один из создателей линейной алгебры. Крамер рассмотрел систему произвольного количества линейных уравнений с квадратной матрицей. Решение системы он представил в виде столбца дробей с общим знаменателем – определителем матрицы. Термина «определитель» (детерминант) тогда еще не существовало (его ввел Карл Фридрих Гаусс в несколько ином понимании в 1801 году), но Крамер дал точный алгоритм его вычисления.

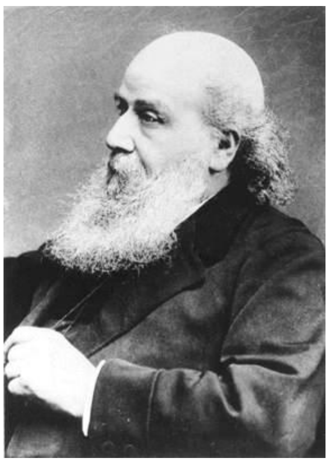
Универсальность идей Лейбница и Крамера подтверждается тем, что спустя 20 лет после Крамера независимо от предшественников те же формулы получил французский математик и механик Жозеф Луи Лагранж (1736 – 1813). Примерно в то же самое время идея определителя возникла в работах французского математика Этьенна Безу (1730 – 1783) при решении чисто геометрической задачи (отыскание плоской кривой, проходящей через заданные точки). Первое систематическое и обширное изложение теории определителей дал французский математик и музыкант Александр Теофил Вандермонд (1735 – 1796) в 1772 г., ему же принадлежит ряд самостоятельных исследований и интересных результатов в этой области, а определитель одного специального вида вошел в историю математики под названием «определитель Вандермонда». Следует отметить, что фундаментальные работы 1812-го года еще двух французских математиков О. Коши и Ж. Бине (1786 – 1856) сыграли немаловажную роль в этой теории и привлекли к ней внимание многих европейских ученых XIX века, в частности, А. Кэли и немецкого математика Карла Густава Якоби (1804 – 1851). Собственно, только после работ Кэли определители, так же как и матрицы, стали самостоятельным объектом интереса математиков, ему же принадлежит одно из современных обозначений определителей. Якоби ввел так называемые функциональные определители (с элементами – переменными величинами (функциями)), указал на их связь с заменой переменных в кратных интегралах и с решениями дифференциальных уравнений в частных производных. Его статьи «О построении и свойствах определителей» и «О функциональных определителях», опубликованные в 1841 г., сделали теорию определителей общим достоянием математики.

Исторический обзор был бы неполон без упоминания работ в этой области французского ученого (математика, механика, физика и астронома) Пьера–Симона Лапласа (1749 – 1827). Его знаменитая теорема о разложении определителя в сумму произведений элементов и их алгебраических дополнений дает возможность индуктивного (рекуррентного) вычисления определителей.

1. МАТРИЧНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

1.1 Понятие матрицы. Виды матриц

Матрицы находят широкое применение в задачах, изучающих зависимости между различными социально-экономическими показателями. Матричная форма записи используется для компактности записи большого числа элементов, помогает структурировать социологическую информацию. Весьма удобным и полезным математическим аппаратом является матричный метод в социологических исследованиях. Особенно важны матрицы при разработке и использовании баз данных, в которых вся информация хранится и обрабатывается в матричной форме.



Джеймс Джозеф Сильвестр

Определение матрицы. ***Матрицей A*** называется система $\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}$ элементов, расположенных в прямоугольной таблице из $\boldsymbol{m}$ строк и $\boldsymbol{n}$ столбцов.

Заметим, что элементами матрицы могут быть числа, алгебраические или символьные выражения.

Обозначения матрицы:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{или } A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Элементы матрицы обозначаются $\boldsymbol{a_{ij}}$, где $\boldsymbol{i}$ – номер строки, $\boldsymbol{j}$ – номер столбца (числа i и j называют индексами элемента).

Матрицу, имеющую $\boldsymbol{m}$ строк и $\boldsymbol{n}$ столбцов, называют матрицей размера $\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}$ (читается: эм на эн).

Употребляется и более короткое обозначение матрицы размера $\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}$:

$$A = (a_{ij})_{m\times n} \quad \text{или } A = [a_{ij}]_{mn}.$$

Например, запишем матрицу $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 5 & -4 & 6 \end{pmatrix}$. Это матрица размера 2×3, а элемент a_{22} равен (–4).

Матрица A, состоящая лишь из одной строки, называется ***строчной матрицей*** или ***матрицей-строкой:***

$$A = (a_{11} \;\; a_{12} \;\; \dots \;\; a_{1n}).$$

Матрица A имеющая лишь один столбец, называется ***столбцевой матрицей*** или ***матрицей-столбцом***:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \ldots \\ a_{n1} \end{pmatrix}.$$

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется ***нулевой матрицей*** и обозначается буквой O, тогда по определению

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Квадратной матрицей называется матрица, у которой число строк равно числу столбцов $m=n$, т.е. матрица вида

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Порядком квадратной матрицы называется число ее строк (или столбцов).

Элементы a_{11}, a_{22}, … a_{nn} квадратной матрицы образуют ее ***главную диагональ***, а элементы a_{1n}, $a_{2\,n-1}$, … a_{n1} – ***побочную диагонль***.

Квадратная матрица первого порядка отождествляется со своим единственным элементом. Выпишем квадратные матрицы первого, второго и третьего порядков:

$$(a_{11}),\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Квадратная матрица называется ***симметрической***, если равны её элементы, симметричные относительно главной диагонали. Например, $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Упражнение. Приведите пример симметрической матрицы третьего порядка.

Диагональной матрицей называется квадратная матрица, у которой все элементы, не принадлежащие главной диагонали равны нулю, т.е. матрица

$$diag(a_{11}, a_{22}, \ldots a_{nn}) = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots & & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Единичной матрицей называется диагональная матрица, у которой все элементы главной диагонали равны единице. Единичная матрица обозначается буквой ***E***. Так, единичные матрицы второго и третьего порядков имеют вид

$$E=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad E=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Треугольной матрицей называется квадратная матрица, все элементы которой, расположенные по одну сторону от главной диагонали равны нулю. Различают соответственно верхнюю и нижнюю треугольные матрицы:

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}\\0&a_{22}&\dots&a_{2n}\\\dots&&\dots&\dots\\0&0&\dots&a_{nn}\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}a_{11}&0&\dots&0\\a_{21}&a_{22}&\dots&0\\\dots&&\dots&\dots\\a_{n1}&a_{n2}&\dots&a_{nn}\end{pmatrix}.$$

1.2 Операции над матрицами и их свойства

Две матрицы A и B называются ***равными*** $A = B$, если они одинаковых размеров и их соответствующие элементы равны, то есть $a_{ij} = b_{ij}$ (i=1,2,…m; j=1,2,…n).

Линейными операциями над матрицами называются сложение и вычитание матриц, умножение матрицы на число. Сложение и вычитание матриц определяются только для матриц одинаковых размеров.

Суммой двух матриц $A=(a_{ij})_{m\times n}$ *и* $B=(b_{ij})_{m\times n}$ называется матрица $C=(c_{ij})_{m\times n}$, элементы которой равны суммам соответствующих элементов матриц слагаемых, т.е.

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}\ (i=1,2,\dots m;\ j=1,2,\dots n).$$

Сумма двух матриц обозначается $C = A+B$.

Пример. Найдите $C = A+B$, если $A=\begin{pmatrix}1&6\\2&-4\\-3&9\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2&4\\3&7\\8&-11\end{pmatrix}$.

Решение. Находим по определению

$$C=A+B=\begin{pmatrix}1&6\\2&-4\\-3&9\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2&4\\3&7\\8&-11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-2&6+4\\2+3&(-4)+7\\(-3)+8&9-11)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&10\\5&3\\5&-2\end{pmatrix}.$$

Разностью двух матриц $A=(a_{ij})_{m\times n}$ *и* $B=(b_{ij})_{m\times n}$ называется матрица $D=(d_{ij})_{m\times n}$, элементы которой равны разности соответствующих элементов этих матриц, т.е.

$$d_{ij} = a_{ij} - b_{ij}\ (i=1,2,\dots m;\ j=1,2,\dots n).$$

Разность двух матриц имеет обозначение $D = A - B$.

Пример. Найдите $D=A-B$, если $A=\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -4 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 7 \\ 8 & -11 \end{pmatrix}$.

Решение. По определению

$$D=A-B=\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -4 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 7 \\ 8 & -11 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1-(-2) & 6-4 \\ 2-3 & (-4)-7 \\ (-3)-8 & 9-(-11) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -11 \\ -11 & 20 \end{pmatrix}.$$

Произведением матрицы $A=(a_{ij})_{m\times n}$ ***на число*** α называется матрица $\alpha A=(\alpha\cdot a_{ij})_{m\times n}$, т. е. матрица, полученная из данной матрицы умножением всех ее элементов на число α.

Пример. Найдите матрицу $(-2\cdot A)$, где $A=\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -4 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$.

Решение. $(-2\cdot A)=(-2)\cdot\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -4 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2\cdot 1 & -2\cdot 6 \\ -2\cdot 2 & -2\cdot(-4) \\ -2\cdot(-3) & -2\cdot 9 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & -12 \\ -4 & 8 \\ 6 & -18 \end{pmatrix}$.

Матрицу $(-1)\cdot A$ называют матрицей, ***противоположной*** матрице A, и обозначают $\boldsymbol{-A}$.

Замечание. *Разность двух матриц $A-B$ можно определить так: $A-B=A+(-B)$*

Линейные операции над матрицами обладают следующими ***свойствами***:

Пусть матрицы A, B и C – матрицы одинакового размера $m\times n$, O – нулевая матрица, $(-A)$ – матрица, противоположная A, а α и β – любые действительные числа. Тогда справедливы следующие свойства:

- $A+B=B+A$ *(коммутативность сложения матриц)*;
- $(A+B)+C=A+(B+C)$ *(ассоциативность сложения матриц)*;
- $A+O=A$;
- $A+(-A)=O$;
- $1\cdot A=A$;
- $\alpha(\beta A)=(\alpha\beta)A$;
- $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$;
- $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$

Таким образом, многие свойства, присущие операциям над числами, справедливы и для операций над матрицами.

Докажем, например, что $A+B=B+A$. Известно, что $A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$, а $B+A=(b_{ij}+a_{ij})_{m\times n}$, $(i=1,2,\ldots m;\ j=1,2,\ldots n)$, а так как $a_{ij}+b_{ij}=b_{ij}+a_{ij}$, то $A+B=B+A$.

Пусть даны две матрицы A и B. Произведение матриц определено только для согласованных матриц. Матрица A называется ***согласованной*** с матрицей B, если число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B.

Произведением матрицы A размера $m\times n$ ***на матрицу*** B размера $n\times k$ называется такая матрица C размера $m\times k$, у которой элементы c_{ij} определяются формулой

$$c_{ij} = a_{i1}\cdot b_{1j} + a_{i2}\cdot b_{2j} + \ldots + a_{in}\cdot b_{nj} = \sum_{l=1}^{n} a_{il}\cdot b_{lj}\ ,$$

где $i=1,2,\ldots m$; $j=1,2,\ldots k$, т.е. элемент c_{ij} матрицы C равен сумме произведений элементов $\boldsymbol{i}$-й строки матрицы A на соответствующие элементы $\boldsymbol{j}$-го столбца матрицы B. Матрица C имеет m строк (как и матрица A) и k столбцов (как матрица B). Произведение матрицы A на матрицу B имеет обозначение AB.

Замечание. *Из того, что A можно умножать на B, не следует, что B можно умножать на A.*

Если для матриц A и B определены произведения AB и BA, то в общем случае $AB\neq BA$.

Так, умножение матрицы A размеров 3×3 на матрицу B размеров 3×2 дает

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}\cdot b_{11} + a_{12}\cdot b_{21} + a_{13}\cdot b_{31} & a_{11}\cdot b_{12} + a_{12}\cdot b_{22} + a_{13}\cdot b_{32} \\ a_{21}\cdot b_{11} + a_{22}\cdot b_{21} + a_{23}\cdot b_{31} & a_{21}\cdot b_{12} + a_{22}\cdot b_{22} + a_{23}\cdot b_{32} \\ a_{31}\cdot b_{11} + a_{32}\cdot b_{21} + a_{33}\cdot b_{31} & a_{31}\cdot b_{12} + a_{32}\cdot b_{22} + a_{33}\cdot b_{32} \end{pmatrix},$$

тогда как произведение BA не определено.

В случае, если $AB=BA$, матрицы A и B называются ***перестановочными***.

Упражнение. Приведите пример перестановочных матриц.

Пример. Найдите, если это возможно, произведения AB и BA, где

$$A=\begin{pmatrix} 4 & -5 & 8 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -2 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. Произведение AB имеет смысл, поскольку число столбцов матрицы A равно трём и равно числу строк матрицы B. Размер матрицы A равен 2×3, размер матрицы B равен 3×2, тогда размер матрицы AB равен 2×2 и $AB=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$.

Найдём элементы искомой матрицы

$$c_{11} = a_{11}\cdot b_{11} + a_{12}\cdot b_{21} + a_{13}\cdot b_{31} = 4\cdot(-1) + (-5)\cdot(-2) + 8\cdot 3 = -4 + 10 + 24 = 30,$$

$$c_{12} = a_{11}\cdot b_{21} + a_{12}\cdot b_{22} + a_{13}\cdot b_{32} = 4\cdot 5 + (-5)\cdot(-3) + 8\cdot 4 = 20 + 15 + 32 = 67,$$

$$c_{21} = a_{21}\cdot b_{11} + a_{22}\cdot b_{21} + a_{23}\cdot b_{31} = 1\cdot(-1) + 3\cdot(-2) + (-1)\cdot 3 = -1 - 6 - 3 = -10,$$

$$c_{22} = a_{21}\cdot b_{12} + a_{22}\cdot b_{22} + a_{23}\cdot b_{32} = 1\cdot 5 + 3\cdot(-3) + (-1)\cdot 4 = 5 - 9 - 4 = -8.$$

Таким образом $AB=\begin{pmatrix} 4 & -5 & 8 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -2 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 67 \\ -10 & -8 \end{pmatrix}$.

Проверим, можно ли получить произведение BA. Поскольку число столбцов матрицы B равно двум и равно числу строк матрицы A, произведение BA имеет смысл. Вычислим его:

$$BA=\begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -2 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -5 & 8 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 20 & -13 \\ -11 & 1 & -13 \\ 16 & -3 & 20 \end{pmatrix}.$$

Свойства умножения матриц

Если имеют смысл соответствующие произведения матриц, то справедливы следующие ***свойства умножения матриц***:

- $(AB)C = A(BC)$;
- $(A+B)C=AC+BC$;
- $C(A+B)=CA+CB$;
- $\alpha(AB)=(\alpha A)B$;
- $AE=EA=A$;
- $AO=OA=O$.

Целой положительной степенью A^k $(k>1)$ квадратной матрицы A называется произведение k матриц, каждая из которых равна A, т.е.

$$A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{k\ раз}$$

Матрица A^k имеет тот же порядок, что и матрица A.

Упражнение. Верно ли утверждение «произведение двух ненулевых матриц может быть нулевой матрицей»?

Матрица, полученная из данной заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером, называется ***транспонированной*** относительно данной. Матрица, транспонированная относительно матрицы A, обозначается через A^T . Пусть дана исходная матрица A:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Тогда, согласно определению, матрица, транспонированная относительно матрицы A имеет вид

$$A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Отметим, что если A – матрица размера $m\times n$, то матрица A^T имеет размеры $n\times m$.

Операция нахождения матрицы, транспонированной к данной, называется ***транспонированием матрицы***. Для операции транспонирования матрицы с*праведливы следующие свойства*:

1. $(A^T)^T=A$;
2. $(\alpha A)^T=\alpha A^T$;
3. $(A+B)^T=A^T+B^T$;
4. $(AB)^T=B^TA^T$.

Пример. Если $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 5 & -4 & 6 \end{pmatrix}$, то $A^T=\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$.

Замечание: Матрица называется симметрической, если $A^T = A$.

1.3 Определители и их свойства

Рассмотрим квадратную матрицу n-го порядка

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Понятие определителя матрицы вводится только для квадратных матриц.

Определение определителя матрицы. Каждой квадратной матрице ставится в соответствие по определённому правилу действительное число, которое называется ***определителем (***детерминантом***)*** матрицы и обозначается $|A|$, $\det A$, Δ.

Если порядок матрицы равен единице, то эта матрица состоит из одного элемента a_{11}, т.е. $A=(a_{11})$, тогда ***определителем первого порядка***, соответствующим такой матрице, назовём величину этого элемента

$$\det A = |a_{11}| = a_{11}.$$

Определителем квадратной матрицы второго порядка

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

называют число, равное $a_{11}\, a_{22}- a_{12}\, a_{21}$, *т.е.*

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21}.$$

Здесь и всюду в дальнейшем будем говорить об элементах, строках и столбцах определителя $|A|$, имея в виду элементы, строки и столбцы соответствующей ему матрицы A.

Числа $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ называют ***элементами определителя*** матрицы второго порядка. Правило составления определителя второго порядка по элементам соответствующей матрицы A: ***определителем второго порядка*** называют число, равное разности произведений элементов главной и побочной диагоналей.

Пример. Вычислить определители следующих матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -4 & 10 \end{pmatrix}$$

Решение.

$$\det A = \begin{vmatrix} 7 & 6 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = 7 \cdot 8 - 6 \cdot 1 = 50\,, \quad \det B = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -4 & 10 \end{vmatrix} = 5 \cdot 10 - 1 \cdot (-4) = 50 + 4 = 54\,.$$

Определителем квадратной матрицы третьего порядка

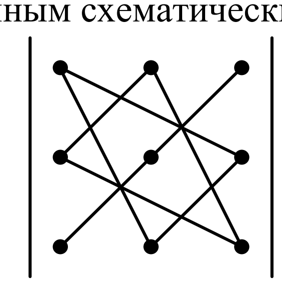
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

называется число

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}.$$

Заметим, что каждое слагаемое алгебраической суммы в правой части представляет собой произведение элементов определителя, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца с соответствующим знаком. Чтобы легче было запомнить, какие произведения берутся со знаком плюс, а какие со знаком минус, можно воспользоваться правилом, представленным схематически ниже.

«+»



«–»

Правило треугольников: три положительных члена определителя представляют собой произведения элементов главной диагонали и элементов, находящихся в вершинах двух равнобедренных треугольников, основания которых параллельны главной диагонали; три отрицательных члена определителя представляют собой произведения элементов побочной диагонали и элементов, находящихся в вершинах двух равнобедренных треугольников, основания которых параллельны второй диагонали.

Определитель третьего порядка состоит из 6=3! (3!=1·2·3, читается «три факториал») слагаемых, каждое из которых есть произведение трех элементов определителя. Элементы произведения каждого слагаемого берутся по одному из каждой строки и каждого столбца.

Пример. Вычислить определитель следующей матрицы:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -4\\ 2 & 6 & -1\\ 3 & 5 & -8\end{pmatrix}.$$

Решение.

$$\det A=\begin{vmatrix}1 & 2 & -4\\ 2 & 6 & -1\\ 3 & 5 & -8\end{vmatrix} =1\cdot 6\cdot(-8)+2\cdot(-1)\cdot 3+(-4)\cdot 2\cdot 5-((-4)\cdot 6\cdot 3+2\cdot 2\cdot(-8)+1\cdot 5\cdot(-1))=$$

$$=-48-6-40-(-72-5-32)=-94+109=15.$$

Определители матриц второго и третьего порядка будем называть ***определителями второго и третьего порядка.***

Вычисление определителей более высоких порядков довольно трудоемко. При практическом вычислении определителей используется свойство понижения порядка, позволяющее вычислить определитель n-го порядка через определитель (n–1)-го порядка. В свою очередь определитель (n–1)-го порядка вычисляется через определитель (n–2)-го порядка и т.д.

Минором элемента a_{ij} матрицы *n-го* порядка называется определитель порядка n–1, соответствующий той матрице, которая получается из данной матрицы вычеркиванием ***i****-ой* строки и ***j****-го* столбца (той строки и того столбца на пересечении которых стоит данный элемент). Минор элемента a_{ij} обозначим *через* M_{ij}.

Пример. Рассмотрим определитель $\det A=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$. Минором элемента a_{12} является $M_{12}=\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}$, а минором элемента a_{23} является $M_{23}=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}$.

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} матрицы A называется число $A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot M_{ij}$.

Таким образом, алгебраическое дополнение и минор одного и того же элемента либо совпадают, либо противоположны. Например, $A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot M_{23} = -M_{23}$.

Пример. Рассмотрим определитель $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 7 & -1 & 5 \end{vmatrix}$. Для него найдём A_{12} и A_{22}

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = -1 \cdot (3 \cdot 5 - 0 \cdot 7) = -15\,,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 - (-2) \cdot 7 = 19$$

Определителем n*-го *порядка матрицы $\boldsymbol{A}$ называют число, равное

$$a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n}.$$

Это сумма всех произведений элементов первой строки на соответствующие им алгебраические дополнения.

Последняя формула выражает правило вычисления определителя n-го порядка по элементам первой строки соответствующей ему матрице и по алгебраическим дополнениям этих элементов, которые являются определителями $(n-1)$-го порядка, взятыми с надлежащими знаками.

Равенство для определителя третьего порядка можно записать так:

$$|A| = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Возникает вопрос, а нельзя ли использовать для получения величины определителя элементы и соответствующие им миноры не первой, а любой строки матрицы, а также вопрос о разложении определителя по элементам любого столбца. Ответ на эти вопросы дают следующие основные теоремы, приводимые здесь без доказательства.

Теорема. Определитель матрицы $\boldsymbol{n}$-го порядка равен сумме произведений элементов любой ее строки (столбца) на соответствующие им алгебраические дополнения.

Таким образом, справедливы следующие формулы:

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} \quad (i = \overline{1,n}),$$

$$|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj} \quad (j = \overline{1,n}).$$

Особенно удобно разложить определитель по элементам строки (столбца), если в ней много нулей.

Упражнение. Докажите, что определитель диагональной матрицы равен произведению диагональных элементов:

При вычислении определителя используются ***свойства определителей***, которые облегчают их вычисление. Рассмотрим свойства определителей без доказательств, демонстрируя их на примере определителя второго порядка.

1. При транспонировании матрицы ее определитель не меняется: $\det A = \det A^T$.

$$|A^T| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12} = |A|.$$

2. При перестановке двух соседних строк или столбцов определитель меняет лишь знак:

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} = a_{21} \cdot a_{12} - a_{11} \cdot a_{22} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

3. Определитель с двумя одинаковыми строками (столбцами) равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = a \cdot b - b \cdot a = 0.$$

4. Множитель, общий для всех элементов некоторой строки (столбца), можно вынести за знак определителя:

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = k(a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12}) = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

5. Если все элементы некоторой строки (столбца) определителя равны нулю, то определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0 \cdot a_{22} - 0 \cdot a_{21} = 0.$$

6. Определитель с двумя пропорциональными строками (столбцами) равен нулю:

$$\begin{vmatrix} ka & kb \\ a & b \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = 0.$$

7. Значение определителя не изменится, если к элементам его строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же число k:

$$\begin{vmatrix} a_{11} + ka_{12} & a_{12} + ka_{22} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} + ka_{21}a_{22} - a_{12} \cdot a_{12} - ka_{22}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12} \cdot a_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

8. Если каждый элемент строки (столбца) определителя равен сумме двух слагаемых, то такой определитель можно представить в виде суммы двух определителей, у одного из которых соответствующая строка (столбец) составлена из первых слагаемых, а у другого – из вторых; элементы же, стоящие на остальных местах, у всех трех определителей одни и те же:

$$\begin{vmatrix} \dot{a}_{11} + \ddot{a}_{11} & \dot{a}_{12} + \ddot{a}_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dot{a}_{11} & \dot{a}_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \ddot{a}_{11} & \ddot{a}_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Рассмотрим без доказательства следующую теорему.

Теорема. Определитель произведения двух квадратных матриц A и B одного порядка равен произведению определителей перемножаемых матриц:

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B.$$

На практике часто пользуются следующим способом вычисления определителей: *применяя свойства определителей, добиваются, чтобы в какой-либо строке (столбце) определителя стало как можно больше нулей, а затем полученный определитель можно разложить по этой строке (столбцу)*.

Пример. Вычислить определитель матрицы четвёртого порядка

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение.

1 способ:

Разложим данный определитель, например, по элементам 3-ей строки:

$$\det A = a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} + a_{34}A_{34} = a_{31}\cdot(-1)^4\cdot M_{31} + a_{32}\cdot(-1)^5\cdot M_{32} +$$

$$+a_{33}\cdot(-1)^6\cdot M_{33} + a_{34}\cdot(-1)^7 M_{34} = 3\cdot(-1)^4\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 5 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^5\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 2 \\ 1 & -3 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)\cdot(-1)^6\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 4\cdot(-1)^7\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 3\cdot 36 - 2\cdot 2 - 4 - 4\cdot 11 = 56.$$

2 способ:

Данный определитель можно найти, используя свойства определителей. Вычтем из четвёртой строки первую, а из третьей – утроенную первую получим

$$\det A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & 2 \\ 0 & -4 & -10 & -8 \\ 0 & -1 & -6 & -2 \end{pmatrix}.$$

Разложим данный определитель по элементам первого столбца, поскольку первый столбец содержит наибольшее количество нулей:

$$\det A=1\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 5 & 2 \\ -4 & -10 & -8 \\ -1 & -6 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 5 & 2 \\ -4 & -10 & -8 \\ -1 & -6 & -2 \end{vmatrix}.$$

Вычтем из последнего столбца удвоенный первый, а затем разложим полученный определитель по третьему столбцу

$$\det A=\begin{vmatrix} -1 & 5 & 4 \\ -4 & -10 & 0 \\ -1 & -6 & 0 \end{vmatrix}.$$

$$\det A=4\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} -4 & -10 \\ -1 & -6 \end{vmatrix}=4\cdot(24-10)=56.$$

Итак, значение определителя равно 56.

1.4 Обратная матрица

Квадратная матрица называется ***невырожденной***, если её определитель отличен от нуля. В противном случае матрица называется ***вырожденной***.

Пусть A – квадратная матрица n-го порядка, а E – единичная квадратная матрица того же порядка.

Определение обратной матрицы. Квадратная матрица A^{-1} называется ***обратной*** к квадратной матрице A, если она удовлетворяет условиям

$$AA^{-1}=A^{-1}A=E\ .$$

Теорема. Если обратная матрица существует, то она единственна.

Доказательство. Пусть A_1^{-1} и A_2^{-1} – обратные матрицы к матрице A. Покажем, что $A_1^{-1}=A_2^{-1}$. Действительно,

$$A_1^{-1}=A_1^{-1}E=A_1^{-1}(AA_2^{-1})=(A_1^{-1}A)A_2^{-1}=EA_2^{-1}=A_2^{-1},$$

что и требовалось доказать.

Теорема. Для того чтобы матрица A имела обратную матрицу, необходимо и достаточно, чтобы она была невырожденной.

Доказательство.

Необходимость. Пусть для матрицы A существует обратная матрица. Тогда из соотношения $AA^{-1}=E$ следуют равенства $|A|\cdot|A^{-1}|=|A^{-1}A|=|E|=1$, т. е. $|A|\neq 0$. Отсюда, в частности, следует, что

$$|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}.$$

Достаточность. Возьмем матрицу

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

такую, что $|A|\neq 0$. Покажем, что A имеет обратную матрицу.

Рассмотрим матрицу B вида

$$B=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

в ***i***-том столбце которой расположены алгебраические дополнения элементов ***i***-той строки матрицы *A*. Матрица *B* называется ***присоединенной*** к матрице *A*.

Перемножим матрицы *A* и *B*.

$$AB=\begin{pmatrix} |A| & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & |A| & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & |A| \end{pmatrix}=|A|\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}=|A|\cdot E.$$

.

Следовательно, $A\cdot(\frac{1}{|A|}\cdot B)=E.$

Таким образом,

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}B.$$

Теорема доказана.

Из последней формулы вытекает ***алгоритм построения обратной матрицы***: необходимо составить присоединенную матрицу *B,* а затем каждый ее элемент разделить на число $|A|$.

Таким образом у всякой невырожденной матрицы *A* существует единственная обратная матрица A^{-1}, определяемая формулой

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} – алгебраическое дополнение элемента a_{ij} матрицы *A.* Заметим, что алгебраические дополнения элементов ***i***-й строки матрицы *A* расположены в ***i***-м столбце матрицы A^{-1}.

Заметим, *что вырожденная матрица не имеет обратной*.

Далее рассмотрим некоторые свойства обратной матрицы, которые часто используются при решении задач, будем их принимать без доказательства.

Свойства обрат ной матрицы

1. $\left(A^{-1}\right)^{-1}=A.$

2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

3. $\left(A^n\right)^{-1} = (A^{-1})^n$.

4. $\left(A^{-1}\right)^T = (A^T)^{-1}$.

Пример. Найдите обратную матрицу A^{-1} к матрице $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение. Сначала вычислим определитель матрицы A:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 2\cdot 4 - (-3)\cdot(-1) = 8 - 3 = 5.$$

Поскольку $\det A \neq 0$, значит, данная матрица невырожденная, т.е. имеет обратную матрицу. Далее находим алгебраические дополнения элементов матрицы:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot 4=4,\ \ A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot(-1)=1,$$
$$A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot(-3)=3,\ \ A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot 2=2.$$

Определяем A^{-1} по формуле $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$.

Тогда

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

Убедимся в том, что матрица A^{-1} найдена верно. Для этого вычислим $A\cdot A^{-1}$ и $A^{-1}\cdot A$:

$$A\cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot\frac{4}{5}-3\cdot\frac{1}{5} & 2\cdot\frac{3}{5}-3\cdot\frac{2}{5} \\ -1\cdot\frac{4}{5}+4\cdot\frac{2}{5} & -1\cdot\frac{3}{5}+4\cdot\frac{2}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Аналогично убедитесь, что $A^{-1}\cdot A=E$.

1.5 Использование матриц при решении задач с экономическим и социологическим содержаниями

Пример. Данные о доходах холдинговой компании по трём областям трёх компаний за 2016 и 2018 года в тыс. ден. ед. представлены в матрицах A и B:

$$A=\begin{pmatrix} 550 & 680 & 340 \\ 2000 & 330 & 170 \\ 2200 & 240 & 600 \end{pmatrix},\ \ B = \begin{pmatrix} 600 & 800 & 350 \\ 2300 & 500 & 250 \\ 2000 & 950 & 600 \end{pmatrix}.$$

Здесь элемент a_{ij} матрицы A означает доход i-й компании в j-ой области за 2016 год, а элементы матрицы B – за 2018 год. Вычислите матрицу C прироста доходов за период с 2016 по 2018 года и проанализируйте её. Рассчитайте матрицу $C_{ср}$, характеризующую средние размеры приростов доходов компаний холдинга за год.

Решение. Матрица приростов доходов за рассматриваемый период равна

$$C=B-A=\begin{pmatrix} 600-550 & 800-680 & 350-340 \\ 2300-2000 & 500-330 & 250-170 \\ 2000-2200 & 950-240 & 600-600 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 50 & 120 & 10 \\ 300 & 170 & 80 \\ -200 & 710 & 0 \end{pmatrix}.$$

Элементы матрицы C выражают изменение доходов с 2016 по 2018 года. Так, третья компания по первой области потерпела убытки в размере 200 тыс. ден. ед., так как $c_{31}=-200$, эта же компания по третьей области не принесла доходов, так как $c_{33}=0$.

Матрица $C_{ср}$, характеризующая средние размеры приростов доходов компаний холдинга за год, равна матрице C, делённой на количество лет в рассматриваемом периоде:

$$C_{ср}=\frac{1}{2}\cdot C=\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cdot 50 & \frac{1}{2}\cdot 120 & \frac{1}{2}\cdot 10 \\ \frac{1}{2}\cdot 300 & \frac{1}{2}\cdot 170 & \frac{1}{2}\cdot 80 \\ \frac{1}{2}\cdot(-200) & \frac{1}{2}\cdot 710 & \frac{1}{2}\cdot 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 25 & 60 & 5 \\ 150 & 85 & 40 \\ -100 & 355 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пример. В социально-экономической сфере широко используются матрицы, моделирующие территориально-экономические связи между районами страны. Такая матрица должна быть квадратной. Элемент a_{ij} указанной матрицы выражает объем рассматриваемого вида продукции, произведенной в i-м районе и потребленной в j-м. Элементы, стоящие на главной диагонали показывают объем продукции, которая потребляется в том же районе, где и производится.

Каждая симметрично расположенная относительно главной диагонали пара элементов матрицы (a_{ij} и a_{ji}) характеризует двусторонние транспортно-экономические связи между районами. Сумма элементов, лежащих на главной диагонали, показывает общий объем производства для местных нужд всех районов. Сумма остальных элементов матрицы равна общему объему продукции, перевозимой между районами. Каждая строка данной матрицы $\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{pmatrix}$ характеризует размер производства в одном районе и объем поставок его продукции по остальным районам. Каждый столбец матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$$

характеризует размеры потребления в одном из районов и его состав по местам производства.

Матрица территориально-экономических связей наглядно моделирует экономические связи, упрощает их анализ и при составлении ряда других, сопряженных с ней матриц, позволяет решать ряд социально-экономических задач по рационализации экономических связей, упорядочению размещения производства и т. д. Выполнение арифметических действий с матрицами открывает возможности для упрощения обработки экономической информации и осуществления расчетов непосредственно по сгруппированным данным.

Пример. Пусть некоторое предприятие выпускает продукцию трех видов и использует сырье двух типов. Нормы расхода сырья характеризуются матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix},$$

где каждый элемент a_{ij} $(i = 1, 2, 3;\ \ j = 1, 2)$ показывает, сколько единиц сырья j-го типа расходуется на производство единицы продукции i-го вида. План выпуска продукции задан матрицей-строкой $C = (120 \quad 90 \quad 150)$, стоимость единицы каждого типа сырья (ден. ед.) – матрицей-столбцом

$$B = \begin{pmatrix} 40 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

Решение. Найдем общую стоимость сырья, затраченную на производство продукции.

Затраты 1-го сырья составляют $S_1 = 120 \cdot 3 + 90 \cdot 4 + 150 \cdot 5 = 1470$ ед. и 2-го сырья $S_2 = 120 \cdot 1 + 90 \cdot 2 + 150 \cdot 3 = 750$ ед., поэтому матрица-строка затрат сырья S может быть записана как произведение

$$S = CA = (120 \quad 90 \quad 150) \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = (1470 \quad 750).$$

Тогда общая стоимость сырья $Q = 1470 \cdot 40 + 750 \cdot 20 = 73800$ ден. ед. может быть записана в матричном виде:

$$Q = SB = (CA)B = (1470 \quad 750) \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ 20 \end{pmatrix} = 73800 .$$

Общую стоимость сырья можно вычислить и в другом порядке: вначале вычисляют матрицу стоимостей затрат сырья на единицу продукции, т. е. матрицу

$$R = AB = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ 20 \end{pmatrix} = \cdot \begin{pmatrix} 140 \\ 200 \\ 260 \end{pmatrix},$$

а затем общую стоимость сырья:

$$Q = CR = C(AB) = \begin{pmatrix}120 & 90 & 150\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}140 \\ 200 \\ 260\end{pmatrix} = 73800 .$$

Рассмотренный пример иллюстрирует выполнение ассоциативного закона для произведения матриц: $(CA)B=C(AB)$.

Пример. В социологических исследованиях проводятся исследования возрастного состава населения. Задача состоит в прогнозировании количества населения определенной возрастной группы через фиксированный промежуток времени.

Решение. Разделим все население в году с номером t на $N+1$ возрастную группу $S_i(t)$ (по одному году рождения в каждой группе). Здесь $S_0(t)$ – число родившихся в течение года с номером t и оставшихся в живых.

Опытным путем были определены коэффициенты P_i дожития в каждой из выделенных групп, т.е. коэффициенты передвижки из возрастной группы с возрастом i лет в группу с возрастом $(i+1)$ лет. Также найдены коэффициенты F_i рождаемости внутри каждой группы определенного возраста.

С использованием введенных коэффициентов легко вывести следующие равенства:

$$S_0(t+1) = F_0 \cdot S_0(t) + F_1 \cdot S_1(t) + \ldots + F_N \cdot S_N(t),$$

$$S_i(t+1) = P_{i-1} \cdot S_{i-1}(t), \quad i=1,2,\ldots, N-1,$$

$$S_N(t+1) = P_{N-1} \cdot S_{N-1}(t) + P_N \cdot S_N(t).$$

Поясним приведенные формулы:

1. группа нулевого возраста $S_0(t+1)$ образуется из числа детей, родившихся в каждой возрастной группе. Безусловно, коэффициенты рождаемости F_i равны нулю для некоторого количества младших и старших возрастных групп;
2. все промежуточные возрастные группы получаются из групп предыдущего возраста $S_{i-1}(t)$ умножением на коэффициент дожития P_{i-1};
3. самая старшая возрастная группа $S_N(t+1)$ состоит из людей данной группы, доживших до нового года, и людей, перешедших из группы предыдущего возраста.

Удобнее всего работать с данными формулами, если ввести следующие объекты:

1. матрицу-строку $\sigma(t)$ состояния возрастных групп в году t:

$$\sigma(t) = (S_0(t) \quad S_1(t) \quad \ldots \quad S_N(t))$$

2. матрицу коэффициентов перехода π:

$$\pi = \begin{pmatrix} F_0 & P_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ F_1 & 0 & P_1 & 0 & \dots & 0 \\ F_2 & 0 & 0 & P_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_{N-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & P_{N-1} \\ F_N & 0 & 0 & 0 & \dots & P_N \end{pmatrix}.$$

Тогда возрастную ситуацию через год можно определить равенством

$$\sigma(t+1) = \sigma(t) \cdot \pi,$$

а через k лет – равенством

$$\sigma(t+k) = \sigma(t) \cdot \pi^k.$$

Здесь используется умножение матрицы-строки $\sigma(t)$ на матрицу π и умножение матрицы π на себя k раз.

Если разделить население не на годовые группы, а на более крупные, то придется ввести еще один вид коэффициентов: Q_i – коэффициент выживших в данной возрастной группе в течение года. Тогда матрица перехода из одной возрастной группы в другую будет выглядеть следующим образом:

$$\pi = \begin{pmatrix} F_0 & P_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ F_1 & Q_1 & P_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ F_2 & 0 & Q_2 & P_2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ F_{N-2} & 0 & 0 & 0 & \dots & P_{N-2} & 0 \\ F_{N-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & Q_{N-1} & P_{N-1} \\ F_N & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & Q_N \end{pmatrix},$$

так как теперь

$$S_i(t+1) = P_{i-1} \cdot S_{i-1}(t) + Q_i(t) \cdot S_i(t),\ i=1,2,\dots,N-1$$

т. е. количество людей в определенной возрастной группе получается как сумма тех из них, что перешли из предыдущей группы, и тех, которые выжили в данной группе, но не перешли в следующую.

Пример. Пусть все население разделено на 5 групп: до года, от года до 25 лет, от 26 до 50 лет, от 51 до 75 лет и старше 75 лет. Если начальное состояние

$$\sigma(0) = (2114 \quad 5631 \quad 4957 \quad 3284 \quad 1265)$$

и матрица перехода π имеет вид

$$\pi = \begin{pmatrix} 0 & 0,98 & 0 & 0 & 0 \\ 0,25 & 0,9 & 0,05 & 0 & 9 \\ 0,15 & 0 & 0,8 & 0,04 & 0 \\ 0,1 & 0 & 0 & 0,7 & 0,2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,4 \end{pmatrix},$$

то через год мы получим следующую демографическую ситуацию:

$$\sigma(1) = (2114 \quad 5631 \quad 4957 \quad 3284 \quad 1265) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0,98 & 0 & 0 & 0 \\ 0,25 & 0,9 & 0,05 & 0 & 9 \\ 0,15 & 0 & 0,8 & 0,04 & 0 \\ 0,1 & 0 & 0 & 0,7 & 0,2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2480 & 7140 & 4247 & 2497 & 1163 \end{pmatrix}.$$

Все числа в последнем равенстве получены умножением строки $\sigma(0)$ на соответствующие столбцы матрицы π. Например, число 7140 человек во второй возрастной группе получилось (с округлением) так:

$$7140 = 2114 \cdot 0{,}98 + 5631 \cdot 0{,}9.$$

Аналогично, через 2 года

$$\sigma(2) = \begin{pmatrix} 2672 & 8856 & 3755 & 1918 & 965 \end{pmatrix}$$

и через 3 года

$$\sigma(3) = \begin{pmatrix} 2969 & 10588 & 3447 & 1493 & 769 \end{pmatrix}.$$

Цифры в данном примере не имеют ровно никакого экспериментального подтверждения, но если представить себе, что ситуация действительно развивается по приведенным данным, то можно сделать вывод о росте населения, но при этом сокращении среднего срока жизни.

Пример. Оценка миграции населения с использованием матриц.

Матрица перераспределения населения между *n* районами имеет общий вид:

$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \cdots & m_{1n} \\ m_{21} & m_{22} & \cdots & m_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & m_{nn} \end{pmatrix}.$$

Элемент m_{ij} обозначает количество населения, мигрировавшего в течение некоторого фиксированного промежутка времени T из участка с номером i в участок с номером j. Кроме того, подразумевается, что мигрантов в иные районы или из других районов нет.

Если обозначить количество людей, выехавших из участка с номером i (в том числе переместившихся внутри него) через n_i, а количество мигрантов, «осевших» на участке с номером j, через k_j , то

$$n_i = \sum_{j=1}^{n} m_{ij} \quad \text{и} \quad k_j = \sum_{i=1}^{n} m_{ij} \qquad (2.1)$$

Таким образом, для вычисления n_i необходимо сложить все числа, находящиеся в строке с номером i, а для нахождения k_j – расположенные в столбце с номером j. Отсюда несложно вывести равенство

$$\sum_{i=1}^{n} n_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} m_{ij} = \sum_{j=1}^{n} k_j = M.$$

Обозначив через $x_{l,0}$ начальное количество населения, проживавшего в районе l, легко найти количество населения через время T:

$$x_{l,1} = x_{l,0} + k_l - n_l .$$

Если миграция населения подчинена закону

$$m_{ij} = \frac{n_i k_j}{M},$$

то получим так называемое невозмущенное перераспределение. Только в этом случае можно однозначно определить элементы $m_{i\,j}$ по известным суммам отъезда n_i и прибытия k_j, так как система уравнений (2.1) имеет бесконечное множество решений.

Для оценки миграции населения в общем случае вводится в рассмотрение матрица V=(v_{ij}) отклонений от невозмущенного перераспределения по формуле:

$$v_{ij} = m_{ij} - \frac{n_i\ k_j}{M}.$$

Решение. Рассмотрим ситуацию с четырьмя районами. Предположим, что матрица перераспределения в данном случае имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 25 & 32 & 21 & 18 \\ 12 & 15 & 16 & 10 \\ 23 & 9 & 18 & 12 \\ 34 & 6 & 29 & 7 \end{pmatrix}.$$

Здесь, например, число 25 в первой строке первого столбца означает число людей, переехавших в пределах района 1, а число 16 второй строке третьего столбца – количество населения, переехавшего из района 2 в район 3.

Общее количество переехавших из некоторого района получаем суммированием всех чисел соответствующей строки, а количество приехавших в него – суммированием чисел соответствующего столбца. Так, из района 2 выехало 53 человека $(n_2 = 12 + 15 + 16 + 10 = 53)$, а въехало в него 62 человека $(k_2 = 32 + 15 + 9 + 6 = 62)$. Аналогично получаем $n_1 = 96$, $n_3 = 62$, $n_4 = 76$, $k_1 = 94$, $k_3 = 84$, $k_4 = 47$.

Количество всех переехавших в течение исследуемого промежутка времени M=287, что несложно получить, просуммировав все элементы матрицы перераспределения.

Построим матрицу V отклонений от невозмущенного перераспределения. Например, $v_{11} = m_{11} - \frac{n_1 k_1}{M} = 25 - \frac{96 \cdot 94}{287} = -6.$ Числа в матрице округляются до целого значения. Вычислив значения всех элементов данной матрицы, получим

$$V = \begin{pmatrix} -6 & 11 & -7 & 2 \\ -5 & 4 & 1 & 1 \\ 3 & -4 & 0 & 2 \\ 9 & -10 & 7 & -5 \end{pmatrix}.$$

1.6 Лабораторная работа 1. Использование матриц при решении задач

Цель лабораторной работы: Изучить возможности работы с массивами данных и обработки статистической информации.

Задание 1. В первом году за три сезона (осень, зима и весна) было 70, 64 и 39 дней с дождем и 4, 10 и 8 дней со снегом, а в втором году – 71, 38 и 32 дней с дождем и 0, 35 и 10 дней со снегом. Найти совместное выпадение осадков как в виде дождя, так и снега в каждом году.

Рекомендации к выполнению:

1. На новом листе (название листа – **Осадки**) создайте таблицу исходных данных: задать матрицу A, отражающую выпадение осадков в виде дождя, и матрицу B, отражающую выпадение осадков в виде снега:

	A	B	C	D	E	F	G
1		Матрица А (дождь)			Матрица В (снег)		
2	***1 год***	70	64	39	4	10	8
3	***2 год***	71	38	32	0	35	10

Рис. 1 Исходные данные

2. Найдите матрицу C, характеризующую совместное выпадение осадков как в виде дождя, так и снега в каждом году, как сумму матриц A и B. В ячейку H2 вставьте формулу =B2+E2 и скопируйте данную формулу в ячейки H3, I2:J3

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1		Матрица А (дождь)			Матрица В (снег)			Матрица С (совместное выпадение осадков)		
2	***1 год***	70	64	39	4	10	8	74	74	47
3	***2 год***	71	38	32	0	35	10	71	73	42

3. Сохраните файл.

Задание 2. Местной транспортной компании необходимо подсчитать стоимость убытков из-за задержек, вызванных дождем (10 у.е.), снегом (15 у.е.) и туманом (20 у.е.), в районе, для которого получены указанные выше данные. Пусть количество дней с туманом в первом году было 12, а во втором году – 15.

Рекомендации к выполнению:

1. Получим матрицу D размером 2x3, в которой первый столбец показывает количество дней с дождем, второй – со снегом, третий – с туманом. В ячейку K2 введите формулу =СУММ(B2:D2) и скопируйте ее в ячейку K3. В ячейку L2 введите формулу =СУММ(E2:G2) и скопируйте ее в ячейку L3. В ячейки M2 и M3 введите количество дней с туманом.

2. Обозначим стоимость задержек транспорта, вызванных дождем (10 у.е.), снегом. (15 у.е.) и туманом (20 у.е.), как столбец матрицы F :

K	L	M	N
Матрица D			Матрица задержек F
173	22	12	10
141	45	15	15
			20

3. Находим общую стоимость убытков за каждый год, умножая матрицу D на F. Для этого выделяем диапазон P2:P3 и вставляем функцию =МУМНОЖ(K2:M3;N2:N4), нажимая Ctrl+Shift+Enter.

K	L	M	N	O	P
Матрица D			Матрица задержек F		Общая стоимость убытков
173	22	12	10		2300
141	45	15	15		2385
			20		

4. Сохраните файл.

<u>Задание 3</u>. Вычислить определитель пятого порядка.

Рекомендации к выполнению:

1. На новом листе (название листа – **Определитель**) создайте таблицу исходных данных: матрицу размером 5х5, содержащую произвольные числовые данные.
2. Для вычисления определителя используйте функцию МОПРЕД, в качестве массива укажите весь диапазон матрицы.

Примеры решения задач

1. Найдите матрицу $C=3A-4B$, где $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Решение. $C=3A-4B=3\cdot\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}-4\cdot\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 9 & 15 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 4 & -8 & 16 \\ 0 & 12 & 18 \end{pmatrix}=$
$\begin{pmatrix} 2 & 17 & -1 \\ 0 & -9 & -11 \end{pmatrix}$.

2. Найдите матрицу $C=4A+2A^T$, если $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

Решение. $4A=\begin{pmatrix} 4 & 8 & -4 \\ 8 & 4 & 4 \\ 4 & 8 & 20 \end{pmatrix}$, $2A^T=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \\ -2 & 2 & 10 \end{pmatrix}$, $C=4A+2A^T=\begin{pmatrix} 6 & 12 & -2 \\ 12 & 6 & 8 \\ 2 & 10 & 30 \end{pmatrix}$.

3. Найдите *AB*, если $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $\cdot\, B=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

Решение. $A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}=$

$$\begin{pmatrix}1\cdot 1+(-1)\cdot 2+2\cdot 0 & 1\cdot 4+(-1)\cdot 3+2\cdot 1\\ 3\cdot 1+0\cdot 2+1\cdot 0 & 3\cdot 4+0\cdot 3+1\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 3 & 13\end{pmatrix}.$$

4. Проверить выполняется ли равенство *AB*=*BA*, если $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 5 & -2\end{pmatrix}$.

Решение. $AB=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 5 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+15 & 0-6\\ 4-5 & 0+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}17 & -6\\ -1 & 2\end{pmatrix}$.

$$BA=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 5 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3\\ 4 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+0 & 3+0\\ 10-8 & 15+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 2 & 17\end{pmatrix}.$$

Таким образом, $AB\neq BA$.

5. Найдите A^3, если $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$.

Решение. $A^3=A\cdot A\cdot A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 6 & 5\end{pmatrix}$.

6. Найдите матрицу *X* из уравнения 2*A*+2*X*=3*B*, где

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & -6\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 3 & -1 & 2\end{pmatrix}.$$

Решение.

2X=3B–2A=

=

$$3\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & -6\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 3 & -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 6 & 9\\ 12 & 15 & -18\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 2 & 6\\ 6 & -6 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -1 & 0\\ 1 & -13 & 18\end{pmatrix},$$

$$X=\begin{pmatrix}-1 & -0,5 & 0\\ 0,5 & -6,5 & 9\end{pmatrix}.$$

7. Вычислите определитель матрицы $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot5\cdot2+1\cdot4\cdot3+1\cdot2\cdot(-1)-\big((-1)\cdot5\cdot3+2\cdot2\cdot4+1\cdot1\cdot2\big)=$$

$$= 20+12-2-(-15+16+2)=27.$$

8. Вычислите определитель матрицы $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение. Для вычисления определителя данной матрицы воспользуемся свойством: определитель с двумя одинаковыми строками (столбцами) равен нулю – и получим

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

9. Вычислите определитель матрицы $A=\begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & -2 \end{pmatrix}$.

Решение. В данной матрице вторая и третья строки пропорциональны, воспользуемся свойством определителя – определитель с двумя пропорциональными строками (столбцами) равен нулю:

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & -2 \end{vmatrix} = 0.$$

10. Вычислите определитель четвертого порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Решение. Вычитая из четвертой строки первую, из третьей – удвоенную первую и прибавляя первую строку ко второй, получаем

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & -5 & 1 & 2\\ -1 & 2 & 0 & 6\\ 1 & 1 & 0 & 3\\ 2 & -1 & 0 & 0\end{vmatrix}.$$

Разложим этот определитель по элементам третьего столбца, поскольку третий столбец содержит наибольшее количество нулей:

$$\Delta=1\cdot(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}-1 & 2 & 6\\ 1 & 1 & 3\\ 2 & -1 & 0\end{vmatrix}.$$

Вычтем из первой строки последнего определителя удвоенную вторую и затем разложим полученный определитель по первой строке:

$$\Delta=\begin{vmatrix}-3 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 3\\ 2 & -1 & 0\end{vmatrix}=(-3)\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}1 & 3\\ -1 & 0\end{vmatrix}=-3\cdot 3=-9.$$

Значение определителя равно –9.

11. Предприятие производит изделия трёх видов. При этом используется сырьё трёх типов. Нормы затрат сырья на единицу изделия каждого вида, себестоимость каждого вида сырья и стоимость его доставки приведены в таблице:

Вид изделия	Тип сырья		
	T_1	T_2	T_3
$И_1$	6	4	2
$И_2$	2	1	0
$И_3$	1	3	5
Себестоимость единицы сырья	4	4	2
Стоимость доставки единицы сырья	1	3	2

Каковы общие затраты предприятия на производство 100 усл. ед. изделий первого вида, 70 усл. ед. второго вида и 50 усл. ед. третьего вида?

Решение. Нормы расходов сырья запишем в виде матрицы A:

$$A=\begin{pmatrix}6 & 4 & 2\\ 2 & 1 & 0\\ 1 & 3 & 5\end{pmatrix}.$$

В этой матрице элементы a_{ij} показывают количество сырья j-го типа на изготовление единицы изделия i-го вида. Пусть матрица C показывает цену единицы сырья и доставки единицы сырья:

$$C=\begin{pmatrix}4&4&2\\1&3&2\end{pmatrix}.$$

Объём производства изделий задаётся матрицей столбцом

$$Q=\begin{pmatrix}100\\70\\50\end{pmatrix}.$$

Чтобы определить общие затраты S на производство изделий данного объема Q, надо знать затраты P на сырьё для производства единицы изделия каждого вида и его доставку. Для этого умножим матрицу расходов A на матрицу C^T, полученную из матрицы C транспонированием. Получим

$$P=A\cdot C^T=\begin{pmatrix}6&4&2\\2&1&0\\1&3&5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4&1\\4&3\\2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}44&22\\12&5\\26&20\end{pmatrix}.$$

Тогда суммарные затраты

$$S=Q^T\cdot P=\begin{pmatrix}100&70&50\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}44&22\\12&5\\26&20\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6540&3550\end{pmatrix}.$$

Следовательно, общие затраты (это стоимость сырья и его доставки) для осуществления данного объёма производства изделий составят 6540+3550=10090 денежных единиц.

12. Найдите матрицу, обратную к матрице A: $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-1&2\\3&0&7\end{pmatrix}$.

Решение. 1. Находим определитель матрицы A:

$$\det A=\begin{vmatrix}1&2&3\\0&-1&2\\3&0&7\end{vmatrix}=14\neq 0,$$

следовательно, существует A^{-1}.

Находим алгебраические дополнения всех элементов матрицы A:

$$A_{11}=(-1)^2\begin{vmatrix}-1&2\\0&7\end{vmatrix}=-7,\quad A_{21}=(-1)^3\begin{vmatrix}2&3\\0&7\end{vmatrix}=-14,\quad A_{31}=(-1)^4\begin{vmatrix}2&3\\-1&2\end{vmatrix}=7,$$

$$A_{12}=(-1)^3\begin{vmatrix}0&2\\3&7\end{vmatrix}=6,\quad A_{22}=(-1)^4\begin{vmatrix}1&3\\3&7\end{vmatrix}=-2,\quad A_{32}=(-1)^5\begin{vmatrix}1&3\\0&2\end{vmatrix}=-2,$$

$$A_{13}=(-1)^4\begin{vmatrix}0&-1\\3&0\end{vmatrix}=3,\quad A_{23}=(-1)^5\begin{vmatrix}1&2\\3&0\end{vmatrix}=6,\quad A_{33}=(-1)^6\begin{vmatrix}1&2\\0&-1\end{vmatrix}=-1.$$

Определяем A^{-1} по формуле

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13}\\ A_{21} & A_{22} & A_{23}\\ A_{31} & A_{32} & A_{33}\end{pmatrix}.$$

$$A^{-1}=\frac{1}{14}\begin{pmatrix} -7 & -14 & 7\\ 6 & -2 & -2\\ 3 & 6 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{7}{14} & -1 & \frac{7}{14}\\ \frac{6}{14} & -\frac{2}{14} & -\frac{2}{14}\\ \frac{3}{14} & \frac{6}{14} & -\frac{1}{14}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2}\\ \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7}\\ \frac{3}{14} & \frac{3}{7} & -\frac{1}{14}\end{pmatrix}.$$

2. Проверяем правильность вычислений, используя равенства $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.

$$AA^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 2\\ 3 & 0 & 7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -\frac{7}{14} & -1 & \frac{7}{14}\\ \frac{6}{14} & \frac{-2}{14} & \frac{-2}{14}\\ \frac{3}{14} & \frac{6}{14} & \frac{-1}{14}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Аналогично проверяем равенство $A^{-1}A = E$.

Ответ: $A^{-1}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2}\\ \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7}\\ \frac{3}{14} & \frac{3}{7} & -\frac{1}{14}\end{pmatrix}.$

13. Найдите матрицу X из уравнения: $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1\\ -3 & 2 & 2\\ 3 & -1 & -2\end{pmatrix}\cdot X=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 2 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix}.$

Решение. Воспользуемся формулами $AX=B$, $X=A^{-1}B$.

1. Сначала найдём определитель матрицы

$$\det A=\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1\\ -3 & 2 & 2\\ 3 & -1 & -2\end{vmatrix}=1\neq 0,$$

следовательно, существует обратная матрица A^{-1}.

2. Найдём эту обратную матрицу A^{-1}:

$$A_{11}=\begin{vmatrix} 2 & 2\\ -1 & -2\end{vmatrix}=-2,\quad A_{21}=-\begin{vmatrix} -2 & -1\\ -1 & -2\end{vmatrix}=-3,\quad A_{31}=\begin{vmatrix} -2 & -1\\ 2 & 2\end{vmatrix}=-2,$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix}-3 & 2\\ 3 & -2\end{vmatrix}=0,\quad A_{22}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 3 & -2\end{vmatrix}=1,\quad A_{32}=-\begin{vmatrix}1 & -1\\ -3 & 2\end{vmatrix}=1,$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}-3 & 2\\ 3 & -1\end{vmatrix}=-3,\quad A_{23}=-\begin{vmatrix}1 & -2\\ 3 & -1\end{vmatrix}=-5,\quad A_{33}=\begin{vmatrix}1 & -2\\ -3 & 2\end{vmatrix}=-4.$$

Итак,

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12} & A_{13}\\ A_{21} & A_{22} & A_{23}\\ A_{31} & A_{32} & A_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -3 & -2\\ 0 & 1 & 1\\ -3 & -5 & -4\end{pmatrix}.$$

3) В итоге найдём искомую матрицу:

$$X=A^{-1}B=\begin{pmatrix}-2 & -3 & -2\\ 0 & 1 & 1\\ -3 & -5 & -4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -2\\ -3 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ -1 & -1\\ -1 & 6\end{pmatrix}.$$

Ответ: $X=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ -1 & -1\\ -1 & 6\end{pmatrix}$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 3\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}-7 & 4\\ 5 & -3\end{pmatrix}$. Вычислите $C=A^2+2B$, $D=3A^T-B^2$, $K=2A^T\cdot B^T$.

2. Найдите произведения матриц A и B, где:

a. а) $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & -1\\ 1 & 2 & 0\\ -1 & 4 & -4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & -1\\ -5 & 3 & 5\end{pmatrix}$; г) $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}7\\ -8\\ 5\end{pmatrix}$.

b. б) $A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 0 & -5\\ 4 & 3 & -5 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\\ 3 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix}$; д) $A=\begin{pmatrix}7\\ -8\\ 5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\end{pmatrix}$.

в) $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 3 & -5 & 0\\ 4 & -7 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0\\ 1\\ -2\end{pmatrix}$;

3. Проверьте, выполняется ли равенство $AB=BA$, если $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ и

$$B=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Даны матрицы A и B. Найдите $A+B$, $A-B$, AB, BA, $3A$, $(BA)^T$, $detA$, $detB$.

а) $A=\begin{pmatrix} i & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -i & 0 \\ -1 & 0 & i \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$;

в) $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & i \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

г) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} i & 0 & 3 \\ 1+i & 0 & 6i \\ 2i & 0 & 1+2i \end{pmatrix}$.

5. Решите уравнение:

а) $\begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ 2 & x \end{vmatrix}=0$;

б) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 3 \\ 1 & 6 & 5+x \end{vmatrix}=0$;

в) $\begin{vmatrix} 2x-2 & 2x \\ 2 & x^2 \end{vmatrix}=0$;

г) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3-x & 3 \\ 1 & 2 & 5+x \end{vmatrix}=0$;

д) $\begin{vmatrix} x & x & x \\ -1 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & 7 \end{vmatrix}=0$.

6. Найдите матрицу X из уравнения $5A-3X=2B$, где $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$,

$B=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

7. Предприятие производит продукцию двух видов и использует сырье двух типов. Нормы затрат сырья на единицу продукции каждого вида заданы матрицей $A=\begin{bmatrix}2 & 3\\ 1 & 5\end{bmatrix}$, у которой по строкам указано количество сырья, расходуемого на производство единицы продукции вида 1 и 2. Стоимость единицы сырья каждого типа заданы матрицей B = [70 30]. Каковы общие затраты предприятия на производство 100 усл. ед. продукции первого вида и 150 усл. ед. второго вида?

8. Вычислите определители следующих матриц:

а) $A=\begin{pmatrix}1 & -4\\ 3 & 5\end{pmatrix}$; $C=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 2\\ 2 & 8 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$,

б) $B=\begin{pmatrix}\cos x & -\sin x\\ \sin x & \cos x\end{pmatrix}$; $D=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 3 & 1 & -5\\ 4 & 2 & 5\end{pmatrix}$.

9. Вычислите определитель матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 2 & 3\\ 1 & 4 & 6 & 8\\ -1 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$, разложив его по элементам: а) 4-ой строки; б) 2-го столбца.

10. Докажите, что $\begin{vmatrix}2 & -3 & 4 & -2\\ 2 & -1 & 3 & 1\\ 1 & 2 & -1 & 0\\ 3 & 0 & 4 & -1\end{vmatrix}=44$.

11. Покажите, что данные матрицы невырожденные, и найдите матрицы, обратные к данным.

а) $A=\begin{pmatrix}1 & -4\\ 3 & 2\end{pmatrix}$; в) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 6 & 5 & 4\\ 13 & 10 & 8\end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 4\end{pmatrix}$; г) $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 2\\ 4 & 1 & 4\end{pmatrix}$.

12. Проверьте, являются ли матрицы $A=\begin{pmatrix}7 & -1 & 2\\ 3 & 0 & 0\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}1 & 4\\ 2 & -3\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ согласованными.

13. Докажите, что $\left(\frac{1}{|A|}B\right)\cdot A = E.$

Вопросы для самоконтроля

1. Что такое матрица? Какая матрица называется прямоугольной, квадратной, диагональной, единичной?

2. Какие матрицы называются равными?

3. Всякие ли матрицы можно сложить?

4. Дать определение транспонированной матрицы. Перечислите свойства транспонированной матрицы.

5. Всякие ли матрицы можно перемножить? Какие матрицы можно перемножить и что получится в результате?

6. Если матрицы A и B можно умножать, следует ли из этого, что их можно складывать?

7. Если матрицы A и B можно складывать, следует ли из этого, что их можно умножать?

8. Можно ли умножить квадратную матрицу на неквадратную?

9. Может ли произведение неквадратных матриц быть квадратной матрицей?

10. Могут ли совпадать матрицы A и A^T?

11. Как выглядит матрица $(A^T)^T$?

12. Перечислите свойства сложения матриц.

13. Перечислите свойства умножения матриц.

14. Может ли произведение матриц быть числом?

15. Что такое определитель второго порядка? Третьего порядка?

16. Перечислите свойства определителя.

17. Что такое минор M_{ij} элемента a_{ij} определителя A?

18. Что такое алгебраическое дополнение A_{ij} элемента a_{ij} определителя A?

19. Что такое обратная матрица?

20. Сформулируйте необходимое и достаточное условие существование обратной матрицы.

21. Верно ли, что матрица A^{-1} имеет те же размеры, что и матрица A?

2. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

2.1 Системы m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными

Системой m линейных уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, ..., x_n$ называется система вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + ... & + a_{1n}x_n = & b_1, \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + ... & + a_{2n}x_n = & b_2, \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1}x_1 + & a_{m2}x_2 + ... & + a_{mn}x_n = & b_m. \end{cases} \tag{2.2}$$

где числа a_{ij} (i=1,2,…,m; j=1,2,…,n) называют ***коэффициентами системы***, а числа b_i (i=1,2,…, m) – ***свободными членами***, j – номер соответствующего неизвестного. Каждый коэффициент системы имеет два индекса, первый из которых i указывает на номер уравнения, а второй j – на номер неизвестного, при котором стоит этот коэффициент.

Если все свободные члены равны нулю, т. е. b_i=0, $i = 1,2,...,m$, то система (2.2) называется ***однородной***.

Однородная линейная система имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... & + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... & + a_{2n}x_n = 0, \\ ... \quad ... & ... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... & + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Если среди свободных членов имеются отличные от нуля, то линейная система называется ***неоднородной***.

Решением линейной системы (2.2) называется упорядоченная совокупность n чисел c_1, c_2, ... c_n, которая при подстановке в каждое из уравнений системы вместо соответствующих переменных x_1, x_2, ... x_n ($x_1=c_1$, $x_2=c_2$, …, $x_n=c_n$) обращает каждое уравнение системы в верное числовое равенство.

Система, имеющая хотя бы одно решение, называется ***совместной***, а система, не имеющая ни одного решения, – ***несовместной***.

Решить систему – значит определить, совместна она или нет, и в случае совместности найти все ее решения.

Система, имеющая только одно решение, называется ***определённой***, больше одного решения – ***неопределённой***. В случае неопределённой системы каждое её решение называется ***частным решением*** системы. Совокупность всех частных решений называется ***общим решением***.

Две системы называются ***эквивалентными*** или ***равносильными***, если любое решение одной из них является также решением другой и обратно, т.е. если они имеют одно и то же множество решений. Любые две несовместные системы считаются эквивалентными.

Линейную систему (2.2) можно записать в матричном виде. Матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad (2.3)$$

составленная из коэффициентов линейных уравнений системы (2.2) называется ***основной матрицей системы*** (или ***матрицей системы***).

Матрица-столбец составленная из неизвестных:

$$X = \begin{bmatrix} x_1, \\ x_2, \\ \dots \\ x_n. \end{bmatrix}.$$

Матрица-столбец составленная из свободных членов:

$$B = \begin{bmatrix} b_1, \\ b_2, \\ \dots \\ b_m. \end{bmatrix}.$$

Заметим что матрица A имеет размер $m \times n$, согласована с матрицей X, имеющей размер $n \times 1$, а значит, можно найти произведение AX:

$$AX = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n. \end{bmatrix}.$$

Так как элементами этой столбцевой матрицы размера $m \times 1$ являются левые части уравнений системы (2.2), то по определению равенства матриц

$$AX = B. \qquad (2.4)$$

Таким образом, система линейных уравнений (2.2) может быть записана в виде одного матричного уравнения (2.4). Эта запись системы называется ***матричной***.

Если (c_1, c_2, ... c_n) – решение системы (2.2), то матрица $C=\begin{bmatrix} c_1, \\ c_2, \\ \dots \\ c_n. \end{bmatrix}$ называется решением этой системы.

2.2 Матричный метод решения систем линейных алгебраических уравнений

Рассмотрим систему ***n*** линейных алгебраических уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + \dots & + a_{1n}x_n = & b_1, \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + \dots & + a_{2n}x_n = & b_2, \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}x_1 + & a_{n2}x_2 + \dots & + a_{nn}x_n = & b_n. \end{cases}$$

(2.5)

Матрица A данной системы – квадратная. ***Определителем системы*** (2.5) называется определитель матрицы A, составленной из коэффициентов этой системы, обозначим его через Δ, $\Delta = \det A$.

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Если определитель Δ системы n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными отличен от нуля, то для матрицы данной системы A существует единственная обратная матрица A^{-1}, определяемая формулой

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Систему (2.5) можно записать в матричном виде $AX=B$.

Умножим обе части этого равенства слева на A^{-1} и получим

$$\underbrace{A^{-1}\cdot A}_{E}\cdot X = A^{-1}\cdot B,$$
$$E\cdot X = A^{-1}\cdot B,$$
тогда
$$X = A^{-1}\cdot B.$$
Эта формула является ***матричной записью*** решения системы (2.5).

Пример. Решить систему линейных уравнений при помощи обратной матрицы:
$$\begin{cases} x+2y+3z=6, \\ 4x+5y+6z=9, \\ 7x+8y=-6. \end{cases}$$

Решение. Запишем систему в матричном виде $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}\cdot X = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix}$.

Сначала найдём определитель матрицы A
$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 27 \quad .$$

Определитель не равен нулю, значит, данная матрица невырожденная, т.е. имеет обратную. Найдём алгебраические дополнения

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = -48, \qquad A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = 24, \qquad A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -3,$$
$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = 42, \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = -21, \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 6,$$
$$A_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -3, \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 6, \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3.$$

Определяем A^{-1} по формуле
$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Итак
$$A^{-1} = \frac{1}{27}\cdot\begin{pmatrix} -48 & 24 & -3 \\ 42 & -21 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{27}\cdot 3\cdot\begin{pmatrix} -16 & 8 & -1 \\ 14 & -7 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\cdot\begin{pmatrix} -16 & 8 & -1 \\ 14 & -7 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Далее найдём искомую матрицу

$$X = A^{-1}\cdot B = \frac{1}{9}\cdot\begin{pmatrix} -16 & 8 & -1 \\ 14 & -7 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -6 \end{pmatrix} = \frac{3}{9}\begin{pmatrix} -16 & 8 & -1 \\ 14 & -7 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} =$$

$\frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, то есть: $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

2.3 Формулы Крамера

Габриэль Крамер

Рассмотрим систему n линейных алгебраических уравнений с $\boldsymbol{n}$ неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (см. 2.5).

Обозначим через Δ_k определитель, полученный заменой в определителе Δ столбца из коэффициентов при неизвестной x_k столбцом свободных членов системы (2.5), тогда

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & b_n & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \ldots,$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & b_n \end{vmatrix}.$$

В 1750 году швейцарский математик Габриэль Крамер дал общие формулы, выражающие неизвестные системы линейных уравнений через определители, составленные из коэффициентов системы, которые отображены в следующей теореме.

Теорема (Крамера). Если определитель Δ системы n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными отличен от нуля, то эта система имеет единственное решение, которое называется ***формулами Крамера:***

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ldots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$$

Доказательство. Запишем систему (2.5) в матричной форме: $AX=B$. Поскольку определитель Δ матрицы A отличен от нуля, она имеет обратную матрицу A^{-1}. Тогда

$$AX = B \Rightarrow A^{-1}(AX) = A^{-1}B \Rightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow EX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B.$$

Полученная формула является матричной записью решения системы. Единственность решения следует из единственности обратной матрицы.

Матричное равенство имеет вид

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix},$$

откуда следует, что

$$x_1 = \frac{1}{|A|}(A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \ldots + A_{n1}b_n) = \frac{\Delta_1}{\Delta},$$

$$x_2 = \frac{1}{|A|}(A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \ldots + A_{n2}b_n) = \frac{\Delta_2}{\Delta},$$

....

$$x_n = \frac{1}{|A|}(A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \ldots + A_{nn}b_n) = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

так как $A_{1k}b_1 + A_{2k}b_2 + \ldots + A_{nk}b_n = \Delta_k$ для всякого $k = \overline{1, n}$. Теорема доказана.

Следствие. Если однородная система имеет ненулевое решение, то ее определитель Δ=0.

Пример. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 5x_1 - 7x_2 = 1, \\ 3x_1 + x_2 = 11. \end{cases}$$

Решение. Составим определитель системы и найдём его:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -7 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 - (-7) \cdot 3 = 5 + 21 = 26.$$

Определитель отличен от нуля, следовательно, система имеет единственное решение. Вычислим определители

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -7 \\ 11 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - (-7) \cdot 11 = 1 + 77 = 78,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 11 \end{vmatrix} = 5 \cdot 11 - 1 \cdot 3 = 55 + 3 = 52.$$

Воспользуемся формулами Крамера

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{78}{26} = 3, \; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{52}{26} = 2.$$

Система имеет единственное решение $x_1 = 3$, $x_2 = 2$.

2.4 Решение систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса

Карл Фридрих Гаусс (1777–1855)

Формулы Крамера требуют довольно сложных вычислений (при больших n), связанных с вычислением определителей Δ и Δ_k. Также заметим, что методом Крамера нельзя решить систему, если матрица A данной системы вырожденная. *Для практического решения систем линейных алгебраических уравнений используют метод Гаусса, основанный на последовательном исключении неизвестных и пригодный для решения произвольных линейных систем.* Хотя в настоящее время данный метод повсеместно называется методом Гаусса, он был известен и до К. Ф. Гаусса. Первое известное описание данного метода упоминалось еще в китайском трактате «Математика в девяти книгах», составленном между I в. до н. э. и II в. н. э.

Пусть дана система m линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 + \ldots & + a_{1n}x_n = & b_1, \\ a_{21}x_1 + & a_{22}x_2 + \ldots & + a_{2n}x_n = & b_2, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}x_1 + & a_{m2}x_2 + \ldots & + a_{mn}x_n = & b_m. \end{cases}$$

Матрица

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array} \right),$$

полученная из основной матрицы системы добавлением столбца свободных членов, называется ***расширенной матрицей системы***.

Элементарными преобразованиями линейной системы называются следующие преобразования:

1) умножение любого уравнения на число, не равное нулю;
2) прибавление к одному уравнению системы другого ее уравнения, умноженного на любое число, при этом сохраняются остальные уравнения системы, в том числе и то, которое прибавлялось;
3) перестановка местами любых двух уравнений системы;

4) вычеркивание нулевой строки, т.е. строки, у которой все элементы равны нулю.

С помощью таких преобразований каждый раз получается система уравнений, эквивалентная исходной.

Метод Гаусса состоит в приведении исходной системы линейных алгебраических уравнений с помощью элементарных преобразований к эквивалентной ей системе, способ решения которой весьма прост.

Метод Гаусса. Предположим, что $a_{11}\neq 0$ (это всегда можно сделать за счет перестановки уравнений). Ко второму уравнению системы прибавим почленно первое, умноженное на $(-\frac{a_{21}}{a_{11}})$. Затем к третьему уравнению системы прибавим почленно первое, умноженное на $(-\frac{a_{31}}{a_{11}})$. Аналогичным образом преобразуем все остальные уравнения, в результате чего получим систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a'_{22}x_2 + \ldots. + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad a'_{m2}x_2 + \ldots + a'_{mn}x_n = b'_m, \end{cases} \tag{2.6}$$

где $a'_{ij},\ b'_i\ (i=\overline{2,m},\ \ j=\overline{2,n})$ – новые значения коэффициентов и правых частей.

Предполагая, что $a'_{22}\neq 0$, и оставляя без изменения первые два уравнения системы (2.6), преобразуем ее таким образом, чтобы в каждом из остальных уравнений коэффициент при x_2 превратился в нуль. Продолжая этот процесс, приведём систему (2.6) к одной из систем вида (2.7), (2.8) или (2.9). Вид таких систем называется ***ступенчатым.***

$$\begin{cases} c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + \ldots + c_{1n}x_n = d_1, \\ \qquad c_{22}x_2 + c_{23}x_3 + \ldots + c_{2n}x_n = d_2, \\ \qquad\qquad c_{33}x_3 + \ldots + c_{3n}x_n = d_3, \\ \qquad\qquad\qquad \ldots \qquad \ldots \\ \qquad\qquad\qquad c_{nn}x_n = d_n, \end{cases} \tag{2.7}$$

где $c_{kk}\neq 0$ (k=1,2,…,n); c_{kk} – некоторые новые коэффициенты, d_k – свободные члены.

Система (2.7) имеет единственное решение. Находим из последнего уравнения $x_n = \frac{d_n}{c_{nn}}$. Затем, подставляя найденное значение x_n в предпоследнее уравнение системы, находим x_{n-1} и т.д.

$$
\begin{cases}
c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1k}x_k + \ldots + c_{1n}x_n = d_1, \\
\qquad c_{22}x_2 + \ldots + c_{2\,k}x_k + \ldots + c_{2\,n}x_n = d_2, \\
\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\qquad\qquad c_{kk}x_k + \ldots + c_{k\,n}x_n = d_r.
\end{cases} \tag{2.8}
$$

где $k < n$.

Система (2.8) имеет бесконечное множество решений. Придавая свободным переменным x_{k+1}, x_{k+2}, …, x_n произвольные значения, последовательно находим x_k, $x_{k\text{-}1}$, …, x_1 из системы

$$
\begin{cases}
c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1\,k}x_k = d_1 - c_{1\,k+1}x_{k+1} - \ldots - c_{1n}x_n, \\
\qquad c_{22}x_2 + \ldots + c_{2\,k}x_k = d_2 - c_{2\;k+1}x_{k+1} - \ldots - c_{2\,n}x_n, \\
\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\qquad\qquad c_{kk}x_k = d_k - c_{k\;k+1}x_{k+1} - \ldots - c_{k\,n}x_n.
\end{cases}
$$

В формулах, выражающих x_1, x_2,…, x_k через x_{k+1}, x_{k+2}, …, x_n , неизвестные x_{k+1}, x_{k+2}, …, x_n могут принимать любые значения.

$$
\begin{cases}
c_{11}x_1 + & c_{12}x_2 + & c_{13}x_3 + \ldots + & c_{1n}x_n & = d_1, \\
 & c_{22}x_2 + & c_{23}x_3 + \ldots + & c_{2n}x_n & = d_2, \\
 & & c_{33}x_3 + \ldots + & c_{3n}x_n & = d_3, \\
 & & & \ldots & \ldots \\
 & & & 0 \cdot x_n & = d_k,
\end{cases} \tag{2.9}
$$

где $k \le n$ и $d_k \ne 0$.

Система (2.9) *несовместна*, т.е. не имеет решений, так последнее равенство не выполняется ни при каких значениях неизвестных.

Отметим, что метод последовательного исключения неизвестных применим к любой системе линейных уравнений. При решении системы методом Гаусса, преобразования совершаются не над уравнениями, а над матрицами, составленными из коэффициентов при неизвестных и свободных членов.

Замечание. *На практике удобнее работать не с системой* (2.2), *а с расширенной матрицей* $\tilde{A}$ *данной системы, выполняя все элементарные преобразования над ее строками. Удобно, чтобы коэффициент* a_{11} *был равен* 1 (*для этого нужно переставить местами уравнения системы, либо разделить обе части первого уравнения на* $a_{11} \ne 1$).

Пример. Решить следующую систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=2, \\ 7x_1-8x_2+9x_3=24, \\ 3x_1+12x_2-5x_3=-14, \\ 13x_1+16x_2-x_3=-4. \end{cases}$$

Решение. Составим расширенную матрицу системы и преобразуем ее:

$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 7 & -8 & 9 & 24 \\ 3 & 12 & -5 & -14 \\ 13 & 16 & -1 & -4 \end{array}\right).$$

Прибавим ко второй строке расширенной матрицы первую строку, умноженную на (–7), к третьей – первую строку, умноженную на (–3), а к четвертой – первую строку, умноженную на (–13), и получим матрицу

$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -22 & -12 & 10 \\ 0 & 6 & -14 & -20 \\ 0 & -10 & -40 & -30 \end{array}\right).$$

Четвертую строку разделим на (–10) и поменяем со второй:

$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 6 & -14 & -20 \\ 0 & -22 & -12 & 10 \end{array}\right).$$

Прибавим к третьей строке системы вторую строку, умноженную на (–6), а четвертой –вторую строку, умноженную на 22, и получим матрицу:

$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 76 & 76 \\ 0 & 0 & -38 & -38 \end{array}\right).$$

Третья и четвертая строки пропорциональны. Одну из них можно убрать из рассмотрения. Данная система совместна и имеет единственное решение**.**

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=2, \\ x_2+4x_3=3, \\ -38x_3=-38; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=2-(2x_2+3x_3), \\ x_2=-4x_3+3, \\ x_3=1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=1, \\ x_2=-1, \\ x_3=1. \end{cases}$$

Таким образом, единственное решение имеет вид $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Пример. Решить следующую систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3+3x_4=1, \\ 6x_1-3x_2-3x_3-x_4=-9, \\ -7x_1+x_2+x_3-2x_4=8, \\ -3x_1+9x_2+9x_3+10x_4=12. \end{cases}$$

Решение. Составим расширенную матрицу системы и преобразуем ее:

$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 6 & -3 & -3 & -1 & -9 \\ -7 & 1 & 1 & -2 & 8 \\ -3 & 9 & 9 & 10 & 12 \end{array}\right).$$

Прибавим ко второй строке системы первую строку, умноженную на (–6), к третьей –первую строку, умноженную на 7, а к четвертой –первую строку, умноженную на 3, и получим матрицу

$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -15 & -15 & -19 & -15 \\ 0 & 15 & 15 & 19 & 15 \\ 0 & 15 & 15 & 19 & 15 \end{array}\right).$$

Прибавим к третьей и четвертой строкам системы вторую строку, умноженную на 1, и получим матрицу

$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -15 & -15 & -19 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Данная система совместна и имеет бесконечное множество решений. Выразим переменные x_1, x_2 через переменные x_3, x_4:

$$\begin{cases} x_1+2x_2+2x_3+3x_4=1, \\ 15x_2+15x_3+19x_4=15. \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1=-2x_2-2x_3-3x_4+1, \\ 15x_2=-15x_3-19x_4+15. \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1=-2x_2-2x_3-3x_4+1, \\ x_2=-x_3-\frac{19}{15}x_4+1. \end{cases}$$

Подставим выражение для переменной x_2 в первое уравнение и найдем x_1:

$$x_1=-2\cdot(-x_3-\frac{19}{15}x_4+1)-2x_3-3x_4+1=2x_3+\frac{38}{15}x_4-2-2x_3-3x_4+1=-\frac{7}{15}x_4-1.$$

Таким образом, общее решение имеет вид

$$\begin{pmatrix} -1-\frac{7}{15}x_4 \\ 1-x_3-\frac{19}{15}x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix},$$

где x_3, x_4 могут принимать любые действительные значения.

Пример. Решить следующую систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3=-4, \\ x_1+2x_2-3x_3=0, \\ -2x_1-2x_3=3. \end{cases}$$

Решение. Составим расширенную матрицу системы и преобразуем ее:

$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 3 \end{array}\right).$$

Прибавим ко второй строке системы первую строку, умноженную на (–1), а к третьей –первую строку, умноженную на 2, и получим матрицу

$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -4 & -5 \end{array}\right).$$

Прибавим к третьей строке системы вторую строку, умноженную на (–2). В итоге получим матрицу

$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{array}\right).$$

Последней матрице соответствует следующая система, равносильная исходной:

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3=-4, \\ 0x_1+x_2-2x_3=4, \\ 0x_1+0x_2+0x_3=-13. \end{cases}$$

Эта система уравнений решений не имеет, так как получили уравнение $0x_1+0x_2+0x_3=-13$, которое не имеет решений.

2.5 Математические модели в социально-экономической сфере в виде систем линейных алгебраических уравнений

Пример. Предприятие планирует выпуск продукции трёх наименований A_j, j=1,2,3, на производство которой требуется три вида ресурсов b_i, i=1,2,3. Нормы затрат каждого вида ресурсов на изготовление единицы каждого наименования продукции задаются матрицей A. Найдите допустимый план выпуска продукции (усл. ед.), если предприятие располагает ресурсами в количестве единиц, заданном матрицей B, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 190 \\ 140 \\ 120 \end{pmatrix}.$$

Решение. Построим математическую модель данной задачи. Обозначим через x_1, x_2, x_3 количества планируемой к выпуску продукции соответственно первого, второго и третьего наименований. Определение допустимого плана выпуска продукции состоит в нахождении неотрицательного решения системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 190, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 140, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 120. \end{cases}$$

Решим полученную систему методом Гаусса. Для этого составим расширенную матрицу системы и преобразуем ее:

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 190 \\ 2 & 1 & 3 & 140 \\ 3 & 2 & 1 & 120 \end{array}\right].$$

Прибавим ко второй строке системы первую строку, умноженную на (–2), а к третьей –первую строку, умноженную на (–3), и получим

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 190 \\ 0 & -5 & -3 & -240 \\ 0 & -7 & -8 & -450 \end{array}\right].$$

Прибавим к третьей строке системы вторую строку, умноженную на (–7/5), и получим матрицу

$$\tilde{A} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 3 & 190 \\ 0 & -5 & -3 & -240 \\ 0 & 0 & -\frac{19}{5} & -114 \end{array}\right].$$

Последняя строка полученной матрицы равносильна уравнению $-\frac{19}{5}x_3 = -114$, , откуда $x_3 = -114 \cdot \left(-\frac{5}{19}\right) = 30.$

Вторая строка дает уравнение $-5x_2 - 3x_3 = -240$. Зная, что x_3 =30, найдем x_2: $-5x_2 - 3 \cdot 30 = -240$, тогда x_2 =30.

Первая строка последней матрицы соответствует уравнению $x_1+3x_2+3x_3 = 190$. Зная x_2 и x_3, можем определить x_1:

$$x_1 = 190 - 3\cdot30 - 3\cdot30 = 190 - 180 = 10.$$

Таким образом, допустимый план производства продукции составляет 10 усл. ед. первого, 30 усл. ед. второго и 30 усл. ед. третьего наименования.

Пример. В таблице приведены расценки на проведение работ для каждого вида услуг:

Виды работ	Нормативы по видам оборудования (число часов)			Полные затраты на эксплуатацию
	Механическое	Тепловое	Энергетическое	
Техническое обслуживание	3	1	4	85
Текущие услуги	2	2	3	82
Капитальный ремонт	10	20	15	580

Найдите расчетные объемы работ (число часов использования оборудования), которые смогут окупить затраты на эксплуатацию.

Решение. Пусть x_1 – количество часов работы механического оборудования, x_2 – теплового оборудования и x_3 –энергетического оборудования, чнеобходимое,чтобы окупить затраты на техническое обслуживание, текущие услуги и капитальный ремонт. Тогда из задачи получается система уравнений:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 85, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 82, \\ 10x_1 + 20x_2 + 15x_3 = 580. \end{cases}$$

Решим эту систему методом Крамера:

$$\Delta = |A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 10 & 20 & 15 \end{vmatrix} = -10, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 85 & 1 & 4 \\ 82 & 2 & 3 \\ 580 & 20 & 15 \end{vmatrix} = -120,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 85 & 4 \\ 2 & 82 & 3 \\ 10 & 580 & 15 \end{vmatrix} = -170, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 85 \\ 2 & 2 & 82 \\ 10 & 20 & 580 \end{vmatrix} = -80.$$

По формулам Крамера находим решение системы:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-120}{-10} = 12, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-170}{-10} = 17, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-80}{-10} = 8.$$

Тогда $X = \begin{pmatrix} 12 \\ 17 \\ 8 \end{pmatrix}$. Чтобы окупить затраты на эксплуатацию, оборудование должно иметь следующий объем работ: механическое оборудование –12 часов работы; тепловое оборудование – 17 часов; энергетическое оборудование – 8 часов.

Пример. Средняя численность населения трех областей республики Беларусь составляет 4500 тыс. человек. Согласно наблюдениям население этих трех областей возрастает с ежегодным коэффициентом прироста в 4, 7 и 3% для 1-й, 2-й и 3-й областей соответственно. Установлено, что общий прирост населения за первый год составит 200 тыс. человек и что прирост населения в первой области равен приросту населения в третьей. Найдите начальные численности населения в каждой из трех областей.

Решение. Пусть x_1 – начальная численность населения в первой области, x_2 – во второй области, x_3 –в третьей области. Тогда

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=4500, \\ 0,04x_1+0,07x_2+0,03x_3=200, \\ 0,04x_1-0,03x_3=0. \end{cases}$$

Решим полученную систему линейных алгебраических уравнений методом Гаусса. Для этого составим расширенную матрицу системы и выполним над ее строками следующие элементарные преобразования:

1) вторую и третью строки матрицы умножим на 100;
2) ко второй строке матрицы прибавим первую, умноженную на (-4); к третьей – первую, умноженную на (-4);
3) к третьей строке матрицы прибавим вторую, умноженную на $\frac{4}{3}$:

$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4500 \\ 0,04 & 0,07 & 0,03 & 200 \\ 0,04 & 0 & -0,03 & 0 \end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4500 \\ 4 & 7 & 3 & 20000 \\ 4 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4500 \\ 0 & 3 & -1 & 2000 \\ 0 & -4 & -7 & -18000 \end{array}\right)\approx$$

$$\approx\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4500 \\ 0 & 3 & -1 & 2000 \\ 0 & 0 & -\frac{25}{3} & -\frac{46000}{3} \end{array}\right).$$

По полученной в результате проведенных преобразований матрице составим систему:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=4500, \\ 3x_2-x_3=2000, \\ -\frac{25}{3}x_3=-\frac{46000}{3}. \end{cases}$$

Из третьего уравнения системы находим x_3=1840, второе уравнение дает

$$x_2=\frac{1}{3}(2000+x_3)=\frac{1}{3}(2000+1840)=1280,$$

а из первого уравнения получим

$$x_1 = 4500 - (x_2 + x_3) = 4500 - (1280 + 1840) = 1380.$$

Таким образом, первоначальная численность населения составляет 1380 тыс. человек в первой области, 1280 тыс. человек во второй области и 1840 тыс. человек в третьей области.

Пример (межотраслевой баланс производства). Рассмотрим взаимодействие n отраслей экономики. Каждая отрасль выпускает определенный продукт, для производства которого требуется продукция каждой из этих n отраслей. Пусть a_{ij} – объем продукции i-ой отрасли, необходимой для производства одной единицы продукта j-ой отрасли. Числа a_{ij}, где $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,n}$, называются *коэффициентами прямых затрат j-ой отрасли*, из них составляем матрицу коэффициентов затрат:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Пусть за определенный промежуток времени (например, за месяц или за год) первая отрасль производит x_1 единиц своей продукции, вторая отрасль – x_2 единиц своей продукции, и т.д., j-ая отрасль – x_j единиц своей продукции, $j = \overline{1,n}$. За это же время затраты i-ой отрасли составляют: $a_{i1}x_1$ – на производство x_1 единиц продукции первой отрасли, $a_{i2}x_2$ – на производство x_2 единиц продукции второй отрасли, …, $a_{i\,n}x_n$ – на производство x_n единиц продукции n-ой отрасли. Таким образом, полные затраты i-ой отрасли составят

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{i\,n}x_n, \; i = \overline{1,n}$$

(2.10)

Из величин $x_1, x_2, ..., x_n$ составим матрицу-столбец: $X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & .... & x_n \end{bmatrix}^T$. Он называется ***вектором валового выпуска***. Из (2.10) составим ***матрицу-столбец затрат***:

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n \end{bmatrix}.$$

Матрицу-столбец затрат можно записать в виде AX, где A – матрица коэффициентов затрат. Теперь, из всей произведенной продукции (матрица-столбец X) определенная часть (матрица затрат) расходуется на производство. Оставшаяся часть продукции может быть израсходована на непроизводственные цели (потребление и накопление). Эта оставшаяся часть называется ***конечным спросом***, пусть

$$X - AX = \overline{Y}\,. \qquad (2.11)$$

На практике обычно задается матрица $\overline{Y}$ и требуется найти решение матричного уравнения, т.е. надо так спроектировать производство (матрица *X*), чтобы получить заданную матрицу конечного спроса $\overline{Y}$. Заметим, что по смыслу задачи $x_i \ge 0,\ i = \overline{1, n}$. Из уравнения (2.11) получим матричное уравнение

$$(E - A)\cdot X = \overline{Y}\,,\ X \ge 0\,, \qquad (2.12)$$

которое называется ***моделью Леонтьева***.

Если решение системы (2.12) существует для любой неотрицательной матрицы $\overline{Y}$, то матрица *A* называется ***продуктивной матрицей***. Тогда

$$X = (E - A)^{-1}\cdot\overline{Y}\,.$$

Модель Леонтьева можно использовать для выяснения вопроса, каким должен быть объем производства, чтобы удовлетворить величину данного конечного спроса.

Прогноз выпуска продукции по запасам сырья. Решение таких задач нужны для прогнозов и оценок деятельности предприятий, производства, для экспертных оценок различных проектов, для планирования микроэкономики предприятий.

Пример. Данные баланса трех отраслей промышленности за некоторый период времени приведены в следующей таблице:

Отрасль	Потребление			Конечный спрос	Всего (ден. ед.)
	Добыча и переработка углеводородов	Энергетика	Машиностроение		
Добыча и переработка углеводородов	5	35	20	40	100
Энергетика	10	10	20	60	100
Машиностроение	20	10	10	10	50

Найдите объем валового выпуска каждого вида продукции, если конечное потребление по отраслям необходимо увеличить до 60, 70 и 30 ден. ед.

Решение. Пусть x_i – валовой выпуск продукции *i*, в нашем случае $i = 1, 2, 3$; y_i – конечный спрос на продукцию *i* ($i = 1, 2, 3$). Тогда матрицы-столбцы валового выпуска и конечного продукта имеют вид

$$X = \begin{bmatrix} 100 \\ 100 \\ 50 \end{bmatrix},\ Y = \begin{bmatrix} 40 \\ 60 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

При заданном увеличении конечного потребления новая матрица-столбец конечного продукта имеет вид

$$\overline{Y}=\begin{bmatrix}60\\70\\30\end{bmatrix}.$$

Очевидно, валовой выпуск продукции каждого вида должен быть равен сумме продукции, использованной при производстве всех видов продукции, и конечного спроса на эту продукцию, т.е.

$$x_i=\sum_{j=1}^{3}a_{i\,j}x_j+y_i,,\quad i=1,2,3,$$

где $a_{i\,j}$ – количества продукции i, используемой при производстве продукции j, $a_{i\,j}$ – коэффициенты прямых затрат. Последнее уравнение можно записать в матричном виде:

$$X=AX+\overline{Y},$$

где A – матрица коэффициентов прямых затрат, $a_{i\,j}>0$, X, $\overline{Y}$ – матрицы-столбцы.

Откуда $X-AX=\overline{Y}$ или $(E-A)\cdot X=\overline{Y}$.

$X=(E-A)^{-1}\cdot\overline{Y}$ – матричное решение поставленной задачи.

Определим матрицу A, для чего найдем ее элементы a_{ij}. Надо разделить объем продукции i, предназначенной отрасли j, на общий выпуск сектора j и получим количество продукции i, используемой при производстве единицы продукции вида j, т.е.

$$a_{ij}=\frac{x_{ij}}{x_j},\quad i,j=1,2,3.$$

Например, $a_{12}=\dfrac{35}{100}=0,35$, $a_{21}=\dfrac{10}{100}=0,1$. Таким образом, получим матрицу коэффициентов затрат:

$$A=\begin{pmatrix}0,05&0,35&0,4\\0,1&0,1&0,4\\0,2&0,1&0,2\end{pmatrix}.$$

Обозначим $E-A=B$. Имеем:

$$B=E-A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0,05&0,35&0,4\\0,1&0,1&0,4\\0,2&0,1&0,2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,95&-0,35&-0,4\\-0,1&0,9&-0,4\\-0,2&-0,1&0,8\end{pmatrix}.$$

Найдем матрицу B^{-1}, для этого:

1) $\det B=\begin{vmatrix}0,95&-0,35&-0,4\\-0,1&0,9&-0,4\\-0,2&-0,1&0,8\end{vmatrix}=0,514\neq 0,$ т.е. матрица B – невырожденная матрица и существует обратная матрица B^{-1};

2) составим матрицу $B_{i\,j}$, состоящую из алгебраических дополнений матрицы B:

$$B_{ij} = \begin{pmatrix} 0,68 & 0,16 & 0,19 \\ 0,32 & 0,68 & 0,165 \\ 0,5 & 0,42 & 0,82 \end{pmatrix}.$$

3) $B^{-1} = \dfrac{1}{\det B} \cdot (B_{ij})^T = \dfrac{1}{0,514} \cdot \begin{pmatrix} 0,68 & 0,16 & 0,19 \\ 0,32 & 0,68 & 0,165 \\ 0,5 & 0,42 & 0,82 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,323 & 0,623 & 0,973 \\ 0,311 & 1,323 & 0,817 \\ 0,37 & 0,321 & 1,595 \end{pmatrix}.$

Проверка показывает, что $BB^{-1} = B^{-1}B = E$.

Найдем теперь

$$X = B^{-1} \cdot \overline{Y} = (E - A)^{-1} \cdot \overline{Y} = \begin{pmatrix} 1,323 & 0,623 & 0,973 \\ 0,311 & 1,323 & 0,817 \\ 0,37 & 0,321 & 1,595 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 152,14 \\ 135,798 \\ 92,51 \end{pmatrix}..$$

Таким образом, для обеспечения заданного увеличения компонент вектора конечного продукта необходимо увеличить соответствующие валовые выпуски: добычу и переработку углеводородов – на 52,14 %, уровень энергетики – на 35,8 %, а выпуск продукции машиностроения – на 85 % по отношению к заданным.

2.6 Лабораторная работа 2. Решение СЛАУ. Модель Леонтьева.

Цель лабораторной работы: Изучить возможности работы с системами линейных алгебраических уравнений. Научиться определять совокупный выпуск по заданному спросу в модели межотраслевого баланса Леонтьева.

Задание 1. Решить систему методом обратной матрицы.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 4x_4 = 18 \\ -x_1 + 5x_2 + 5x_3 - 3x_4 = -11 \end{cases}$$

Рекомендации к выполнению:

1. На новом листе (название листа – **МетодОбратнойМатрицы**) создайте таблицу исходных данных:

	A	B	C	D	E	F
1	Матрица А					Матрица В
2	1	2	3	-1		0
3	2	-1	-1	0		1
4	3	1	-2	4		18
5	-1	5	5	-3		-11

2. Найдите обратную матрицу. Для этого выделите диапазон A9:D12 и вставьте функцию МОБР, указав в качестве массива матрицу А. Для получения массива данных необходимо нажимать Ctrl+Shift+Enter. Озаглавьте обратную матрицу (ячейки A8:D8).
3. Найдите неизвестные. Для этого выделите диапазон F9:F12 и вставьте функцию МУМНОЖ, укажите в качестве массива1 – обратную матрицу,

массива2 – матрицу свободных членов. Для получения массива данных необходимо нажимать Ctrl+Shift+Enter. Озаглавьте матрицу неизвестных (ячейка F8).

<u>Задание 2</u>. Решить систему методом Крамера.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 7x_3 - 2x_4 = 5 \\ 2x_1 - 3x_2 + 8x_3 - 4x_4 = 6 \\ 4x_1 + 2x_2 + 19x_3 + x_4 = 26 \\ 6x_1 + 11x_3 - 3x_4 = 14 \end{cases}$$

Рекомендации к выполнению:

1. На новом листе (название листа – **МетодКрамера**) создайте таблицу исходных данных:

	A	B	C	D	E	F
1	Матрица А					Матрица В
2	1	-1	7	-2		5
3	2	-3	8	-4		6
4	4	2	19	1		26
5	6	0	11	-3		14

2. В ячейке H5 вычислите определитель матрицы А.
3. Получите матрицу А1, следующим образом (в матрице А заменяется первый столбец): начиная с ячейки А9 скопируйте *<u>со связью</u>* матрицу В в первый столбец, 2-ой, 3-ий и 4-ый столбцы матрицы А – во 2-ой, 3-ий и 4-ый столбцы матрицы А1:

	A	B	C	D	E	F
1	Матрица А					Матрица В
2	1	-1	7	-2		5
3	2	-3	8	-4		6
4	4	2	19	1		26
5	6	0	11	-3		14
6						
7						
8	Матрица А1					
9	5	-1	7	-2		
10	6	-3	8	-4		
11	26	2	19	1		Определитель А1
12	14	0	11	-3		**-396**

4. Вычислите определитель матрицы А1.
5. Получите матрицу А2, начиная с ячейки А16 (в матрице А заменяется второй столбец). Вычислите определитель матрицы А2.
6. Аналогично получите матрицы А3 и А4, найдите их определители.
7. Найдите решение системы по формулам: Х1 = Определитель А1 / Определитель А, Х2 = Определитель А2 / Определитель А и т.д.

<u>Задание 3</u>. Определить совокупный выпуск для трехотраслевой модели экономики, для которой заданы следующие коэффициенты прямых затрат:

Отрасль	Сельское хозяйство	Промышленность	Транспорт
Сельское	0,21	0,05	0,48

хозяйство			
Промышленность	0,12	0,03	0,72
Транспорт	0,06	0,04	0,56

Конечная продукция (в денежных единицах) по каждой из отраслей составляет: сельское хозяйство – 100; промышленность – 150; транспорт – 120.

Рекомендации к выполнению:

1. Задайте условие задачи в ячейках A1:D4 и G2:G4.
2. Определите единичную матрицу в ячейках B8:D10:

	A	B	C	D
7				
8	Единичная матрица E	1	0	0
9		0	1	0
10		0	0	1
11				

3. Рассчитайте Элементы матрицы E-A в ячейках B14:D16.
4. С помощью функции МОБР вычислите обратную матрицу $(E\text{-}A)^{-1}$ в ячейках B20:D22.
5. С помощью функции МУМНОЖ рассчитайте вектор X в ячейках B26:B29.

<u>Задание 4.</u> Для условной экономики, состоящей из трех отраслей, за отчетный период известны межотраслевые потоки

$$X_{отч} = \begin{pmatrix} 400 & 300 & 200 \\ 250 & 300 & 160 \\ 100 & 450 & 120 \end{pmatrix}$$

и вектор конечного использования $У_{отч} = \begin{pmatrix} 250 \\ 530 \\ 400 \end{pmatrix}$

<u>Требуется.</u>

1. Построить схему межотраслевого баланса за отчетный период.
2. Вычислить коэффициенты прямых затрат и матрицу коэффициентов полных затрат.
3. Проверить продуктивность матрицы коэффициентов прямых затрат.
4. Вычислить матрицу коэффициентов полных затрат.
5. Определить, каким должен быть валовой выпуск продукции отраслей в плановом периоде, если известен вектор конечного использования $У_{пл} = \begin{pmatrix} 300 \\ 580 \\ 500 \end{pmatrix}$

Рекомендации к выполнению:

1. Запишите условие задачи в виде таблицы MS Excel.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Отрасли-	Отрасли-потребители			Промежуточное	Конечное	Валовый
2	производители	1	2	3	потребление	использование	выпуск
3	1	400	300	200		250	
4	2	250	300	160		530	
5	3	100	450	120		400	
6	Промежуточные затраты						
7	Валовая добавленная стоимость						
8	Валовый выпуск						
9							

2. Схема межотраслевого баланса.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Отрасли-	Отрасли-потребители			Промежуточное	Конечное	Валовый
2	производители	1	2	3	потребление	использование	выпуск
3	1	400	300	200	=СУММ(B3:D3)	250	=E3+F3
4	2	250	300	160	=СУММ(B4:D4)	530	=E4+F4
5	3	100	450	120	=СУММ(B5:D5)	400	=E5+F5
6	Промежуточные затраты	=СУММ(B3:B5)	=СУММ(C3:C5)	=СУММ(D3:D5)	=СУММ(E3:E5)	=СУММ(F3:F5)	=СУММ(G3:G5)
7	Валовая добавленная	=B8-B6	=C8-C6	=D8-D6	=СУММ(B7:D7)		
8	Валовый выпуск	=G3	=G4	=G5	=СУММ(B8:D8)		

3. Вычислите коэффициенты прямых затрат. $a_{ij} = \dfrac{x_{ij}}{x_j}$ $\quad i = \overline{1,n} \quad j = \overline{1,n}$

Матрица прямых затрат будет иметь вид:

1	Матрица прямых за			
2		=B3/$B$8	=C3/$C$8	=D3/$D$8
3		=B4/$B$8	=C4/$C$8	=D4/$D$8
4		=B5/$B$8	=C5/$C$8	=D5/$D$8
5				

0,3478	0,2419	0,1869
0,2174	0,2419	0,1495
0,0870	0,3629	0,1121

Задайте единичную матрицу и вычислите элементы матрицы *E-A*. Матрица *E-A* равна:

0,6522	-0,2419	-0,1869
-0,2174	0,7581	-0,1495
-0,0870	-0,3629	0,8879

4. Проверьте продуктивность матрицы А.

Способ 1.

Достаточным признаком продуктивности матрицы является ограничение на величину ее нормы, т.е. на величину наибольшей из сумм элементов матрицы A в каждом столбце. Если норма матрицы A строго меньше единицы, то эта матрица является продуктивной и тогда существует обратная матрица для матрицы (E-A). В нашем случае это условие выполняется.

Способ 2.

Вычислите определитель матрицы E-A. Так как определитель E-A равен 0,3266, обратная матрица $B=(E\text{-}A)^{-1}$ существует.

5. Вычислите обратную матрицу $B=(E\text{-}A)^{-1}$ Матрица коэффициентов полных затрат:

1,8944	0,8653	0,5445
0,6307	1,7229	0,4230
0,4433	0,7890	1,3525

Рассчитайте вектор X валового выпуска продукции

1342,44
1399,98
1266,87

Задание 5. Пусть экономика условно состоит из трех отраслей: промышленность, сельское хозяйство и прочие отрасли. На плановый период заданы матрица коэффициентов прямых и вектор конечной продукции:

Матрица прямых затрат		
0,3	0,25	0,2
0,15	0,12	0,03
0,1	0,05	0,08

Конечное потребление
55
20
12

Требуется рассчитать:

1. плановые объемы валовой продукции;
2. величины межотраслевых потоков;
3. условно-чистую продукцию (валовую добавленную стоимость).

Требуется:

1. Представить результаты в форме межотраслевого баланса.
2. Проверить продуктивность матрицы А.
3. Определить матрицу коэффициентов полных материальных затрат.

Рекомендации к выполнению:

1. В таблице Excel записываем матрицу A прямых затрат и строим таблицу межотраслевого баланса.

	A	B	C	D	E	F	G
1		Матрица прямых затрат					
2		0,3	0,25	0,2			
3		0,15	0,12	0,03			
4		0,1	0,05	0,08			
5							
6							
7	Отрасли-производители	Отрасли-потребители			Промежуточное потребление	Конечное потребление	Валовый выпуск
8		промышленность	сельское хозяйство	прочие отрасли			
9	промышленность					55	
10	сельское хозяйство					20	
11	прочие отрасли					12	
12	Промежуточные затраты						
13	Валовая добавленная стоимость						
14	Валовый выпуск						
15							

2. Изменяемыми ячейками будут B14:C14, в которых находятся объемы валового выпуска (можно задать начальные значения, например 100).

3. В ячейках B9:D11 записываем межотраслевые потоки x_{ij}, которые вычисляются по формулам

$$x_{ij} = a_{ij} \cdot x_j \quad i = \overline{1,n} \;\; j = \overline{1,n}$$

4. Ячейки B9:D11 суммируем по строкам и результаты заносим в ячейки E9:E11, суммируем по столбцам и результаты заносим в ячейки B12: D12.

5. В ячейках B12:D12 записываем валовую добавленную стоимость, которая
вычисляется по формулам:

$$v_j = x_j - \sum_{i=1}^{n} x_{ij} \quad j = \overline{1,n} \, .$$

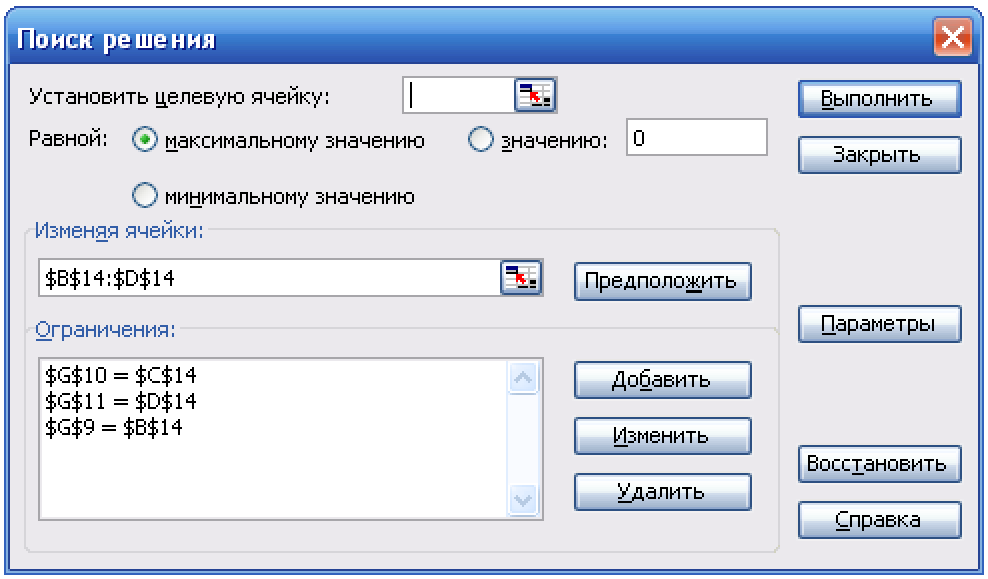
6. Рассчитываем объемы валового выпуска по уравнению Леонтьева, записывая

соответствующие уравнения в ячейках G9:G11 по формулам

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i \quad i = \overline{1,n} \, .$$

6							
7	Отрасли-производители	Отрасли-потребители			Промежуточное потребление	Конечное потребление	Валовый выпуск
8		промышленность	сельское хозяйство	прочие отрасли			
9	промышленность	30	25	20	75	55	130
10	сельское хозяйство	15	12	3	30	20	50
11	прочие отрасли	10	5	8	23	12	35
12	Промежуточные затраты	55	42	31	128	87	215
13	Валовая добавленная стоимость	45	58	69	172		
14	Валовый выпуск	100	100	100	300		
15							

7. Устанавливаем надстройку *Поиск решения,* в которой отмечаем *Изменяемые ячейки* B14:C14 и вносим ограничения, определяемые уравнениями Леонтьева.



8. После выполнение получается следующий результат.

6							
7	Отрасли-производители	Отрасли-потребители			Промежуточное потребление	Конечное потребление	Валовый выпуск
8		промышленность	сельское хозяйство	прочие отрасли			
9	промышленность	30,18510899	10,1927364	5,239184626	45,61703002	55	100,61703
10	сельское хозяйство	15,09255449	4,89251348	0,785877694	20,77094566	20	40,7709457
11	прочие отрасли	10,061703	2,03854728	2,09567385	14,19592413	12	26,1959241
12	Промежуточные затраты	55,33936647	17,1237972	8,12073617	80,58389982	87	167,5839
13	Валовая добавленная стоимость	45,27766348	23,6471485	18,07518696	86,99999891		
14	Валовый выпуск	100,61703	40,7709456	26,19592313	167,5838987		
15							

9. Проверьте продуктивность матрицы A (двумя способами).
10. Найдите матрицу полных затрат $B=(E–A)^{-1}$.

1,5804	0,4694	0,3589
0,2758	1,2204	0,0997
0,1868	0,1173	1,1314

Примеры решения задач

1. Решить систему линейных уравнений методом Крамера: $\begin{cases} x+2y+3z=6, \\ 4x+5y+6z=9, \\ 7x+8y=-6. \end{cases}$

Решение. Найдём определитель матрицы системы:

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 27 \neq 0.$$

Далее находим следующие определители:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 9 & 5 & 6 \\ -6 & 8 & 0 \end{vmatrix} = -54, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 4 & 9 & 6 \\ 7 & -6 & 0 \end{vmatrix} = 27, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 4 & 5 & 9 \\ 7 & 8 & -6 \end{vmatrix} = 54.$$

Воспользуемся формулами Крамера:

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-54}{27} = -2; \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{27}{27} = 1; \quad z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{54}{27} = 2.$$

2. Решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Решение. Запишем расширенную матрицу системы:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 6 \\ 3 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Прибавим ко второй строке системы первую строку, умноженную на (–2), к третьей – первую строку, умноженную на (–1), а к четвёртой – первую строку, умноженную на (–3), и получим

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 5 & -4 & -7 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & 4 & -4 & -12 \end{array}\right).$$

Поменяем местами вторую и третью строки:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 5 & -4 & -7 \\ 0 & -4 & 4 & -4 & -12 \end{array}\right).$$

Прибавим к третьей строке системы вторую строку, умноженную на (–3), а к четвёртой – вторую строку, умноженную на (–4):

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & -7 & -13 \\ 0 & 0 & 4 & -8 & -20 \end{array}\right).$$

Последнюю строку разделим на 4:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & -7 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 \end{array}\right).$$

Поменяем местами третью и четвертую строки системы:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 5 & -7 & -13 \end{array}\right).$$

Умножим третью строку системы на (–5) и прибавим к четвёртой строке:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 12 \end{array}\right).$$

Последней матрице соответствует следующая система, равносильная исходной:

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3+x_4=4, \\ -x_2+0x_3+x_4=2, \\ x_3-2x_4=-5, \\ 3x_4=12. \end{cases}$$

Найдём поочерёдно неизвестные:

$$\begin{cases} x_4=4, \\ 3x_3=2x_4-5, \\ x_2=x_4-2, \\ x_1=-x_2+x_3-x_4+4. \end{cases}$$

Итак, решение системы:

$$\begin{cases} x_4=4, \\ x_3=3, \\ x_2=2, \\ x_1=1. \end{cases}$$

3. Решить следующую систему уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1+\ \ x_2-3x_3=\ 5, \\ 2x_1-3x_2+2x_3=-3, \\ 3x_1-2x_2-\ \ x_3=7. \end{cases}$$

Решение. Составим расширенную матрицу системы и преобразуем ее: первую строку умножаем на (–2) и складываем со второй строкой, далее первую умножаем на (–3) и складываем с третьей, получаем эквивалентную матрицу, в которой работаем со второй и третьей строками:

$$\tilde{A}=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 5 \\ 2 & -3 & 2 & -3 \\ 3 & -2 & 1 & 7 \end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & -5 & 8 & -13 \\ 0 & -5 & 8 & -8 \end{array}\right] \approx \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & -5 & 8 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right].$$

Последней матрице соответствует следующая система, равносильная исходной:

$$\begin{cases} x_1+\ \ x_2-3x_3=\ \ \ 5, \\ \qquad -5x_2+8x_3=-13, \\ 0x_1+0x_2+0x_3=\ \ \ 5. \end{cases}$$

Эта система уравнений решений не имеет, так как получили уравнение $0x_1+0x_2+0x_3=5$, которое не имеет решений.

4. Решить систему линейных уравнений методом обратной матрицы:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8. \end{cases}$$

Решение. Представим систему в матричном виде $AX=B$, где

матрица $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, матрица $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, матрица $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 11 \\ 8 \end{bmatrix}$.

Вычислим определитель матрицы A, $\det A = 5 \neq 0$ (проверить самостоятельно**)**, таким образом, матрица A невырожденная и существует обратная матрица A^{-1} вида (проверить самостоятельно):

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

По формуле $X=A^{-1}B$ найдем марицу

$$X = \frac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 11 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Таким образом $x_1 = 4$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$.

5. Решить следующую систему линейных уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 1, \\ 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 - x_4 = -5, \\ -x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 12, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 10x_4 = 8. \end{cases}$$

Решение. Составим расширенную матрицу системы и преобразуем ее:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & -7 & 1 \\ 2 & -3 & -3 & -1 & -5 \\ -1 & 1 & 1 & -2 & 12 \\ 2 & -1 & 2 & -10 & 8 \end{array} \right).$$

Прибавим к второй строке системы первую строку, умноженную на (–2), к третьей –первую строку, умноженную на 1, а к четвертой –первую строку, умноженную на (–2), и получим матрицу

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & -7 & 1 \\ 0 & -5 & -11 & 13 & -7 \\ 0 & 2 & 5 & -9 & 13 \\ 0 & -3 & -6 & 4 & 6 \end{array} \right).$$

Сложим третью и четвертую строки системы:

$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & -7 & 1 \\ 0 & -5 & -11 & 13 & -7 \\ 0 & 2 & 5 & -9 & 13 \\ 0 & -1 & -1 & -5 & 19 \end{array}\right).$$

Поменяем вторую и четвертую строки местами, и вторую строку разделим на (–1):

$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & -7 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & -19 \\ 0 & 2 & 5 & -9 & 13 \\ 0 & -5 & -11 & 13 & -7 \end{array}\right).$$

Прибавим к третьей и четвертой строкам системы вторую строку, умноженную на (–2) и 5 соответственно, получим матрицу

$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & -7 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & -19 \\ 0 & 0 & 3 & -19 & 51 \\ 0 & 0 & -6 & 38 & -102 \end{array}\right).$$

Прибавим к четвертой строке системы третью строку, умноженную на 2, получим матрицу

$$\tilde{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 4 & -7 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 & -19 \\ 0 & 0 & 3 & -19 & 51 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Данная система совместна и имеет бесконечное множество решений. Выразим переменные x_1, x_2, x_3 через переменную x_4:

$$\begin{cases} x_1+x_2+4x_3-7x_4=1, \\ x_2+x_3+5x_4=-19, \\ 3x_3-19x_4=51. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=-(x_2+4x_3-7x_4)+1, \\ x_2=-(x_3+5x_4)-19, \\ x_3=\dfrac{19}{3}x_4+17. \end{cases}$$

Подставим выражение для переменной x_3 во второе уравнение и найдем x_2:

$$x_2=-19-(x_3+5x_4)=-19-(17+\frac{19}{3}x_4+5x_4)=-36-\frac{34}{3}x_4.$$

Из первого уравнения находим x_1:

$$x_1=1-(x_2+4x_3-7x_4)=1-(-36-\frac{34}{3}x_4+4\cdot(17+\frac{19}{3}x_4)-7x_4)=-31-7x_4\,.$$

Таким образом, общее решение имеет вид:

$$\begin{pmatrix} -31-7x_4 \\ -36-\dfrac{34}{3}x_4 \\ 17+\dfrac{19}{3}x_4 \\ x_4 \end{pmatrix},$$

где x_4 может принимать любые действительные значения.

Задачи для самостоятельного решения

1. Решите систему линейных уравнений при помощи обратной матрицы:

а) $\begin{cases} x_1 - x_2 = 3, \\ x_1 + 2x_2 = 6. \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + y + z = 2, \\ 2x - y - 6z = -1, \\ 3x - 2y = 8. \end{cases}$

2. Решите системы линейных уравнений по формулам Крамера и при помощи метода Гаусса:

а) $\begin{cases} x_1 - x_2 = 3, \\ x_1 + 2x_2 = 6; \end{cases}$ е) $\begin{cases} 3x + 2y - z = 0, \\ 2x - y + 3z = 0, \\ x + y - z = 0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x + y + z = 2, \\ 2x - y - 6z = -1, \\ 3x - 2y = 8; \end{cases}$ ж) $\begin{cases} -x + 2y - z = 0, \\ 2x - y + z = 2, \\ 3x + y - 3z = 1; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 9x + 2y = 3, \\ 7x - 2y = 13; \end{cases}$ з) $\begin{cases} 4x - y + 2z = 7, \\ x + y + 2z = 3, \\ -x + 3y - 3z = 1; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 5x + 9y = 2, \\ 6x + 7y = 10; \end{cases}$ и) $\begin{cases} x - 2y + z = 1, \\ 2x - y + z = 4, \\ 3x + 2y - 3z = 5; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x + 2y - z = 4, \\ 2x + y + z = 5, \\ x - z = 0; \end{cases}$ к) $\begin{cases} 3x - 2y - z = -1, \\ x + 2y + 4z = 11, \\ 2x + 4y - 3z = 0. \end{cases}$

3. Решите системы линейных уравнений методом Гаусса:

а) $\begin{cases} 4x_1+x_2-x_4=-9, \\ x_1-3x_2+4x_3=-7, \\ 3x_2-2x_3+4x_4=12, \\ x_1+2x_2-x_3-3x_4=0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x-y+2z=2, \\ 4x-3y+3z=3, \\ x+3y=0, \\ 5x+3z=3. \end{cases}$

4. Решите систему линейных алгебраических уравнений методом Гаусса:

$$\begin{cases} 3x_1-2x_2-5x_3+x_4-x_5=3, \\ 2x_1-3x_2+x_3+5x_4+2x_5=-3, \\ x_1+2x_2-4x_4=-3, \\ x_1-x_2-4x_3+9x_4=22, \\ x_1-2x_2-x_3+x_5=2. \end{cases}$$

5. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1-5x_2+6x_3=18, \\ 2x_1+2x_2+5x_3=10, \\ 5x_1-3x_2+2x_3=12; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1-5x_2+4x_3=2, \\ -x_1+2x_2+5x_3=-8, \\ 2x_1-3x_2+2x_3=3; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x_1+2x_2+4x_3=3, \\ 3x_1+2x_2-x_3=-3, \\ 2x_1-3x_2+2x_3=12; \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x_1+3x_2+x_3=3, \\ x_1-x_2-x_3=-2, \\ 3x_1-3x_2+3x_3=6; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1-5x_2+12x_3=21, \\ x_1-x_2-x_3=-1, \\ x_1+3x_2+2x_3=9. \end{cases}$$

6. Предприятие выпускает три вида изделий, используя при этом сырьетрех типов. Нормы расхода сырья по видам изделий указаны в таблице:

Тип сырья	Норма расхода сырья на одно изделие по видам:		
	1-й вид	2-й вид	3-й вид
I	4	5	6
II	1	2	3
III	0	1	4

Требуется определить объем выпуска продукции каждого вида, если известно, что запас сырья I типа составляет 5500 единиц, II типа – 2050 единиц, III – 1400 единиц. Указанные запасы сырья должны быть использованы полностью.

7. Предприятие планирует выпуск продукции трех видов наименований X_1, X_2, X_3, на производство которой требуется три вида ресурсов I, II, III. Нормы затрат каждого вида ресурсов на изготовление единицы каждого наименования продукции задаются матрицей A. Найдите допустимый план выпуска продукции (усл. ед.), если предприятие располагает ресурсами в количестве единиц, заданным матрицей B, если

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 190 \\ 140 \\ 120 \end{pmatrix}.$$

8. Иванов, Петров и Сидоров купили три вида продуктов соответственно 2, 5 и 4 кг; 6, 2 и 3 кг; 1, 4 и 7 кг. Иванов уплатил 27 ден. ед., Петров – 23,5 ден. ед. и Сидоров – 34 ден. ед. Найдите цены этих продуктов.

9. Матрица перераспределения населения между пятью районами имеет вид

$$\begin{pmatrix} 10 & 25 & 16 & 14 & 9 \\ 6 & 7 & 11 & 5 & 12 \\ 14 & 8 & 3 & 21 & 2 \\ 31 & 16 & 13 & 6 & 17 \\ 15 & 4 & 19 & 24 & 23 \end{pmatrix}$$

Известно, что в районах 2 и 4 проживало первоначально 153 и 211 человек соответственно. Определите количество человек, проживающих в данных районах после перераспределения.

10. Решите матричные уравнения:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} - 2X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; г) $X \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & 6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

10. Докажите, что решением матричного уравнения $A{\cdot}X{\cdot}C=B$ является матрица $X = A^{-1} \cdot B{\cdot}C^{-1}$.

Вопросы для самоконтроля

1. Может ли матричное уравнение $AX=B$ иметь одно решение? Два решения? Ни одного решения?
2. Какая система линейных уравнений называется совместной?
3. Какая система линейных уравнений называется определенной?
4. Какая система линейных уравнений называется однородной?
5. Что называется общим решением системы? Частным решением системы?
6. Что такое расширенная матрица системы?
7. Множества решений двух систем линейных уравнений совпадают. Равны ли расширенные матрицы этих систем?
8. Могут ли быть эквивалентными две системы линейных уравнений с одинаковым числом неизвестных, но с разным числом уравнений?
9. Может ли множество решений системы линейных уравнений состоять ровно из одного решения? Из двух решений? Из 17 решений?
10. Какие методы решения систем линейных уравнений вы знаете?
11. Могут ли различные методы решения системы линейных уравнений (метод Крамера и метод обратной матрицы) дать различные ответы?
12. Верно ли утверждение: Однородная система всегда совместна?

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахтямов, А.М. Математика для социологов и экономистов: учеб.пособие / А.М. Ахтямов. – М.: Физматлит, 2004. – 464 с.
2. Велько, О.А. Основы высшей математики для социологов: Учебно-методическое пособие / О.А. Велько, М.В. Мартон, Н.А. Моисеева. – Минск: БГУ, 2020. – 303 с.
3. Велько, О. А. Основы высшей математики и теории вероятностей: учебная программа УВО по учебной дисциплине по специальности 1-23 01 15 Социальные коммуникации [Электронный ресурс] / О.А. Велько // Белорусский государственный университет. – Минск, 2021. – Режим доступа: https://elib.bsu.by/handle/123456789/269619. – Дата доступа: 2.07.2021.
4. Велько, О.А. Основы высшей математики. Учебная программа УВО для специальности 1-23 01 05 Социология [Электронный ресурс] / О.А. Велько, Н.А. Моисеева // Белорусский государственный университет. – Минск, 2019. – Режим доступа:http://elib.bsu.by/handle/123456789/233274. – Дата доступа: 12.07.2019.
5. Велько, О. А. Основы высшей математики : электронный учебно-методический комплекс для специальности 1-23 01 05 «Социология» / О. А. Велько, Н. А. Моисеева; БГУ, Механико-математический фак., Каф. общей математики и информатики. – Минск: БГУ, 2020. – 257 с.: ил. – Библиогр.: с. 255–257. [Электронный ресурс]. – 2020. – Режим доступа: http://elib.bsu.by/handle/123456789/241078. Дата доступа: 06.03.2020.
6. Гусак А.А. Высшая математика. Т2. – Мн.: Университетское, 1998.
7. Гусак А.А., Бричикова Е.А. Справочное пособие к решению задач: теория вероятностей. – Мн.:ТетраСистем, 1999.
8. Еровенко, В. А. Основы высшей математики: типовая учебная программа для высших учебных заведений по специальности 1-23 01 05 «Социология» / В. А. Еровенко, М.В. Мартон, О.А. Велько // Типовая учебная программа располагается в коллекциях: Кафедра общей математики и информатики. [Электронный ресурс]. – 2019. – Режим доступа: – http://elib.bsu.by/handle/123456789/218164.
9. Еровенко, В.А. Избранные главы курса «Основы высшей математики» для философов: Методическое пособие для студентов-заочников / В.А. Еровенко, М.В. Мартон. – Минск: БГУ, 2009. – 68 с.

10. Карасев А.И., Аксютина З.М., Савельева Т.И. Курс высшей математики для экономических вузов. Ч2. – М.: Высшая школа, 1982.
11. Лунгу, К.Н. Сборник задач по высшей математике. 1 курс. / К.Н. Лунгу и [и др.]. – 3-е изд., испр. и доп. – М.: Айрис-пресс, 2004. – 576с.
12. Малыхин В.И. Математика в экономике. – М.: Инфра-М, 2001.
13. Матейко, О.М. Высшая математика для географов : учеб. Пособие : в 2 ч. / О.М. Матейко, А.Н. Таныгина. – Минск: БГУ, 2012. – Ч. 1. – 271 с.
14. Матейко, О.М. Высшая математика для географов : учеб. Пособие : в 2 ч. / О.М. Матейко, А.Н. Таныгина. – Минск: БГУ, 2013. – Ч. 2. – 175 с.
15. Моисеева, Н. А. Основы высшей математики : электронный учебно-методический комплекс для специальности 1-23 01 15 «Социальные коммуникации» / Н. А. Моисеева, О. А. Велько; БГУ, Механико-математический фак., Каф. общей математики и информатики. – Минск: БГУ, 2020. – 193 с.: ил. – Библиогр.: с. 191–193. [Электронный ресурс]. – 2020. – Режим доступа: http://elib.bsu.by/handle/123456789/241081. Дата доступа: 06.03.2020.
16. Моисеева, Н. А. Основы высшей математики и теории вероятностей : электронный учебно-методический комплекс для специальности: 1-23 01 15 «Социальные коммуникации» [Электронный ресурс] / Н. А. Моисеева, О. А. Велько ; БГУ, Механико-математический фак., Каф. общей математики и информатики. – Минск : БГУ, 2021. – 239 с. : ил., табл. – Библиогр.: с. 238–239. – Режим доступа: https://elib.bsu.by/handle/123456789/274772: 26.01.2022.
17. Путькина, Л. В. Информатика и математика для гуманитарных вузов : учеб.пособие / Л. В. Путькина, Т. Г. Пискунова, Т. Б. Антипова. – Санкт-Петербург: СПбГУП, 2014. – 236 с. : ил.
18. Суходольский, Г.В. Лекции по высшей математике для гуманитариев: учеб. пособие / Г.В. Суходольский. – Харьков: Изд-во Гуманитарный Центр, 2001. – 248 с.