Министерство образования Республики Беларусь
Белорусский государственный университет
Механико-математический факультет
Кафедра общей математики и информатики

М. В. Мартон, О. А. Велько, Н. А. Моисеева

Основы математического анализа в социально-экономической сфере

Учебно-методическое пособие

Минск
БГУ
2023

УДК 316:517(075.8)
М 293

Решение о депонировании вынес:
Совет механико-математического факультета
Протокол № 6 от 28 февраля 2023 года

Авторы:
Мартон Марина Владимировна, кандидат физико-математических наук, доцент;
Велько Оксана Александровна, старший преподаватель;
Моисеева Наталья Александровна, старший преподаватель.

Рецензенты:
Барвенов С.А., доцент кафедры веб-технологий и компьютерного моделирования Механико-математического факультета БГУ, кандидат физико-математических наук, доцент;
Гулина О.В., заместитель декана факультета экономики и менеджмента учреждения образования «Белорусский государственный экономический университет», кандидат физико-математических наук, доцент.

Мартон, М. В. Основы математического анализа в социально-экономической сфере : учебно-методическое пособие / М. В. Мартон, О. А. Велько, Н. А. Моисеева ; БГУ, Механико-математический фак., Каф. общей математики и информатики. – Минск : БГУ, 2023. – 79 с. : ил. – Библиогр.: с. 78–79.

Учебно-методическое пособие предназначено для студентов факультета философии и социальных наук БГУ специальностей «Социология», «Социальные коммуникации». Каждая тема содержит исторические сведения, теоретический материал, примеры решения, задачи для самостоятельного решения и вопросы для самоконтроля. Многие математические понятия иллюстрируются примерами из социологии и экономики.

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

Сегодня мы не можем отрицать наличие междисциплинарных связей между социологией и математикой. И в последние годы эта связь становится все более тесной и многоплановой. Изучение математики будущими социологами и специалистами по социальным коммуникациям, а также применение ими современных математических методов анализа социальной реальности способствует более успешному формированию у студентов профессиональной компетентности, умению задействовать межпредметные связи, осуществлению преемственности в изучении математических понятий, развитию критического и прогностического мышления.

Математические методы уже давно и с успехом применяются в социальных науках. Процесс математизации науки необратим, он захватывает такие области знаний, в которых совсем недавно исключалась возможность использования математических методов исследования и измерений. Сегодня развитие теории и успешность практических приложений любой науки в значительной степени предопределяются мерой математизации данной области знаний. Математика занимает важное место в общественной жизни, культуре, науке и является одной из важнейших составляющих мирового научно-технического прогресса и информатизации современного общества. Изучение математики развивает познавательные способности и логическое мышление, а также влияет на изучение других дисциплин. Математические методы позволяют также систематизировать и классифицировать результаты исследований, определять сходство и различие между процессами взаимодействия в различных природных условиях, вероятностную зависимость между явлениями, выделять ведущие факторы, действующие на развитие процесса, создавать математические модели процессов или явлений в социологии.

Данное учебное пособие написано на основе опыта чтения лекций и ведения практических занятий по математическим дисциплинам в течение ряда лет на факультете философии и социальных наук Белорусского государственного университета. В пособии большое внимание уделено решению типовых примеров и задач, поясняющих теоретический материал, причем многие изучаемые математические понятия иллюстрируются приложениями из социологии. Некоторые задачи, рассмотренные в пособии и предложенные для самостоятельного решения, подобраны так, чтобы показать возможность применения математических знаний в сфере будущей профессиональной деятельности студентов. Еще одна особенность настоящего пособия в том, что авторы сочли полезным дать историческую справку, где кратко сообщается история развития изучаемых понятий, обсуждается их значимость в науке. Это кажется важным и актуальным, поскольку дает студенту представление о математике как области культуры человечества, знакомит с именами и историческими событиями, которые сопутствовали становлению математики.

Традиционно считают, что использование математики в социальных науках выражается в получении только количественных характеристик. Такое понимание крайне упрощено, поскольку количественные определенности всегда связаны с качественными. Конкретные социологические исследования могут успешно развиваться и будут иметь практическое и теоретическое значение только в том случае, если они используют математические методы при анализе различных механизмов социальных процессов, а также при сборе и обработке первичной социальной информации.

В пособии «Основы математического анализа и применение в социально – экономической сфере» показано, как спрогнозировать социально-экономические и предельные показатели в микроэкономике. Возможно сопровождение изучаемого математического материала примерами из специальных дисциплин, с образцами его применения в будущей профессиональной деятельности. Одной из инновационных технологий является оргдеятельностная технология, основанная на организации эвристической (обучение через открытия), диалоговой, продуктивной деятельности каждого обучающегося. Подобная деятельность приводит к созданию участником собственных образовательных продуктов, как внешних (самостоятельное составление примеров и задач по выбранной теме, составление кроссвордов, подготовка наглядных пособий, мультимедийных презентаций по изучаемым темам курса), так и внутренних, включая развитие коммуникативных, эвристических качеств его личности, обеспечивает самореализацию, а потому мотивацию к учебной деятельности.

Эвристический метод применяется для активизации творческой деятельности обучающихся через систему творческих заданий. Этот метод способствует лучшему пониманию и закреплению в памяти тех материалов, с которыми обучающийся ознакомился в процессе выполнения задания по дисциплине.

Авторы разработали эвристические задания открытого типа на очно-дистанционной программе повышения квалификации «Технологии эвристического обучения в высшей школе «Методика обучения через открытие: Как обучать всех по-разному, но одинаково» БГУ. Автор и ведущий программы повышения квалификации: Король А.Д., ректор БГУ, доктор педагогических наук, профессор.

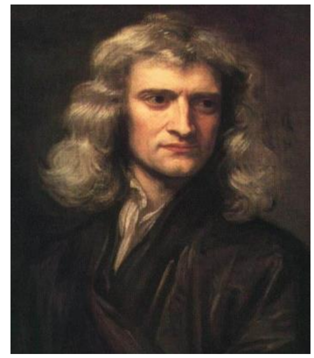
1. Функции одной вещественной переменной, пределы

1.1. Основные сведения о функциях

Основу математического анализа составляют дифференциальное и интегральное исчисления. Заслуга открытия дифференциального и интегрального исчисления принадлежит И. Ньютону и Г. Лейбницу.

Понятие функции возникло тогда, когда люди впервые поняли, что окружающие их явления взаимосвязаны. Однако строгое математическое определение понятия функции появилось лишь в конце XVII века в трудах Лейбница и Нью́тона.

Когда мы наблюдаем какой-нибудь процесс или явление из области экономики или социологии, то видим, что одни величины сохраняют свои значения, другие же принимают различные значения.



Готфрид Вильгельм Лейбниц ***Исаа́к Нью́тон***

Переменной называется величина, которая при выполнении некоторого комплекса условий может принимать различные значения. ***Постоянной*** называется величина, которая при выполнении некоторого комплекса условий, сохраняет одно и то же значение. Отметим, что выполнение комплекса условий является очень важным. Так, одна и та же величина может быть переменной или постоянной в зависимости от того, в каких условиях она рассматривается. Например, цена на хлеб (и некоторые другие продукты) в условиях рыночной экономики является величиной переменной. В условиях жесткого планирования экономики цена на хлеб может держаться на одном уровне и быть постоянной величиной (в 70-е гг. цена на хлеб была постоянной, буханка серого хлеба стоила 16 коп.).

Изучая какое-нибудь явление, мы обычно имеем дело с совокупностью переменных величин, которые связаны между собой так, что каждым значениям одних величин соответствуют значения других. Так, например, ясно, что:

1) каждому значению цены товара соответствует определенная величина спроса;
2) каждому году соответствует сумма накопившегося денежного вклада;
3) интенсивность ощущения зависит от интенсивности раздражителя.

Во всех этих примерах общим является то, что каждому числовому значению одной величины сопоставляется определенное числовое значение другой.

Дадим определение функции – центрального понятия математического анализа.

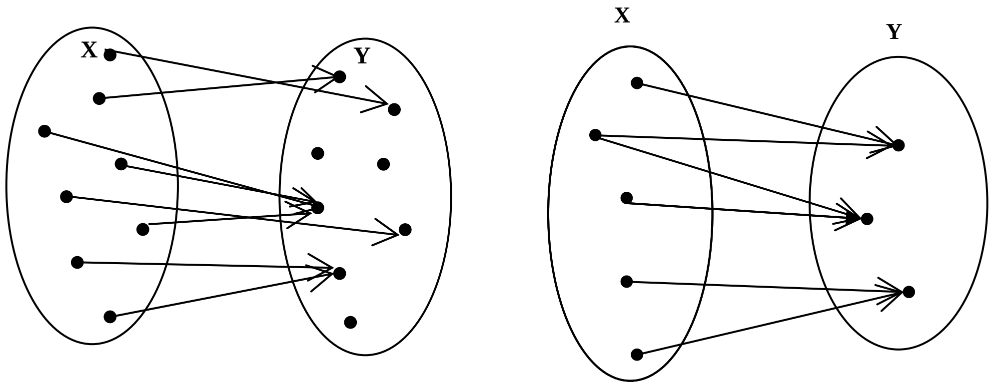
Пусть X и Y – непустые множества. Пусть x – произвольный элемент множества X, y – произвольный элемент множества Y, т.е. $x \in X$, $y \in Y$.

Соответствие f, которое каждому элементу x множества X сопоставляет только один элемент y множества Y, называется ***функцией***. Записывается так: $y = f(x)$ или $f : X \to Y$.

При этом элементы y, или $f(x)$, из множества Y называются ***значениями функции***, а элементы x из X – ***значениями аргумента***.

Пример. Пусть X – множество студентов-социологов, $Y=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ – множество оценок по десятибалльной системе. Тогда можно задать функцию $y = f(x)$, которая каждому студенту $x \in X$ будет ставить в соответствие некоторую оценку $y \in Y$.

Упражнение. Какое из заданных соответствий является функцией?



Множество X называется ***областью определения*** функции f и обозначается через $D(f)$. Множество всех $y \in Y$, являющихся значениями функции f в точках $x \in X$, называется ***множеством значений*** функции f и обозначается через $E(f)$.

Функция, у которой область определения и область значений – числовые множества, называется ***числовой функцией***.

Графиком функции $\boldsymbol{y = f(x)}$ называется множество всех точек координатной плоскости с координатами $(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{f(x)})$, т.е. абсциссами является значения переменной x, *а* ординатами – соответствующие им значения функции y.

Пример. Графиком функции $y = \sqrt{9 - x^2}$ является верхняя полуокружность радиуса $R = 3$ с центром в начале координат.

Упражнение. Какие из приведённых ниже рисунков (рис. 1.1) являются графиками функций?

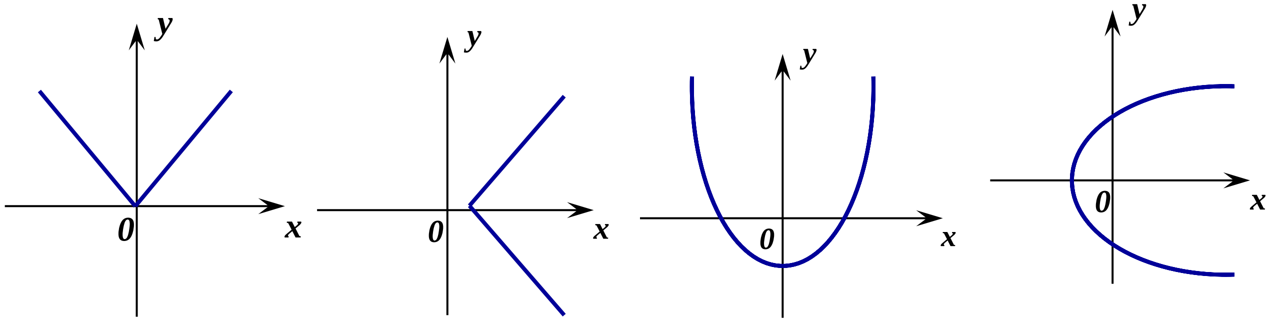
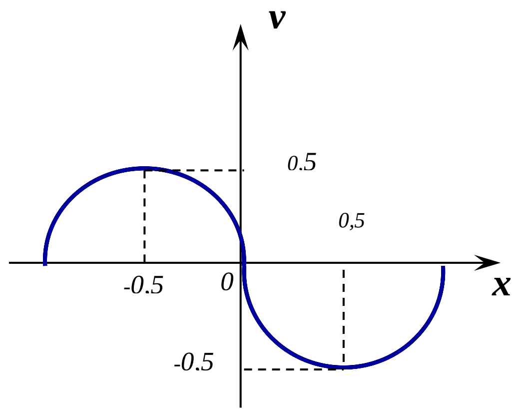


Рис. 1.1

Упражнение. Укажите область определения функций, изображённых на рис. 1.2.



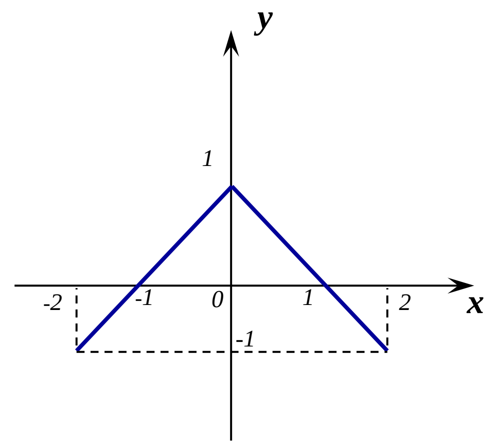


Рис. 1.2

Упражнение. Укажите множество значений функции, изображённой на рис. 1.3.

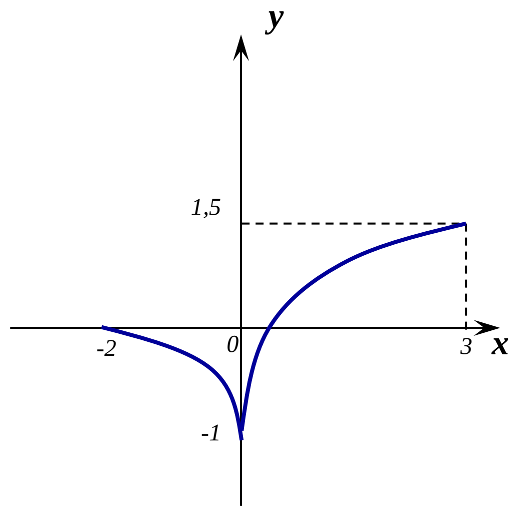


Рис. 1.3

1.2. Способы задания функций. Примеры функций из психологии, экономики и социологии

Чтобы задать функцию, необходимо указать правило, позволяющее, зная значения *x*, находить соответствующие значения *y*. Наиболее часто встречаются следующие три способа задания функции: аналитический; табличный; графический.

1.Аналитический способ заключается в том, что функция задается в виде одной или нескольких формул или уравнений, например

$$y = -0,9 + 9,638x^{-1,394},$$

где *y* – годовой темп прироста ставки заработной платы (в процентах), *x* – общий уровень безработицы (в процентах). Это формула Филлипса.

Аналитический способ удобен для решения задач прогнозирования. Положительными сторонами аналитического способа задания функции являются краткость записи, возможность определения значения функции для любого значения аргумента и, что самое главное, возможность изучения функциональной зависимости с помощью математического анализа. Недостатком этого способа является то, что он применим для описания лишь сравнительно простых форм и процессов.

2.Табличный способ, если дана таблица, содержащая значения переменной x и соответствующие значения переменной y. В виде таблиц записываются результаты экспериментального исследования каких-либо социологических процессов и явлений.

Пример. Рост числа научных изданий y с 1750 г. (с интервалом в 50 лет) в зависимости от года x выглядит (округленно) следующим образом.

x	1750 г.	1800 г.	1850 г.	1900 г.	1950 г.
$У$	10	100	1000	10000	100000

К недостатку табличного способа можно отнести невозможность поместить в таблице все значения аргумента. Табличная запись, особенно если она велика, не обладает наглядностью и не позволяет обозреть общий вид графика функции.

3. Графический способ заключается в том, что строится график функции. Непосредственно из этого графика находятся значения функции y, соответствующие значениям аргумента x. Не всякая линия является графиком некоторой функции. Например, множество точек окружности не может быть графиком функции, поскольку одному значению абсциссы x соответствуют два значения ординаты y_1 и y_2.

Рассмотрим ***основные элементарные функции***:

1. *степенная* функция $y=x^{\alpha}$, где α – действительное число;
2. *показательная* функция $y=a^x$, где $a>0,\ a\neq 1$;
3. *логарифмическая* функция $y=\log_a x$, где $a>0,\ a\neq 1$;
4. *тригонометрические* функции $y=\sin x$, $y=\cos x$;
5. *обратные тригонометрические* функции $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$.

Приведём ***примеры*** функций из психологии, экономики и социологии.

1. Если x – спрос на товар, y – цена товара, то $y=3\cdot x^{-0,8}$ – функция цены от спроса товара.

2. Пусть x – цена товара, y – спрос на товар, то $y=\dfrac{200}{x+2}$ – функция спроса от цены товара.

3. Сумма денежного вклада в банке $y=100\cdot(1{,}03)^x$ – функция от времени x *(годы)*, в течение которых хранится вклад в банке.

4. Психофизический закон Вебера-Фехнера: $S=a\lg Y+b$, где S – интенсивность ощущения, Y – интенсивность раздражителя, a и b – константы, зависящие от условий и вида раздражителей.

5. Скорость смены представлений в сознании (И. Гербарт): $Y=a(1-e^{-bx})$, где x – время, Y – скорость, a и b – константы, зависящие от опыта.

6. В психологическом тесте Д. Векслера общий уровень относительного интеллекта IQ_0 зависит линейно от шкальных оценок по 11 субтестам:

$$IQ_0 = 0{,}6\sum_{i=1}^{11} y_i + b_0,$$

где IQ_0 – общий показатель уровня интеллекта, y_i – шкальные оценки, b_0 – поправка на зависимость относительного интеллекта от возраста человека.

Функция $f(x)$ называется ***четной***, если для всех x из области определения данной функции f справедливо равенство $f(-x)=f(x)$. График четной функции симметричен относительно оси OY.

Функция $f(x)$ называется ***нечетной***, если для всех x из области определения данной функции f справедливо равенство $f(-x)= -f(x)$. График нечетной функции симметричен относительно начало координат (0;0).

Упражнение. На каком из рисунков (рис. 1.4) изображён график чётной, а на каком – нечётной функции?

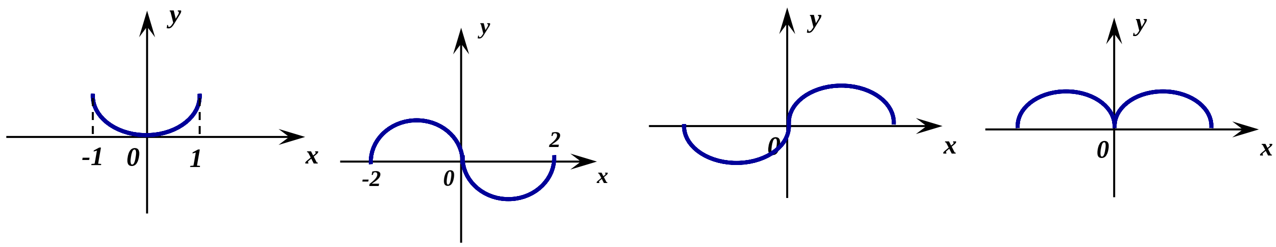


Рис. 1.4

Пусть заданы функция $u = g(x)$ с областью определения X , областью значений U и функция $y = f(u)$ с областью определения, содержащей множество U и областью значений Y. Тогда функция, обозначаемая через $y = f(g(x))$, которая каждому значению x из множества X ставит в соответствие единственное значение y из множества Y такое, что $y = f(u)$ и $u = g(x)$, называется *сложной функцией*.

Например, если $y = u^3$, $u = \sin x$, то $y = (\sin x)^3 = \sin^3 x$ – сложная функция, определенная на всей числовой прямой.

Элементарными называются функции, которые можно получить из основных элементарных функций с помощью алгебраических действий и образования сложных функций.

Функция $y=f(x)$, определённая на множестве X, называется ***монотонно возрастающей (неубывающей)***, если для любых x_1 и x_2 принадлежащих X, из неравенства $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) \le f(x_2)$).

Функция $y=f(x)$, определённая на множестве X, называется ***монотонно убывающей (невозрастающей)***, если для любых x_1 и x_2 принадлежащих множеству X, из неравенства $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) > f(x_2)$ ($f(x_1) \ge f(x_2)$).

Упражнение. На каком из рисунков (рис. 1.5) изображён график убывающей, а на каком – возрастающей функции?

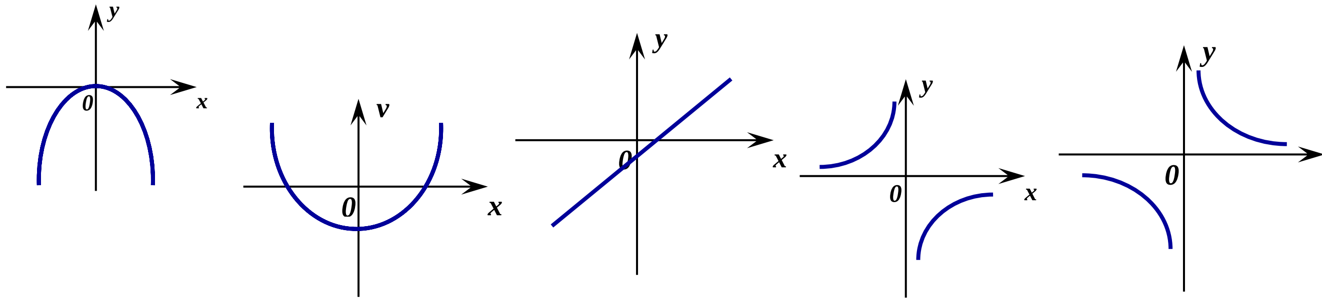


Рис. 1.5

Определение обратной функции. Пусть функция $y=f(x)$ строго монотонная (возрастающая или убывающая) и непрерывная на области определения $x \in (a;b)$, область значений этой функции – $y \in (c;d)$, тогда на интервале $(c;d)$ определена непрерывная строго монотонная функция $x = g(y)$ с областью значений $(a;b)$, которая является ***обратной*** для $y=f(x)$.

Для любого элемента из множества $(c;d)$ можно поставить в соответствие только один элемент множества $(a;b)$, для которого $y=f(x)$. Такое соответствие определяет функцию, которая называется обратной функцией к f. Обратная функция обозначается так: $y = f^{-1}(x)$.

Замечание. *Об обратной функции $x=g(y)$ для функции $y=f(x)$ на конкретном промежутке имеет смысл говорить, если на этом интервале $y=f(x)$ либо возрастает, либо убывает.*

1.3. Понятие предела функции. Односторонние пределы. Предел функции на бесконечности

Пусть x_0 – любое действительное число (точка на числовой прямой). ***Окрестностью*** точки x_0 называется любой интервал $(a;b)$, содержащий точку x_0. В частности, интервал $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$, называется ε-*окрестностью* точки x_0 (обозначается $U_\varepsilon(x_0)$).

Если $x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, то $x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon$, или, что одно и то же, $|x - x_0| < \varepsilon$. Выполнение последнего неравенства означает попадание точки x в ε-окрестность точки x_0 (рис. 1.6).

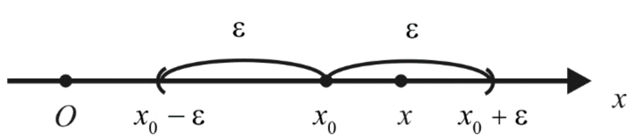


Рис. 1.6

Проколотой окрестностью точки x_0 называется ее окрестность, из которой исключена сама точка x_0.

Проколотой ε-окрестностью точки x_0 (обозначается $\overset{\circ}{U}_\varepsilon(x_0)$) называется ε-окрестность точки x_0, из которой исключена сама точка x_0, т. е. объединение интервалов $(x_0-\varepsilon, x_0)\cup(x_0, x_0+\varepsilon)$.

Если $x\in(x_0-\varepsilon, x_0)\cup(x_0, x_0+\varepsilon)$, то $0<|x-x_0|<\varepsilon$.

Пусть функция $y=f(x)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки x_0. Сформулируем определение предела функции в точке.

Число A называется ***пределом функции*** $y=f(x)$ *в точке* x_0, *если для любого* $\varepsilon>0$ *найдется такое число* $\boldsymbol{\delta=\delta(\varepsilon)>0}$ *(зависящее от* ε*), что для всех x, удовлетворяющих условию* $\mathbf{0<|x-x_0|<\delta}$, *выполняется неравенство* $|f(x)-A|<\varepsilon$

Записывают $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ или $f(x)\to A$ при $x\to x_0$.

Неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$ означает, что $A-\varepsilon < f(x) < A+\varepsilon$.

Выясним *геометрический смысл определения предела функции в точке*. Число A является пределом функции $y=f(x)$ в точке x_0, если для любой ε-окрестности точки A на оси ординат найдется такая проколотая δ-окрестность точки x_0 на оси абсцисс, что для всех x из этой окрестности соответствующие значения функции $f(x)$ лежат в ε-окрестности точки A. Иными словами, все точки $(x, f(x))$, где $x\in\overset{\circ}{U}_\delta(x_0)$, лежат внутри полосы $A-\varepsilon < y < A+\varepsilon$ шириной 2ε (рис. 1.7)

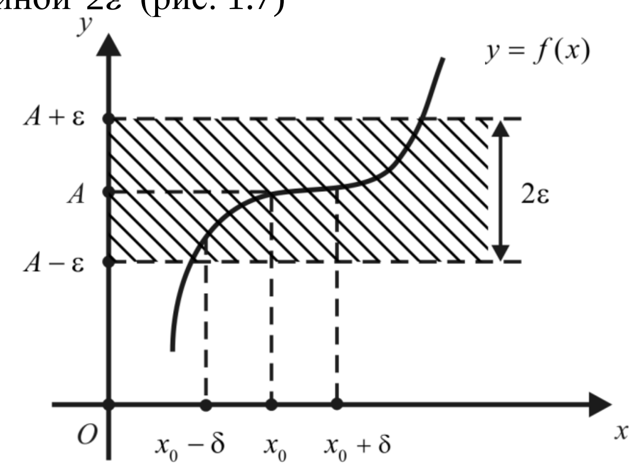


Рис. 1.7

Замечание: *Из определения предела функции в точке* $\boldsymbol{x_0}$, *а именно из условия, что в этой точке функция может быть не определена, непосредственно следует утверждение*: *если функции* f *и* g *таковы, что* $f(x)=g(x)$ *в некоторой проколотой окрестности точки* x_0 *и пределы этих функций в точке* x_0 *существуют, то* $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

Пример: Доказать, что $\lim\limits_{x\to 1}(3x+2)=5$.

Решение. Возьмем произвольное $\varepsilon>0$ и найдем $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих условию $0<|x-1|<\delta$, выполняется неравенство

$|f(x)-5|=|(3x+2)-5|=|3x-3|<\varepsilon$, т. е. $|x-1|<\dfrac{\varepsilon}{3}$. Положив $\delta=\dfrac{\varepsilon}{3}$, видим, что для всех значений x, удовлетворяющих условию $0<|x-1|<\delta\left(\delta=\dfrac{\varepsilon}{3}\right)$, выполняется неравенство $|(3x+2)-5|<\varepsilon$. Следовательно, $\lim\limits_{x\to1}(3x+2)=5$.

Пример. Доказать, что $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$.

Решение. При $x\neq1$ $f(x)=x+1$. Возьмем произвольное $\varepsilon>0$. Неравенство $|(x+1)-2|<\varepsilon$ выполняется, если $0<|x-1|<\varepsilon$, т. е. $\delta=\varepsilon$, и $\lim\limits_{x\to1}(x+1)=2=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$.

Иногда приходится рассматривать предел функции $y=f(x)$ при условии, что точка x, приближаясь к точке x_0, остается либо правее, либо левее ее. При этом способ приближения x к x_0 существенно влияет на значение предела функции. В связи с этим вводят понятия *односторонних пределов*.

Число A называется ***пределом слева*** (***справа***) функции $y=f(x)$ *в точке* x_0, если для любого $\varepsilon>0$. существует число $\boldsymbol{\delta=\delta(\varepsilon)>0}$ такое, что для всех $\boldsymbol{x\in(x_0-\delta,\, x_0)}$ (для всех $\boldsymbol{x\in(x_0,\, x_0+\delta))}$ выполняется неравенство $\boldsymbol{|f(x)-A|<\varepsilon}$.

Обозначения: для предела функции слева

$$A=f(x_0-0)=\lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}}f(x)=\lim_{x\to x_0-0}f(x);$$

для предела функции справа

$$A=f(x_0+0)=\lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}}f(x)=\lim_{x\to x_0+0}f(x).$$

Пример: Найти односторонние пределы функции $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$ в точке $x_0=0$.

Решение. Раскрывая модуль по определению, получаем:

$$f(-0)=\lim_{x\to-0}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to-0}\frac{-x}{x}=-1,$$

$$f(+0)=\lim_{x\to+0}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to+0}\frac{x}{x}=1.$$

Этот результат можно увидеть наглядно, построив график функции (рис. 1.8).

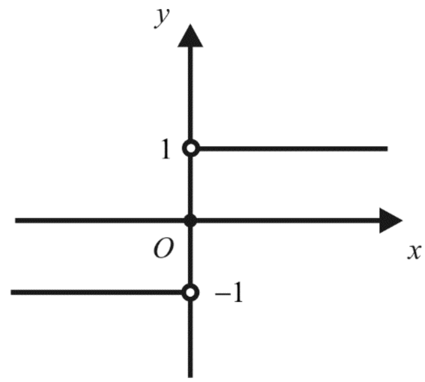


Рис. 1.8

Следующая теорема устанавливает связь между односторонними пределами и пределом функции в точке.

Теорема: Функция $y=f(x)$ имеет предел в точке x_0 тогда и только тогда, когда в этой точке у нее существуют равные пределы слева и справа, причем общее значение этих пределов является пределом функции в точке x_0:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = A.$$

Пример: Функция

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x < 1, \\ 1, & x = 1, \\ 3 - x, & x > 1 \end{cases}$$

при $x \to 1$ имеет предел, равный 2, поскольку $\lim\limits_{x \to 1-0} f(x) = \lim\limits_{x \to 1+0} f(x) = 2.$

Далее рассмотрим определение предела функции на бесконечности.

Пусть функция $y=f(x)$ определена на промежутке $(-\infty, +\infty)$.

Число A называется ***пределом функции*** $\boldsymbol{y = f(x)}$ *при* $\boldsymbol{x \to \infty}$, *если для любого* $\boldsymbol{\varepsilon > 0}$ *существует такое число* $\boldsymbol{M = M(\varepsilon) > 0}$, *что при всех x, удовлетворяющих неравенству* $\boldsymbol{|x| > M}$, *выполняется неравенство* $\boldsymbol{|f(x) - A| < \varepsilon}$.

Записывают $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$ и говорят, что функция $y=f(x)$ стремится к A при x, стремящемся к ∞.

Пример, при достаточно больших по модулю x значение функции $y = \dfrac{1}{x}$ становится сколь угодно малым (меньше любого сколь угодно малого положительного числа ε), поэтому $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

Кратко определение предела функции на бесконечности можно записать в виде:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A \quad \Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists M > 0 \quad \forall x : |x| > M \quad |f(x) - A| < \varepsilon.$$

В этой символической записи используется символ $\exists$ – **квантор существования** (произносится как «существует» или «для некоторого»).

Геометрический смысл этого определения таков: если $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A,$ то для любого $\varepsilon>0$ существует такое число $M>0,$ что при $x\in(-\infty,M)$ или $x\in(M,+\infty)$ соответствующие значения функции $y=f(x)$ попадают в ε-окрестность точки A, т. е. точки $(x,\ f(x))$ графика функции лежат в полосе шириной 2ε, ограниченной прямыми $y=A-\varepsilon$ и $y=A+\varepsilon$ (рис. 1.9).

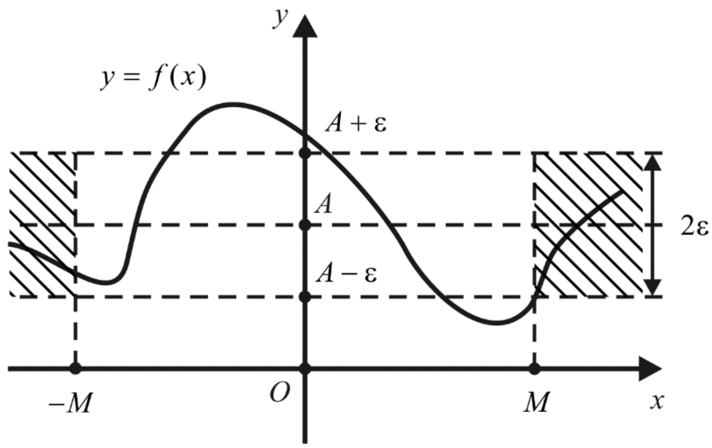


Рис. 1.9

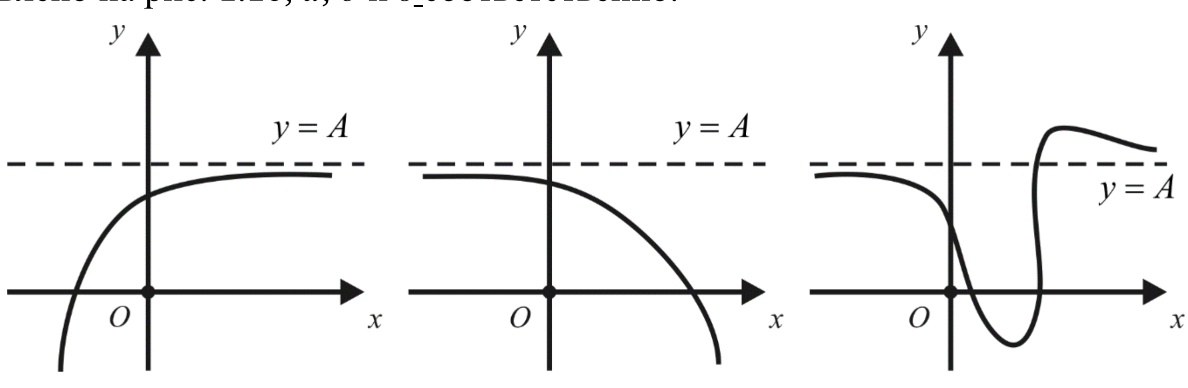
Число А называется ***пределом функции*** $\boldsymbol{y=f(x)}$ при $\boldsymbol{x\to+\infty,}$ если для любого $\boldsymbol{\varepsilon>0}$ существует такое число $\boldsymbol{M=M(\varepsilon)>0,}$ что при всех х, удовлетворяющих неравенству $\boldsymbol{x>M,}$ выполняется неравенство $\boldsymbol{|f(x)-A|<\varepsilon.}$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A \quad\Leftrightarrow\quad \forall\varepsilon>0 \quad \exists M>0 \quad \forall x:\ x>M \quad |f(x)-A|<\varepsilon.$$

Число А называется ***пределом функции*** $\boldsymbol{y=f(x)}$ при $\boldsymbol{x\to-\infty,}$ если для любого $\boldsymbol{\varepsilon>0}$ существует такое число $\boldsymbol{M=M(\varepsilon)>0,}$ что при всех х, удовлетворяющих неравенству $\boldsymbol{x<-M,}$ выполняется неравенство $\boldsymbol{|f(x)-A|<\varepsilon.}$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=A \quad\Leftrightarrow\quad \forall\varepsilon>0 \quad \exists M>0 \quad \forall x:\ x<-M \quad |f(x)-A|<\varepsilon.$$

Поведение функции $y=f(x)$ в случаях $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A,$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$ и $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$ представлено на рис. 1.10, *а*, *б* и *в* соответственно.



а *б* *в*

Рис. 1.10

Пример: Доказать по определению, что $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0.$

Решение: Выберем любое ε>0 и выясним, для каких x будет выполняться неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon,$ т. е. $\left|\frac{1}{x}\right|<\varepsilon.$ Решая это неравенство, получаем $|x|>\frac{1}{\varepsilon}.$ Таким образом, если $M=\frac{1}{\varepsilon},$ то при всех x, удовлетворяющих неравенству $|x|>M,$ справедливо неравенство $\left|\frac{1}{x}\right|<\varepsilon.$

Пример: Доказать по определению, что $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2+1}{x^2+2}=1.$

Решение: Выберем любое $\varepsilon>0$ и выясним, для каких x будет выполняться неравенство $\left|\frac{x^2+1}{x^2+2}-1\right|<\varepsilon.$ Решая это неравенство, получаем $\left|-\frac{1}{x^2+2}\right|=\frac{1}{x^2+2}<\frac{1}{x^2}<\varepsilon,$ откуда $x^2>\frac{1}{\varepsilon}$ и $x<-\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}.$ Следовательно, если $M=\sqrt{\frac{1}{\varepsilon}},$ то при всех x, удовлетворяющих неравенству $x<-M,$ справедливо неравенство $\left|\frac{x^2+1}{x^2+2}-1\right|<\varepsilon.$

1.4. Свойства функций, имеющих предел в точке. Бесконечно малые функции. Бесконечно большие функции

Общие свойства функций, имеющих передел в точке

1. Если функция $y=f(x)$ имеет предел в точке $x_0,$ то он единственный.

2. Функция, имеющая предел в точке, ограничена в некоторой проколотой окрестности этой точки.

Предел и неравенства:

1. Если $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A>B\ \ (A<B),$ то существует проколотая окрестность точки $x_0,$ в которой выполняются неравенства: $f(x)>B\ \ (f(x)<B).$

2. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A,\ \lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$ и в некоторой проколотой окрестности точки x_0 справедливо неравенство $f(x)\geq g(x)\ \ (f(x)\leq g(x)).$ Тогда $A\geq B\ (A\geq B).$

3. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A$ и в некоторой проколотой окрестности точки $x_0,$ справедливы неравенства $f(x)\leq h(x)\leq g(x)$. Тогда $\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A.$

Предел и арифметические операции:

Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A,\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B.$ Тогда существуют пределы функций $f(x)\pm g(x)$, $f(x)g(x)$ и $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

1) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x))=A\pm B;$

2) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)g(x))=A\cdot B,$ в частности $\lim\limits_{x\to x_0}(c\,f(x))=cA;$

3) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}$ $(B\neq 0)$.

В последнем случае функция $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ рассматривается только при тех значениях x, для которых функция $g(x)\neq 0$.

Рассмотренные выше свойства будем принимать без доказательства.

Замечание: *Свойства 1–3, сформулированные выше, справедливы также и в случае, когда x_0 является одним из символов $+\infty, -\infty, \infty$. Под окрестностью $U(x_0)$ в этих случаях понимается множество, у которого существует подмножество $U(x_0,\varepsilon)\subset U(x_0)$, где $\varepsilon>0$ и*

$$U(+\infty,\varepsilon)=\left\{x:\ x\in \boldsymbol{R},\ x>\frac{1}{\varepsilon}\right\}\cup\{+\infty\};$$

$$U(-\infty,\varepsilon)=\left\{x:\ x\in \boldsymbol{R},\ x<-\frac{1}{\varepsilon}\right\}\cup\{-\infty\};$$

$$U(\infty,\varepsilon)=\left\{x:\ x\in \boldsymbol{R},\ |x|>\frac{1}{\varepsilon}\right\}\cup\{\infty\}.$$

Данные множества называются ε-*окрестностями* элементов $+\infty, -\infty, \infty$ соответственно.

Пример. Найти предел $\lim\limits_{x\to 2}\left(3x-\dfrac{24}{x}\right)$.

Решение.

$$\lim_{x\to 2}\left(3x-\frac{24}{x}\right)=\lim_{x\to 2}3x-\lim_{x\to 2}\frac{24}{x}=3\lim_{x\to 2}x-24\lim_{x\to 2}\frac{1}{x}=3\cdot 2-24\cdot\frac{1}{2}=-6.$$

Пример. Вычислить пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 2}(2x+3)=2\lim\limits_{x\to 2}x+\lim\limits_{x\to 2}3=2\cdot 2+3=7.$

2) $\lim\limits_{x\to 1}\left(9x^2-6x+8\right)=\lim\limits_{x\to 1}9x^2-\lim\limits_{x\to 1}6x+\lim\limits_{x\to 1}8=9\lim\limits_{x\to 1}x^2-6\lim\limits_{x\to 1}x+8=$

$=9\cdot 1^2-6\cdot 1+8=9-6+8=11.$

3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+3x}{2x+1}.$

Решение. Пределы числителя и знаменателя существуют. Убедимся, что предел знаменателя отличен от 0: $\lim\limits_{x\to 2}(2x+1)=2\lim\limits_{x\to 2}x+\lim\limits_{x\to 2}1=2\cdot 2+1=5.$ Тогда применимо свойство о пределе частного:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+3x}{2x+1}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2+3x\right)}{\lim\limits_{x\to 2}(2x+1)}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}x^2+3\lim\limits_{x\to 2}x}{2\lim\limits_{x\to 2}x+\lim\limits_{x\to 2}1}=\frac{2^2+3\cdot 2}{2\cdot 2+1}=\frac{10}{5}=2.$$

Функция $\boldsymbol{y=f(x)}$ называется ***бесконечно малой*** при $\boldsymbol{x\to x_0}$, если $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0,}$ т. е. для любого $\boldsymbol{\varepsilon>0}$ найдется такое число $\boldsymbol{\delta=\delta(\varepsilon)>0,}$ что для всех x, удовлетворяющих условию $\boldsymbol{0<|x-x_0|<\delta,}$ выполняется неравенство $\boldsymbol{|f(x)|<\varepsilon.}$

Аналогично определяются бесконечно малые функции при $x\to x_0+0,\ \ x\to x_0-0,$ $x\to+\infty,\ x\to-\infty,\ x\to\infty.$

Примерами бесконечно малых функций являются функции $y=x^2$ при $x\to 0,$ $y=x-2$ при $x\to 2,$ $y=\sin x$ при $x\to\pi k,$ где $k\in\boldsymbol{Z},$ $y=\dfrac{1}{x}$ при $x\to\infty.$

Функция $y=f(x)$ называется ***ограниченной*** на множестве X, если существует такое число $M>0,$ что для всех $x\in X$ выполняется неравенство $|f(x)|\le M.$

Теорема: Сумма конечного числа бесконечно малых функций, а также произведение бесконечно малой функции на ограниченную функцию являются бесконечно малыми функциями.

Следствие: Так как всякая бесконечно малая при $x\to x_0$ функция ограничена в некоторой проколотой окрестности точки x_0, то произведение конечного числа бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция. Произведение бесконечно малой функции на число также является бесконечно малой функцией.

Между функциями, имеющими предел в точке, и бесконечно малыми функциями существует определенная связь, которую устанавливает следующая теорема, рассмотрим ее без доказательства.

Теорема: Для того чтобы $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A,$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство $f(x)=A+\alpha(x),$ где $\alpha(x)$ – бесконечно малая функция при $x\to\infty.$

Функция $\boldsymbol{y=f(x)}$ называется ***бесконечно большой*** при $\boldsymbol{x\to x_0},$ если для любого числа $\boldsymbol{M>0}$ существует такое число $\boldsymbol{\delta=\delta(M)>0,}$ что для всех x, удовлетворяющих условию $\boldsymbol{0<|x-x_0|<\delta,}$ выполняется неравенство $\boldsymbol{|f(x)|>M.}$

В этом случае пишут $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ и говорят, что функция y=$f(x)$ стремится к бесконечности при $x \to x_0$, или что она имеет бесконечный предел в точке x_0.

Например, функция $y = \dfrac{1}{x-1}$ является бесконечно большой функцией при $x \to 1$ (рис. 1.11).

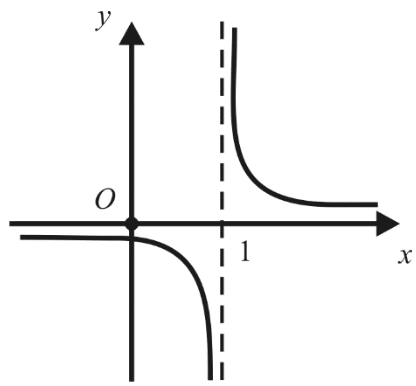


Рис. 1.11

Если же выполняется неравенство $f(x) > M$ $(f(x) < -M)$, то пишут $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ $(\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty)$.

Аналогично определяются бесконечно большие функции при $x \to +\infty, -\infty, \infty$.

Так, функция y=f (x) называется ***бесконечно большой*** при $x \to \infty$, если для любого числа M>0 существует такое число $L = L(M) > 0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x| > L$, выполняется неравенство $|f(x)| > M$.

Например, y=x^3 является бесконечно большой функцией при $x \to \infty$.

Теорема: Если функция $\alpha(x)$ является бесконечно малой при $x \to x_0$ $(\alpha \neq 0)$, то функция $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ является бесконечно большой при $x \to x_0$, и наоборот, если функция f (x) – бесконечно большая при $x \to x_0$, то функция $\dfrac{1}{f(x)}$ – бесконечно малая при $x \to x_0$.

Пример: Доказать по определению, что функция $y = \dfrac{1}{x}$ является бесконечно большой при $x \to 0$.

Решение. Выберем любое M > 0 и выясним, для каких x будет выполняться неравенство $|f(x)| > M$, т. е. $\left|\dfrac{1}{x}\right| > M$. Решая это неравенство, получаем $|x| < \dfrac{1}{M}$. Таким образом, если $\delta = \dfrac{1}{M}$, то для всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x| < \delta$, справедливо неравенство $|f(x)| > M$. Это означает, что функция $y = \dfrac{1}{x}$ является бесконечно большой при $x \to 0$.

Пример. Функция $y = x^3 - 1$ является бесконечно малой в точке x=1, так как $\lim\limits_{x\to1}\left(x^3-1\right)=1^3-1=0.$

Пример. Вычислим $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{5}{3x-12}$.

Решение. Так как $\lim\limits_{x\to4}\left(3x-12\right)=0$, то (3$x$–12) есть бесконечно малая величина, а обратная ей величина есть бесконечно большая. То есть

$$\lim_{x\to4}\frac{5}{3x-12}=5\cdot\lim_{x\to4}\frac{1}{3x-12}=5\cdot\infty=\infty.$$

Пример. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{4x+3}$.

Решение. Так как (4x+3) при $x\to\infty$ есть бесконечно большая величина, а обратная ей величина $\dfrac{1}{4x+3}$ есть бесконечно малая, то $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2}{4x+3}=2\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{4x+3}=0.$

1.5. Замечательные пределы

При вычислении пределов выражений, содержащих тригонометрические функции, часто используется предел

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1,$$

называемый ***первым замечательным пределом***.

Пример. Вычислить $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5x}{\sin4x}$.

Решение. Вычислим этот предел с помощью первого замечательного предела:

$$\lim_{x\to0}\frac{5x}{\sin4x}=5\cdot\lim_{x\to0}\frac{x}{\sin4x}=5\cdot\lim_{x\to0}\frac{4\cdot x}{4\cdot\sin4x}=\frac{5}{4}\cdot\lim_{x\to0}\frac{4x}{\sin4x}=$$

$$\frac{5}{4}\cdot\lim_{x\to0}\frac{1}{\frac{\sin4x}{4x}}=\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{1}=\frac{5}{4}.$$

Второй замечательный предел: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e\approx2,71 \text{ или } \lim_{x\to0}\left(1+x\right)^{\frac{1}{x}}=e\approx2,71.$$

Пример. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{3x}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{3x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}\right)^{3}=\left(\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}\right)^{3}=e^{3}.$

Пример. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{k}{x}\right)^{x}$, где $k\in\boldsymbol{R}$.

Решение. Обозначим $x=kt$. Тогда $t\to\infty$ при $x\to\infty$ и

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{x}=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{kt}=\left(\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\right)^{k}=e^{k}.$$

Пример. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-3}\right)^{x}$.

Решение. Разделив числитель и знаменатель дроби $\dfrac{x+2}{x-3}$ на x, сведем данный предел к частному пределов из предыдущего примера:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x-3}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{2}{x}}{1-\frac{3}{x}}\right)^{x}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{3}{x}\right)^{x}}=\frac{e^{2}}{e^{-3}}=e^{5}.$$

1.6. Раскрытие неопределенностей

Раскрыть неопределённость – значит найти предел соответствующего выражения, если он существует.

Перечислим все основные *виды неопределенностей*: ноль делить на ноль $\left(\dfrac{0}{0}\right)$, бесконечность делить на бесконечность $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$, ноль умножить на бесконечность $(0\cdot\infty)$, бесконечность минус бесконечность $(\infty-\infty)$, единица в степени бесконечность $\left(1^{\infty}\right)$, ноль в степени ноль $\left(0^{0}\right)$, бесконечность в степени ноль $\left(\infty^{0}\right)$.

Раскрывать неопределенности позволяет:

a) упрощение вида функции (преобразование выражения с использованием формул сокращенного умножения, тригонометрических формул, домножением на сопряженные выражения с последующим сокращением и т.п.);

b) использование замечательных пределов;

c) использование замены бесконечно малого выражения ему эквивалентными бесконечно малыми.

Сгруппируем неопределенности в таблицу неопределенностей. Каждому виду неопределенности поставим в соответствие метод ее раскрытия (метод нахождения предела).

Виды неопределенностей	Методы нахождения предела
$\left(\frac{0}{0}\right)$	1. Преобразовать и упростить выражение. 2. Применить первый замечательный предел
$\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$	1. Преобразовать и упростить выражение. 2. Разделить на наибольшую степень x
$(0\cdot\infty)$ $(\infty-\infty)$	Преобразовать к неопределенности вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ или $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$
(1^{∞})	Применить второй замечательный предел
(0^{0}) (∞^{0})	Логарифмировать выражение и использовать равенство $\lim\limits_{x\to x_0}\ln(f(x))=\ln(\lim\limits_{x\to x_0} f(x))$

1.7. Использование пределов в экономике и социологии

Многие социально-экономические закономерности удается увидеть с помощью предельного перехода.

Пример. Экспериментально была установлена зависимость $y=\frac{200}{x+2}$ между ценой одного из товаров x и спросом на него y. Исследовать поведение функции спроса от цены товара $y=\frac{200}{x+2}$ при неограниченном увеличении цены ($x\to\infty$).

Решение. Т. к. (x+2) при $x\to\infty$ есть бесконечно большая величина, а обратная ей величина $\frac{1}{x+2}$ есть бесконечно малая, то

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}200}{\lim\limits_{x\to\infty}(x+2)}=0.$$

Таким образом, при неограниченном росте цен спрос приближается к нулю.

Пример. Экономические исследования показывают, что спрос y на товары первой необходимости и спрос z на предметы роскоши зависят от дохода x следующим образом:

$$y(x)=\frac{b_1(x-a_1)}{x-c_1},\ z(x)=\frac{b_2\cdot x\cdot(x-a_2)}{x-c_2},$$

где a_1, a_2 – уровни доходов, при которых начинается приобретение тех или иных товаров. Это функции Л. Торнквиста.

Найдем как меняется $y(x)$ при $x\to\infty$:

$$\lim_{x\to\infty}y(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{b_1\cdot(x-a_1)}{x-c_1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=b_1\cdot\left(\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{a_1}{x}}{1-\frac{c_1}{x}}\right)=b_1\cdot.$$

Найдем как меняется $z(x)$ при $x\to\infty$:

$$\lim_{x\to\infty}z(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{b_2\cdot x\cdot(x-a_2)}{x-c_2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=b_2\cdot\left(\lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot(1-\frac{a_2}{x})}{1-\frac{c_2}{x}}\right)=\infty.$$

Таким образом, при неограниченном увеличении доходов спрос на товары первой необходимости растет до определенного предела, равного b_1. Миллионеры не покупают для себя хлеба больше, чем съедят. Поэтому число b_1 называется уровнем насыщения. Спрос же на предметы роскоши не имеет уровня насыщения. Он растет даже при неограниченном росте доходов.

1.8. Исторические сведения

К понятию «предел» вплотную подошли еще древнегреческие ученые при вычислении площадей и объемов некоторых фигур и тел с помощью метода исчерпывания. Так, Архимед, рассматривая последовательности вписанных и описанных ступенчатых фигур и тел, с помощью метода исчерпывания доказывал, что разность между их площадями (соответственно объемами) может быть меньше любой наперед заданной положительной величины. Включая в себя представление о бесконечно малых, метод исчерпывания являлся зародышем теории пределов. Однако в явном виде в древнегреческой математике понятие «предел» не было сформулировано. Не было создано и каких-либо основ общей теории.

Новый этап в развитии понятия предела наступил в эпоху создания дифференциального и интегрального исчислений. Галилео Галилей (1564–1642), Иоганн Кеплер (1571–1630), Бонавентура Кавальери (1598–1647), Блез Паскаль (1623–1662) и другие широко используют при вычислении площадей и объемов метод «неделимых», метод актуальных бесконечно малых, т. е. таких бесконечно малых, которые, по их представлению, являются неизменными величинами, не равными нулю и вместе с тем меньшими по абсолютной величине любых положительных конечных величин. Продолжает в этот период применяться и развиваться и метод исчерпывания. На основе интуитивного понятия предела появляются попытки создать общую теорию пределов. Так, И. Ньютон первый отдел книги «О движении тел» труда

«Математические начала натуральной философии» посвящает своеобразной теории пределов под названием «Метод первых и последних отношений», которую берет за основу своего исчисления флюксий. В этой теории Ньютон взамен актуальным бесконечно малым предлагает концепцию «потенциальной» бесконечно малой, которая лишь в процессе своего изменения становится по абсолютной величине меньше любой положительной конечной величины. Точка зрения Ньютона была существенным шагом вперед в развитии представления о понятии предела, намечавшегося у математиков XVII в.; в XVIII в. оно постепенно все больше анализировалось и уточнялось (Л. Эйлер, Ж. Д'аламбер, Л. Карно, братья Якоб и Иоганн Бернулли). В этот период оно служило лишь для попыток объяснить правильность дифференциального и интегрального исчисления и еще не являлось методом разработки проблем математического анализа.

Современная теория пределов начала формироваться в начале XIX в. в связи с изучением свойств различных классов функций, прежде всего непрерывных, а также в связи с попыткой доказательства существования ряда основных объектов математического анализа (интегралов функций действительных и комплексных переменных, сумм рядов, алгебраических корней и более общих уравнений и т. п.). Впервые в работах французского математика О. Коши понятие предела стало основой построения математического анализа. Им были получены основные признаки существования пределов последовательностей, основные теоремы о пределах и, что очень важно, дан внутренний критерий сходимости последовательности, носящий теперь его имя. Окончательно понятие предела последовательности и функции оформилось на базе теории действительного числа в работах чешского математика и философа Бернарда Больцано (1781–1848) и немецкого математика К. Вейерштрасса.

Слово limes для обозначения предела впервые употребил И. Ньютон, символ lim ввел Симон Люилье (1750–1840) в 1786 г., выражение $\lim\limits_{n\to\infty}$ *первым записал У. Гамильтон в 1855 г.*

1.9. Примеры решения задач

1. Найдите область определения функции $y=\dfrac{1}{\sqrt{x+3}}$.

Решение. При отыскании области определения X дробной функции нужно исключить значения аргумента, при которых знаменатель обращается в ноль. Учитывая, что аналитическое выражение функции содержит корень четной степени, то подкоренное выражение должно быть положительным.

Тогда $x+3>0$, $x>-3$, следовательно $X=(-3;+\infty)$.

2. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-5x+6}{2x^2-6x+8}$.

Решение. Если $x\to\infty$, то числитель и знаменатель дроби стремятся к бесконечности и мы получили выражение вида $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$, которое называют неопределённостью. Выносим за скобки старшую степень переменной x и сокращаем на общий множитель:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-5x+6}{2x^2-6x+8}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2(\frac{x^2}{x^2}-\frac{5x}{x^2}+\frac{6}{x^2})}{x^2(\frac{2x^2}{x^2}-\frac{6x}{x^2}+\frac{8}{x^2})}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}{2-\frac{6}{x}+\frac{8}{x^2}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}1-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty}2-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8}{x^2}}=$$

$$=\frac{1-0+0}{2-0+0}=\frac{1}{2}.$$

3. Вычислить $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{-x^2+3x-2}$.

Решение. Предел числителя и знаменателя равен нулю, имеем неопределённость вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Разложим числитель и знаменатель на множители и сократим на общий множитель:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{-x^2+3x-2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{(x-3)(x-2)}{-(x-2)(x-1)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-3)}{(1-x)}=\frac{2-3}{1-2}=1.$$

4. Вычислить $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{3x^2-1}{2x+1}$.

Решение. Так как пределы числителя и знаменателя существуют и предел знаменателя отличен от нуля, то воспользуемся теоремой о пределах частного:

$$\lim_{x\to 5}\frac{3x^2-1}{2x+1}=\frac{\lim\limits_{x\to 5}(3x^2-1)}{\lim\limits_{x\to 5}(2x+1)}=\frac{3\lim\limits_{x\to 5}x^2-\lim\limits_{x\to 5}1}{2\lim\limits_{x\to 5}x+\lim\limits_{x\to 5}1}=\frac{3\cdot 5^2-1}{2\cdot 5+1}=\frac{74}{11}.$$

5. Вычислить $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+3x-10}{x^2-4}$.

Решение. Предел числителя и знаменателя равен нулю, имеем неопределённость вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Разложим числитель и знаменатель на множители и сократим на общий множитель:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+3x-10}{x^2-4}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{(x+5)(x-2)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+5}{x+2}=\frac{2+5}{2+2}=\frac{7}{4}.$$

6. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx}{x}$.

Решение. Воспользуемся первым замечательным пределом:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}=\lim_{x\to 0}(\frac{1}{x}\cdot tgx)=\lim_{x\to 0}(\frac{1}{x}\cdot\frac{\sin x}{\cos x})=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1\cdot 1=1.$$

7. Доказать, что функция $\dfrac{7}{2x+5}$ является бесконечно малой при $x\to\infty$.

Решение. Вычислим $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7}{2x+5}$. Так как $\lim\limits_{x\to\infty}(2x+5)=\infty$, то $(2x+5)$ есть бесконечно большая величина, а обратная ей величина есть бесконечно малая. Тогда $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7}{2x+5}=7\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{2x+5}=7\cdot 0=0$, следовательно, функция $\dfrac{7}{2x+5}$ является бесконечно малой при $x\to\infty$.

8. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x$.

Решение. Сделаем замену $x=2t$, и воспользуемся вторым замечательным пределом, тогда

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t}=\lim_{t\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right)^2=e^2.$$

1.10. Задачи для самостоятельного решения

1. По графику функции, изображённому на рис. 3.12, укажите:

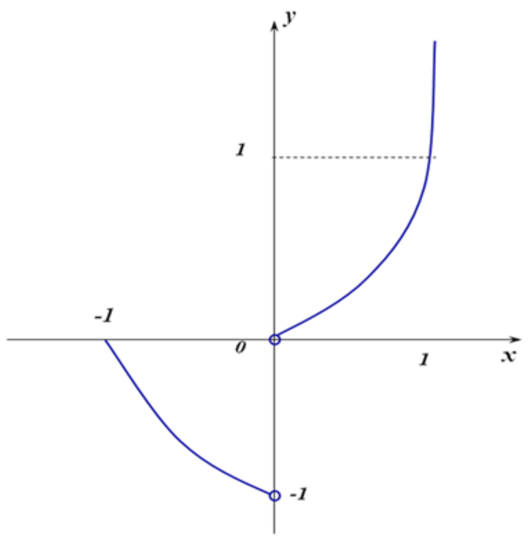


Рис. 3.12

a) область её определения;
b) множество её значений;
c) точки, в которых функция обращается в ноль;
d) промежутки возрастания и убывания функции.

2. Найдите область определения функции $y=\log_a\dfrac{3}{17-x}$.

3. Найдите указанные пределы:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^2-3x+2}{4x^2+2x-3}$; b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3-3x^2+7}{x^4+2x^3+1}$; c) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-x^6}{x^2-2x+5}$; d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-x^2+2x}{x^2+x}$;

e) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+3x-10}{2x^2+x-10}$; f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 3x}$; g) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^2 x}{xtgx}$; h) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x+3}{x}\right)^{-5x}$.

1.11. Вопросы для самоконтроля

1. Какие величины называются постоянными, а какие – переменными? Дайте определение функции.
2. Что такое область определения функции? Что такое область значений функции?
3. Какие способы задания функции вы знаете? Что такое график функции?
4. Назовите основные элементарные функции.
5. Какая функция называется чётной, а какая – нечётной? Приведите соответствующие примеры.
6. Какая функция называется монотонно возрастающей, а какая – монотонно убывающей? Приведите соответствующие примеры.
7. Дайте определение сложной функции и приведите соответствующий пример.
8. Приведите примеры функций из социально-экономической сферы.
9. Дайте определение предела функции.
10. Запишите основные теоремы о пределах функции.
11. Какие функции называются бесконечно большими? Какие функции называются бесконечно малыми? Перечислите основные свойства бесконечно больших и бесконечно малых функций.
12. Неопределенности какого вида вы знаете? Как раскрываются эти неопределённости?

2. Непрерывность функции.

2.1. *Непрерывность функции в точке. Свойства функций, непрерывных в точке*

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0.

Функция $y = f(x)$ называется ***непрерывной в точке*** x_0, если существует предел функции в точке x_0, равный значению функции в этой точке, т. е.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Последнее равенство означает, что для любого $\varepsilon > 0$, найдется такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Подчеркнем, что если функция $y = f(x)$ непрерывна в некоторой точке, то согласно данному определению она определена в некоторой окрестности этой точки (обычной, а не проколотой, как это было в случае определения предела функции).

Замечание: *Так как* $\lim\limits_{x\to x_0} x = x_0$, *то равенство из определения непрерывной в точке функции можно записать в виде*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(\lim_{x\to x_0} x) = f(x_0),$$

т. е. для непрерывной функции символы предела и функции перестановочны.

Пример. Функция $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, x \neq 0, \\ 1, x = 0 \end{cases}$ непрерывна в точке $x_0 = 0$, так как она определена в этой точке, имеет в ней предел и

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 = f(0).$$

Пример. Функция $f(x) = \begin{cases} x, x \leq 2, \\ x + 2, x > 2 \end{cases}$ определена в точке $x_0 = 2$, но не имеет предела в этой точке (рис. 3.13, *а*), поскольку

$$\lim_{x\to 2-0} f(x) = 2 \neq 4 = \lim_{x\to 2+0} f(x).$$

Следовательно, она не является непрерывной в точке $x_0 = 2$.

Пример. Функция $f(x) = \begin{cases} x^2, x \neq 2, \\ 1, x = 2 \end{cases}$ определена в точке $x_0 = 2$, $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = 4$, но не является непрерывной в этой точке, поскольку $f(2) = 1 \neq \lim\limits_{x\to 2} f(x)$ (см. рис. 1.13, *б*).

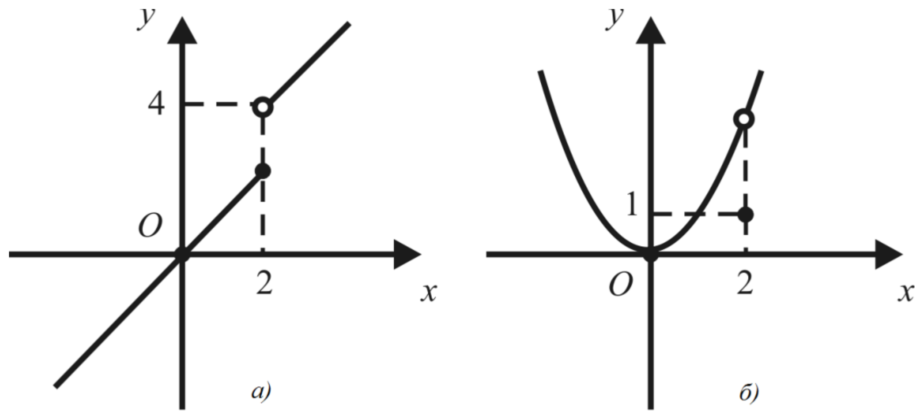


Рис. 1.13

Таким образом, для непрерывности функции $y = f(x)$ существенно выполнение трех условий:

1) функция $y = f(x)$ определена в точке x_0 и её окрестности;
2) функция $y = f(x)$ имеет предел при $x \to x_0$;
3) предел функции в точке x_0 равен значению функции в этой точке.

Свойства функций, непрерывных в точке

Следует отметить, что свойства функций, непрерывных в точке, вытекают из определения непрерывности и соответствующих свойств предела функции в точке. Сформулируем свойства без доказательства.

1. Функция, непрерывная в точке, ограничена в некоторой окрестности этой точки.
2. Непрерывная функция, отличная от нуля в точке x_0, сохраняет знак в некоторой окрестности этой точки, т. е. если $f(x_0) > 0$ $(f(x_0) < 0)$, то существует $U(x_0)$ такая, что $f(x) > 0$ $(f(x) < 0)$ для любого $x \in U(x_0)$.
3. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0, то функции

$$f(x) \pm g(x),\ \ f(x) \cdot g(x),\ \ \frac{f(x)}{g(x)}\ \ (g(x_0) \neq 0)$$

также непрерывны в точке x_0.

Непрерывность основных элементарных функций

1. Постоянная функция $f(x) = C$ непрерывна в любой точке $x_0 \in \boldsymbol{R},$ поскольку

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} C = C = f(x_0).$$

2. Функция $f(x) = x$ непрерывна в любой точке $x_0 \in \boldsymbol{R},$ поскольку

$$\lim_{x\to x_0} x = x_0 = f(x_0).$$

3. Многочлен

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \text{ где } n \ge 0,\ n \in \boldsymbol{Z},\ a_i \in \boldsymbol{R},$$

есть функция, непрерывная в любой точке $x_0 \in \boldsymbol{R}$.

Это следует из непрерывности функций $f(x) = C$, $f(x) = x$ и свойства 3 непрерывных в точке функций.

4. Дробно-рациональная функция, т. е. функция вида $g(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены, непрерывна во всех таких точках $x \in R$, в которых ее знаменатель не равен нулю.

5. Тригонометрические функции $y = \sin x$, $y = \cos x$ непрерывны во всех точках $x \in \boldsymbol{R}$.

6. Функция $y = tgx = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ непрерывна в точках, где $\cos x \ne 0$, т. е. $x \ne \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$.

7. Функция $y = ctgx = \dfrac{\cos x}{\sin x}$ непрерывна в точках, где $\sin x \ne 0$, т. е. $x \ne \pi + \pi k,\ k \in \boldsymbol{Z}$.

8. Функция $y = a^x$ $(a > 0, a \ne 1)$ непрерывна при всех $x \in \boldsymbol{R}$.

9. Функция $y = \log_a x$ $(a > 0, a \ne 1)$ непрерывна при всех $x > 0, x \in R$.

2.2. *Односторонняя непрерывность. Точки разрыва функции и их классификация*

Функция $y = f(x)$ называется ***непрерывной слева (справа) в точке*** $\boldsymbol{x_0}$**,** если

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0) \quad \left(\lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0)\right).$$

Например, функция

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \ge 0, \\ x+1, & x < 0 \end{cases}$$

непрерывна справа в точке $x = 0$, $\lim\limits_{x\to +0} f(x) = f(0) = 0$, и не является непрерывной слева в точке $x = 0$, поскольку $\lim\limits_{x\to -0} f(x) = 1 \ne f(0) = 0$.

Очевидно, функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда она непрерывна и слева, и справа в этой точке, т. е. $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0)$.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, кроме, быть может, самой точки x_0.

Точка x_0 называется ***точкой разрыва функции*** $y = f(x)$, либо если функция не определена в самой точке x_0, либо если она определена в этой точке, но не является в ней непрерывной (т. е. нарушается по крайней мере одно из трех условий непрерывности функции п. 2.1).

Иными словами, точка x_0 является точкой разрыва функции, если x_0 является значением аргумента, при котором происходит «разрыв графика функции».

Все точки разрыва функции подразделяются на *точки разрыва первого и второго рода*.

Точка x_0 называется ***точкой разрыва первого рода*** функции $y = f(x)$, если в этой точке пределы функции слева и справа (т. е. односторонние пределы) существуют и конечны и не равны значению функции в этой точке. Величина $\left| f(x_0+0) - f(x_0-0) \right|$ называется скачком функции $y = f(x)$ в точке x_0.

Если пределы функции $y = f(x)$ слева и справа существуют, конечны, и при этом $f(x_0-0) = f(x_0+0)$ (т. е. скачок функции в точке x_0 равен нулю), то точка x_0 называется ***точкой устранимого разрыва***. Чтобы устранить разрыв функции в точке x_0, достаточно изменить значение функции только в одной этой точке. В этом случае говорят, что функция может быть доопределена по непрерывности в точке x_0.

Точка x_0 называется ***точкой разрыва второго рода*** функции $y = f(x)$, если в этой точке по крайней мере один из односторонних пределов не существует или равен бесконечности.

Пример: Функция $f(x) = \dfrac{|x|}{x}$ имеет в точке x=0 разрыв первого рода, так как $\lim\limits_{x\to -0} \dfrac{|x|}{x} = -1,\ \lim\limits_{x\to +0} \dfrac{|x|}{x} = 1.$ Скачок функции в точке x=0 равен $|1-(-1)| = 2$.

Пример: Для функции

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 2, & x = 0 \end{cases}$$

точка x=0 является точкой устранимого разрыва, поскольку

$$\lim_{x\to -0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to +0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Если положить $f(0) = 1$ (вместо $f(0) = 2$) разрыв устранится и функция станет непрерывной.

Пример: Для функции $f(x) = \dfrac{1}{x}$ точка x=0 является точкой разрыва второго рода, поскольку

$$\lim_{x\to -0} \frac{1}{x} = -\infty,\ \lim_{x\to +0} \frac{1}{x} = +\infty.$$

Функция $y = f(x)$ называется ***непрерывной на интервале*** (a, b), если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

Функция $y = f(x)$ называется ***непрерывной на отрезке*** $[a, b]$, если она непрерывна на интервале (a, b) и в точке a непрерывна справа, а в точке $b -$ слева.

Важные пределы

Часто при вычислении пределов применяются следующие важные пределы:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e; \quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1; \quad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x} = \alpha.$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a; \quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1.$$

Пример. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+4x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+4x)}{4x}\cdot 4 = 1\cdot 4 = 4.$

Пример. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[5]{1+x^3}-1}{x^3} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x^3)^{\frac{1}{5}}-1}{x^3} = \dfrac{1}{5}.$

Пример. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{16^x-4^x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(4^x\cdot\left(\dfrac{4^x-1}{x}\right)\right) = 4^0\cdot\ln 4 = \ln 4$.

3. Основы дифференциального исчисления

3.1. *Задачи, приводящие к понятию производной. Определение производной*

Одним из основных понятий дифференциального исчисления является ***производная***, которая используется при исследовании процессов, в том числе социологических и экономических, описываемых функциями.

Рассматривая различные по характеру задачи, мы приходим к пределу одного вида, который очень часто используется в различных областях науки. Дадим общее определение производной.

Пусть функция $y = f(x)$ определена на промежутке X $(x \in X)$. Выберем некоторую точку $x_0 \in X$ и найдём значение функции в этой точке: $y_0 = f(x_0)$. Дадим x_0 ***приращение аргумента*** Δx, $\Delta x \neq 0$ такое, чтобы $(x_0 + \Delta x) \in U(x_0)$, и вычислим ***приращение функции*** $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, которое зависит от приращения аргумента Δx (рис. 1.14).

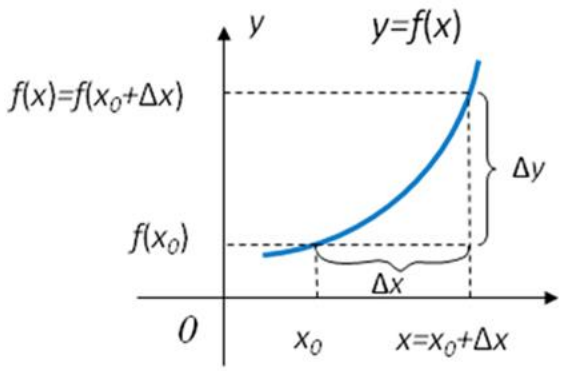


Рис. 1.14

Далее рассмотрим некоторые задачи, приводящие к понятию производной.

Задача о мгновенной скорости прямолинейного движения

Предположим, что точка M движется по некоторой прямой, которую примем за ось Ox. Каждому значению времени t соответствует определенное расстояние $OM = x$. Следовательно, можно сказать, что абсцисса x движущейся точки есть функция времени t, т. е. $x = f(t)$. Это уравнение называется *уравнением движения и* выражает закон движения точки.

Найдем скорость движения точки в любой момент времени t.

Пусть в некоторый момент времени t движущаяся точка занимает положение M, причем $OM = x$. Наряду с моментом времени t рассмотрим более поздний момент времени $t + \Delta t$. За промежуток времени Δt между этими моментами точка проходит путь $\Delta x = f(t + \Delta t) - f(t)$ (рис. 1.15).

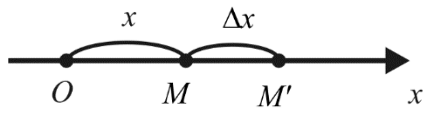


Рис. 1.15

Средняя скорость за промежуток времени Δt равна

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}.$$

Будем уменьшать длину промежутка времени Δt. Предел средней скорости $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ при $\Delta t\to 0$ называется *мгновенной скоростью* в момент времени t:

$$V(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}.$$

Таким образом, если точка движется прямолинейно, то ее скорость в момент времени t равна пределу отношения приращения координаты точки к приращению времени, когда последнее стремится к нулю.

Задача о касательной

Дадим сначала определение касательной к кривой на плоскости.

Пусть L – некоторая непрерывная кривая, M_0 – точка этой кривой. Проведем через точку M_0 секущую M_0N (рис. 1.16). Когда точка N, двигаясь вдоль кривой, как угодно близко приближается к точке M_0, эта секущая, поворачиваясь около точки M_0, стремится к некоторому предельному положению M_0T. *Касательной к кривой L в точке* M_0 называется предельное положение M_0T секущей M_0N, когда точка N стремится к точке M_0 вдоль данной кривой.

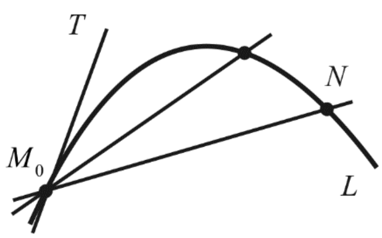


Рис. 1.16

Если секущая M_0N, при $N\to M_0$ не имеет предельного положения, то говорят, что касательной к данной кривой в точке M_0 не существует.

Пусть $y=f(x)$ – некоторая непрерывная функция. Найдем уравнение касательной к графику этой функции в точке $M_0(x_0,y_0)$, где $y_0=f(x_0)$. Придадим абсциссе x_0 приращение Δx и от точки M_0 графика перейдем к точке N с абсциссой $x_0+\Delta x$ и ординатой $y_0+\Delta y$. Пусть M_0N – секущая, φ– угол наклона секущей к положительному направлению оси Ox (рис. 1.17).

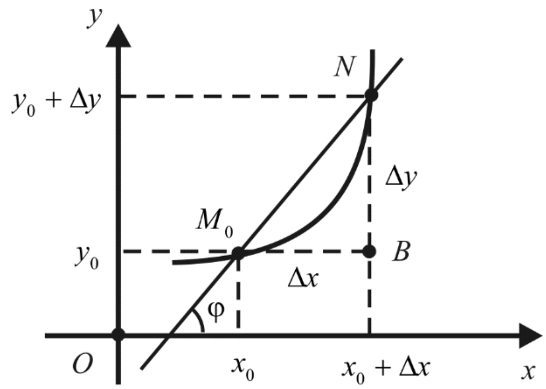


Рис. 1.17

Из треугольника M_0NB находим $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Пусть точка N стремится к точке M_0 вдоль графика функции $y = f(x)$. Тогда $\Delta x \to 0$ и секущая M_0N стремится к своему предельному положению – касательной M_0T (мы предполагаем, что касательная существует). Пусть α – угол, который образует касательная M_0T с осью Ox. Тогда при $\Delta x \to 0$ $\varphi \to \alpha$. Следовательно,

$$\operatorname{tg}\alpha = \lim_{N \to M_0} \operatorname{tg}\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Значит, если в точке $M_0(x_0, y_0)$ к графику функции $y = f(x)$ можно провести касательную, то ее угловой коэффициент

$$k = \operatorname{tg}\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Зная угловой коэффициент касательной, легко написать ее уравнение:

$$y - y_0 = k(x - x_0).$$

В рассмотренных выше задачах по существу делалось одно и то же: приращение функции делилось на приращение независимой переменной, и затем вычислялся предел их отношения. Оказывается, что многие задачи приводят к необходимости вычисления такого же предела, поэтому имеет смысл специально заняться его изучением.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0. Придадим аргументу в точке x_0 ненулевое приращение Δx такое, что $x_0 + \Delta x \in U(x_0)$. Тогда функция получит соответствующее приращение $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Производной функции $\boldsymbol{y = f(x)}$ в точке $\boldsymbol{x_0}$ называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении приращения аргумента к нулю, если этот предел существует.

Таким образом, производная функции $y = f(x)$ в точке x_0 – это *число*, которое обозначается через $f'(x_0)$ (читается: эф штрих от x_0) или $y'(x_0)$:

$$\boldsymbol{f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.}$$

Если производная существует во всех точках x из окрестности $U(x_0)$, то она является *функцией аргумента* x.

Производная имеет несколько обозначений: y', $f'(x_0)$, $\frac{dy}{dx}$.

***Замечание**: Если для некоторого значения* x_0 *выполняется одно из условий* $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=+\infty$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\infty$, *то говорят, что в точке* x_0 *существует бесконечная производная, равная соответственно* $+\infty$ *или* $-\infty$.

Из рассмотренных выше задач следует ***физический*** и ***геометрический смысл производной***.

Физический смысл производной: мгновенная скорость в момент времени t_0 равна производной от закона движения, т. е. $V(t_0)=f'(t_0)$.

Если рассматривать произвольную функцию $y=f(x)$, то ее производная характеризует скорость изменения переменной y по сравнению с переменной x. Чем больше модуль производной, тем резче изменяется функция y при изменении аргумента x и, следовательно, тем круче подымается или опускается график этой функции.

Геометрический смысл производной: угловой коэффициент касательной к графику функции $y=f(x)$, в точке $M(x_0, f(x_0))$ равен значению производной данной функции в точке x_0.

Уравнение касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке $M(x_0, f(x_0))$ имеет вид $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$.

Прямая, перпендикулярная касательной графика функции $y=f(x)$ в точке касания $M(x_0, f(x_0))$, называется *нормалью*. Так как угловые коэффициенты k_1 *и* k_2 перпендикулярных прямых связаны соотношением $k_1\cdot k_2=-1$, то отсюда, предполагая, что $f'(x_0)\neq 0$, получаем уравнение нормали: $y=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)+f(x_0)$.

Пример: Пользуясь определением, найти производную функции $f(x)=x^2+x$ в точке $x_0=2$. Составить уравнение касательной к графику данной функции в точке $x_0=2$.

Решение. По определению производной получаем

$$f'(2)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(2+\Delta x)-f(2)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(2+\Delta x)^2+(2+\Delta x)-(2^2+2)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(\Delta x)^2+5\cdot\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(\Delta x+5)=5.$$

Пользуясь уравнением касательной $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$, имеем

$$y=f'(2)(x-2)+f(2)=5(x-2)+2^2+2=5x-4.$$

Таким образом, уравнение касательной к графику функции $f(x)=x^2+x$ в точке $x_0=2$ имеет вид $y=5x-4$.

Используя понятия односторонних пределов функции, введем понятия правой и левой производных функции $y=f(x)$ в точке x_0.

Правой производной функции $\boldsymbol{y=f(x)}$ в точке $\boldsymbol{x_0}$ (производной справа) называется предел

$$\boldsymbol{f'_+(x_0)=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.}$$

Левой производной функции $\boldsymbol{y=f(x)}$ в точке $\boldsymbol{x_0}$ (производной слева) называется предел

$$\boldsymbol{f'_-(x_0)=\lim_{\Delta x\to-0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.}$$

Это ***односторонние производные***.

Замечание: *Функция $y=f(x)$, определенная в некоторой окрестности точки x_0, имеет производную $f'(x_0)$ тогда и только тогда, когда односторонние производные $f'_+(x_0)$, $f'_-(x_0)$ существуют и равны между собой, причем $f'(x_0)=f'_+(x_0)=f'_-(x_0)$.*

Пример: Функция $y=|x|$ имеет в точке $x_0=0$ правую производную

$$\boldsymbol{f'_+(x_0)=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{|\Delta x+0|-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1,}$$

и левую производную

$$\boldsymbol{f'_-(x_0)=\lim_{\Delta x\to-0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to-0}\frac{|\Delta x+0|-0}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to-0}\frac{-\Delta x}{\Delta x}=-1,}$$

но не имеет производной $f'(x_0)$, поскольку $f'_+(x_0)\neq f'_-(x_0)$.

В дальнейшем под выражением «функция имеет производную» будем понимать наличие *конечной производной*, если не оговорено иное.

Функция, имеющая производную в данной точке, называется ***дифференцируемой в этой точке***. Операция нахождения производной называется ***дифференцированием***.

Теорема: Если функция $y=f(x)$ дифференцируема в данной точке, то она и непрерывна в ней.

Доказательство: Пусть функция $y=f(x)$ дифференцируема в некоторой точке x_0. Тогда существует предел

$$\lim_{\Delta x\to0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0).$$

Таким образом,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)+\alpha,\quad \text{или}\quad \Delta y=f'(x_0)\cdot\Delta x+\alpha\cdot\Delta x,$$

где $\lim\limits_{\Delta x\to0}\alpha=0$.

Имеем,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}(f'(x_0)\cdot\Delta x)+\lim_{\Delta x\to 0}(\alpha\cdot\Delta x)=0,$$

а это и означает, что функция $y=f(x)$ непрерывна в точке x_0.

Замечание*: *При доказательстве теоремы мы установили, что если функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то ее приращение в этой точке выражается формулой

$$\Delta y=f'(x_0)\cdot\Delta x+\alpha\cdot\Delta x,$$

где $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha=0.$

Замечание: *Обратное утверждение предыдущей теоремы неверно: непрерывная в данной точке функция может не иметь в ней производной*.

Например, функция $y=|x-1|$ непрерывна в точке $x_0=1$, но не является в ней дифференцируемой.

3.2. Основные правила дифференцирования

Теорема: Если функции $u=u(x)$ и $v=v(x)$ дифференцируемы в точке x, то сумма, разность, произведение и частное этих функций (при $v(x)\neq 0$) также дифференцируемы в этой точке и имеют место следующие равенства:

1) $(u+v)'=u'+v';$
2) $(u-v)'=u'-v';$
3) $(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v';$
4) $(\frac{u}{v})'=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}.$

Рассмотрим примеры нахождения производных элементарных функций.

1. $f(x)=C.$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{C-C}{\Delta x}=0, \text{ т. е. } C'=0.$$

Таким образом, *постоянный множитель можно выносить за знак производной*:

$$(Cu)'=Cu'.$$

2. $f(x)=x^\alpha$, α – действительное число.

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^\alpha-x^\alpha}{\Delta x}=x^\alpha\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(1+\frac{\Delta x}{x})^\alpha-1}{\frac{\Delta x}{x}\cdot x}=x^\alpha\cdot\frac{\alpha}{x}=\alpha x^{\alpha-1}, \text{ т. е. } \left(x^\alpha\right)'=\alpha x^{\alpha-1}.$$

Отметим частные случаи этой формулы:

$$(x)'=1,\ \left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}},\ \left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}.$$

3. $f(x)=a^x,\ a>0,\ a\neq 1.$

$f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{a^x(a^{\Delta x}-1)}{\Delta x}=a^x\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}=a^x\ln a,$ т. е. $\left(a^x\right)'=a^x\ln a.$ В частности, $\left(e^x\right)'=e^x.$

4. $f(x)=\log_a x,\ a>0,\ a\neq 1.$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a(x+\Delta x)-\log_a x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}\cdot x}=\frac{1}{x}\cdot\log_a e=\frac{1}{x\ln a},$$

т. е. $\left(\log_a x\right)'=\dfrac{1}{x\ln a}.$ В частности, $\left(\ln x\right)'=\dfrac{1}{x}.$

5. Тригонометрические функции:

$$(\sin x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}=\cos x,$$

$$(\cos x)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(x+\Delta x)-\cos x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-\sin\left(\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\frac{\Delta x}{2}}=-\sin x.$$

Таким образом, $(\sin x)'=\cos x,\ (\cos x)'=-\sin x.$ Отсюда

$$(tgx)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{\left(\sin x\right)'\cos x-\sin x\left(\cos x\right)'}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x},$$

$$(ctgx)'=\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)'=\frac{\left(\cos x\right)'\sin x-\cos x\left(\sin x\right)'}{\sin^2 x}=\frac{-\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x}=-\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Пример. Найти производные функций:

1) $y=x^7-4x^5+2x-1;$

2) $y=x\sin x;$

3) $y=\dfrac{x+1}{x^2+2}.$

Решение. Используя основные правила дифференцирования и формулы для производных элементарных функций, имеем:

1) $\left(x^7-4x^5+2x-1\right)'=7x^6-4\cdot 5x^4+2\cdot 1-0=7x^6-20x^4+2;$

2) $\left(x\sin x\right)'=\left(x\right)'\sin x+x\left(\sin x\right)'=\sin x+x\cos x;$

3) $\left(\dfrac{x+1}{x^2+2}\right)'=\dfrac{(x+1)'(x^2+2)-(x+1)(x^2+2)'}{\left(x^2+2\right)^2}=\dfrac{1\cdot(x^2+2)-(x+1)\cdot 2x}{\left(x^2+2\right)^2}=$

$=\dfrac{x^2+2-2x^2-2x}{\left(x^2+2\right)^2}=\dfrac{-x^2+2-2x}{\left(x^2+2\right)^2}.$

Пример. Найти угол φ между положительным направлением оси абсцисс и касательной к параболе $y=x^2-5x-3$ в точке с абсциссой $x_0=3$.

Решение. Так как $y'=2x-5$ то $y'(3)=1$. Поэтому для искомого угла φ имеем $tg\varphi=1$, откуда находим $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$.

Примеры. Вычислить производные следующих функций.

1. $f(x)=5x^3+2x^2-3x+6,$,

$f'(x)=5(x^3)'+2(x^2)'-3(x)'+6'=5\cdot 3\cdot x^2+2\cdot 2\cdot x-3\cdot 1+0=15x^2+4x-3.$

2. $f(x)=x\cos x,$

$$f'(x)=x'\cos x+x(\cos x)'=1\cdot\cos x+x\cdot(-\sin x)=\cos x-x\sin x.$$

3. $f(x)=\dfrac{\ln x}{x},\quad f'(x)=\dfrac{(\ln x)'\cdot x-x'\cdot\ln x}{x^2}=\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x-1\cdot\ln x}{x^2}=\dfrac{1-\ln x}{x^2}.$

3.3. Производная сложной функции. Производная обратной функции

Пусть функция $u=g(x)$ задана в некоторой окрестности $U=U(x_0)$ точки x_0, а функция $y=f(u)$ – в некоторой окрестности $V=V(x_0)$ точки $u_0=g(x_0)$, причем V содержит множество $g(U)$. Тогда определена ***сложная функция*** $y=f(g(x))$ с промежуточным аргументом u и независимым аргументом x.

Теорема: Если функция $u=g(x)$ дифференцируема в точке x_0, а функция $y=f(u)$ – в точке $u_0=g(x_0)$, то сложная функция $y=f(g(x))$ дифференцируема в точке x_0, причем

$$y'(x_0)=f'(u_0)g'(x_0)=f'(g(x_0))g'(x_0).$$

Таким образом, для нахождения производной сложной функции надо *производную данной функции по промежуточному аргументу умножить на производную промежуточного аргумента по независимому аргументу*:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

Это правило остается в силе, если промежуточных аргументов несколько. Так, если $y = f(u),\ u = \varphi(v),\ v = g(x)$, то $y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x$.

Пример. Найти производную функции $y = \sin(5x+2)$.

Решение. Данная функция является сложной. Ее можно представить так: $y = \sin u$, где $u = 5x+2$. Поскольку $y'_u = \cos u = \cos(5x+2)$, $u'_x = 5$, то по правилу дифференцирования сложной функции получаем

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = 5\cos(5x+2).$$

Пример. Найти производную функции $y = \sin^3(5x+2)$.

Решение. Представим данную функцию в виде $y = u^3$, где $y = \sin v$, $v = 5x+2$. По правилу дифференцирования сложной функции получаем

$$y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x = 3u^2 \cdot \cos v \cdot 5 = 15\sin^2(5x+2)\cos(5x+2).$$

Теорема: Если функция $y = f(x)$ строго монотонна на интервале (a,b) и имеет производную $f'(x_0) \neq 0$ в произвольной точке x_0 этого интервала, то обратная ей функция $x = g(y)$ существует и также имеет производную в точке $y_0 = f(x_0)$, причем

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Приведем формулы для вычисления производных обратных тригонометрических функций.

1. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ -1 \le x \le 1;$
2. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ -1 \le x \le 1;$
3. $(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2},\ x \in R;$
4. $(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2},\ x \in R.$

Докажем первую формулу, т.е. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ -1 \le x \le 1.$

Пусть $y = \arcsin x$. Обратная ей функция имеет вид $x = \sin y,\ y \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$. На интервале $y \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ верно равенство $x'_y = \cos y \neq 0$. По правилу дифференцирования обратных функций

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

где перед корнем взят знак плюс, так как $\cos y > 0$ при $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

В точках $x = \pm 1$ имеем $(\arcsin x)' = +\infty$.

3.4. Дифференциал функции

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0. Тогда ее приращение, как было сказано ранее в пункте 3.1, в этой точке может быть представлено в виде

$$\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x,$$

где $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha = 0$.

При достаточно малых значениях Δx и $f'(x_0) \neq 0$ основной вклад в эту сумму вносит первое слагаемое $f'(x_0)\Delta x$, так как $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha = 0$, т. е. величина $\alpha\Delta x$ сколь угодно мала по сравнению с Δx при $\Delta x \to 0$. Первое слагаемое пропорционально Δx и, следовательно, линейно зависит от Δx.

Говорят, что слагаемое $f'(x_0)\Delta x$ является главной линейной частью приращения функции $y = f(x)$ в точке x_0 и называют его ***дифференциалом функции*** $y = f(x)$ в точке x_0.

Обозначают дифференциал через dy или $df(x_0)$. Таким образом,

$$dy = f'(x_0) \cdot \Delta x.$$

Для функции $y=x$ получаем $dy = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$, т. е. дифференциал независимой переменной равен приращению этой переменной: $dx = \Delta x$. Поэтому предыдущую формулу можно переписать в виде:

$$dy = f'(x_0)dx,$$

откуда $f'(x_0) = \frac{dy}{dx}$, или, более кратко, $y' = \frac{dy}{dx}$ (читается: «игрек штрих равно дэ игрек по дэ икс»). Это означает, что *производная функции равна отношению дифференциала данной функции к дифференциалу ее аргумента*.

Замечание: *Дифференциал функции можно определить и так. Если приращение функции* $y = f(x)$ *в точке* x_0 *представимо в виде* $\Delta y = A\Delta x + \alpha\Delta x$, *где A – постоянная, то* $dy = A\Delta x$, *а сама функция называется дифференцируемой в точке* x_0.

Дифференциал функции в точке имеет простой геометрический смысл. Проведем к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x_0, y_0)$ касательную MT и рассмотрим ординату этой касательной для точки $x_0 + \Delta x$ (рис. 1.18).

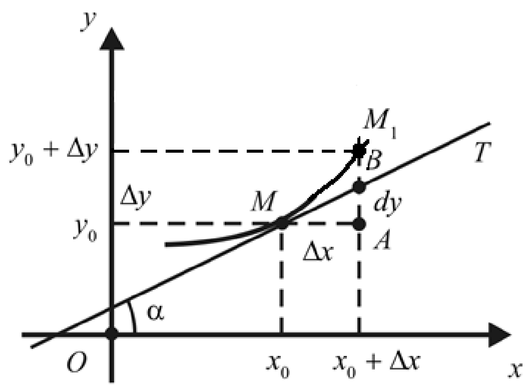


Рис. 1.18

На рисунке $|AM| = \Delta x,\ |AM_1| = \Delta y.$ Из прямоугольного треугольника MAB имеем: $tg\alpha = \dfrac{|AB|}{\Delta x}$, т. е. $|AB| = tg\alpha\Delta x.$ Но, согласно геометрическому смыслу производной, $tg\alpha = f'(x_0)$. Поэтому имеет место равенство $|AB| = f'(x_0)\cdot\Delta x,$ т. е. $|AB| = dy.$

Таким образом, дифференциал функции $y = f(x)$ в точке x_0 равен приращению ординаты касательной к графику функции в этой точке, когда x_0 получает приращение Δx.

Процесс нахождения дифференциала функции, как и производной, называется ***дифференцированием*** и осуществляется по тем же правилам, что и для производных:

1) $d(u+v) = du + dv;$
2) $d(u-v) = du - dv;$
3) $d(uv) = v\cdot du + u\cdot dv;$
4) $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\cdot du - u\cdot dv}{v^2},\ v \neq 0.$

Пример: Найти дифференциал функции $y = \cos x + x\sin x.$

Решение.

$$dy = d(\cos x) + d(x\sin x) = -\sin x dx + \sin x dx + xd(\sin x) = x\cos x dx.$$

3.5. Основные теоремы дифференциального исчисления

Рассмотрим практическую сторону применения производной. Следует отметить, что в этом разделе мы рассмотрим только выборочно теоремы дифференциального исчисления, необходимые будущему социологу в своей профессиональной деятельности. Для более подробного и углубленного изучения данного вопроса необходимо смотреть и изучать специализированную математическую литературу.

Пусть функция $y = f(x)$ определена на интервале (a,b).

Точка $x_0 \in (a,b)$ называется ***точкой локального минимума (локального максимума)*** функции $y = f(x)$, если существует такая окрестность $U(x_0)$ точки x_0, что для любого $x \in U(x_0)$ выполнено условие $f(x) \geq f(x_0)$ ($f(x) \leq f(x_0)$). Точки локального минимума и локального максимума называются ***точками экстремума***, а значения функции в них – ***экстремумами функции***.

Отметим, что точки минимума и максимума функции имеют *локальный характер*, в силу чего значения функции в точках минимума могут оказаться больше ее значений в точках максимума. Так, на рисунке 1.19 точки x_1 и x_3 являются точками максимума функции, а точки x_2 и x_4 – точками минимума функции. Значение функции в точке максимума x_1 меньше ее значения в точке минимума x_4.

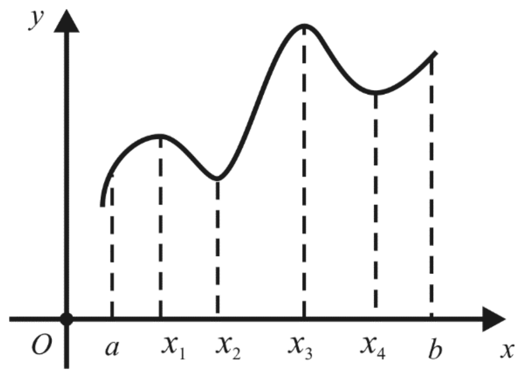


Рис. 1.19

Необходимое условие экстремума функции выражается следующей теоремой.

Теорема (Ферма). Пусть x_0 – точка экстремума функции $y = f(x)$ и существует производная $f'(x_0)$. Тогда $f'(x_0) = 0$.

Теорема Ферма имеет следующий геометрический смысл: если x_0 – точка экстремума функции $y = f(x)$ и существует $f'(x_0)$, то касательная, проведенная к графику данной функции в точке $(x_0, f(x_0))$ параллельна оси Ox (рис. 1.20). В самом деле, в этом случае угловой коэффициент касательной равен нулю: $k = tg\alpha = f'(x_0) = 0$.

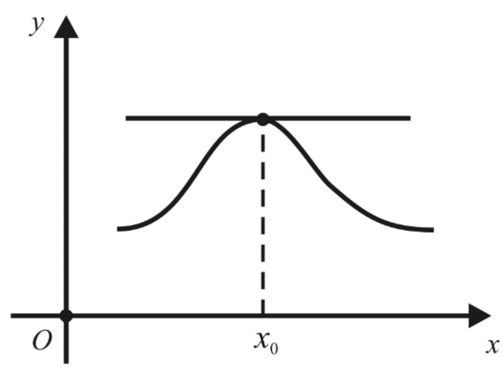


Рис. 1.20

Замечание. *Условие* $f'(x_0) = 0$ *является необходимым, но не достаточным условием экстремума функции* $y = f(x)$ *в точке* x_0. *Например, функция* $y = x^3$ *в точке* $x_0=0$ *имеет производную, равную нулю, но* $x_0=0$ *не является точкой экстремума данной функции (*рис. *1.21, а).*

Существуют функции, которые в точках экстремума не имеют производной. Например, непрерывная функция $y = |x|$ в точке $x_0 = 0$ производной не имеет, но $x_0 = 0$ является точкой минимума данной функции (рис. 1.21, *б*).

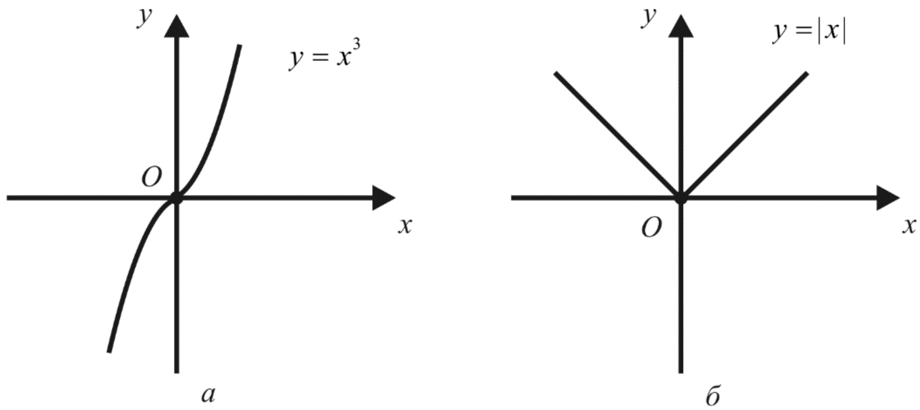


Рис. 1.21

Точки, в которых производная функции не существует или равна нулю, называют ***критическими точками*** или ***точками, подозрительными на экстремум***. Точки, в которых производная функции равна нулю, называют ***стационарными точками***.

Напомним, что функция $y = f(x)$ называется ***возрастающей*** **(*убывающей*)** на интервале (a,b), если для любых значений x_1 и x_2 принадлежащих данному интервалу, из неравенства $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$.

Возрастающие и убывающие функции называются ***монотонными***.

Одна из основных задач исследования функции – это нахождение промежутков ее возрастания и убывания. Исследование на монотонность легко провести с помощью производной. Рассмотрим только одно достаточное условие возрастания (убывания) функции, в котором используется понятие производной.

Теорема (*достаточное условие возрастания (убывания) функции*). Если функция $y = f(x)$ дифференцируема на интервале (a,b) и $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$ для любого $x \in (a,b)$, то эта функция возрастает (убывает) на интервале (a,b).

Данная теорема имеет простой геометрический смысл. Если на некотором интервале касательная к графику функции $y = f(x)$ образует с осью *Ox* острый угол α $(tg\alpha > 0)$, то функция возрастает на этом интервале (рис. 3.22, *а*). Если касательная к графику образует с осью *Ox* тупой угол α $(tg\alpha < 0)$, то функция убывает (рис. 1.22, *б*).

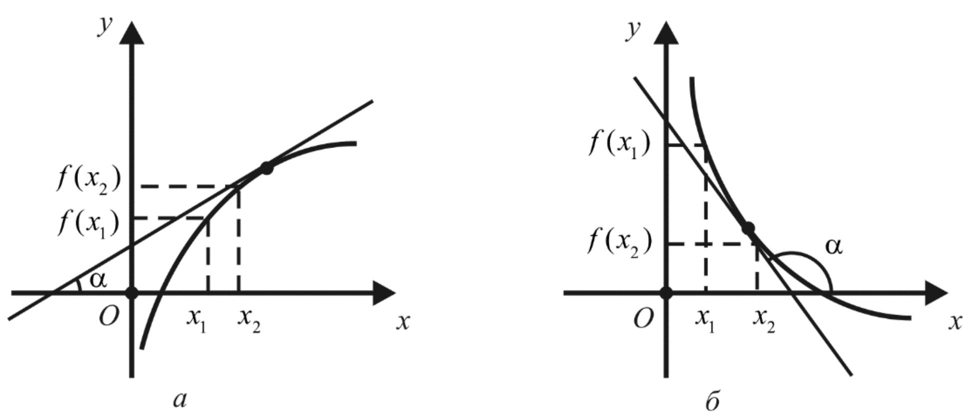


Рис. 1.22

Пример. Найдите промежутки возрастания и убывания функции угол $f(x) = x^3 - 3x + 1$.

Решение. Данная функция определена на всей числовой прямой. Найдем ее производную:

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1).$$

Таким образом, $f'(x) > 0$ при $x \in (-\infty;-1) \cup (1;+\infty)$ и $f'(x) < 0$ при $x \in (-1;1)$. Следовательно, функция возрастает на интервалах $x \in (-\infty;-1) \cup (1;+\infty)$ и убывает на интервале $x \in (-1;1)$.

Теорема (*первое достаточное условие экстремума*). Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой ε-окрестности точки x_0. Если в точке $x = x_0$ производная функции $y = f(x)$ равна нулю и при переходе через эту точку меняет знак, то x_0 является точкой экстремума, причем x_0 – точка максимума, если знак производной меняется с плюса на минус (т. е. $f'(x) > 0$ при $x_0 - \varepsilon < x < x_0$ и $f'(x) < 0$ при $x_0 < x < x_0 + \varepsilon$) и x_0 – точка минимума, если знак производной меняется с минуса на плюс (т. е. $f'(x) < 0$ при $x_0 - \varepsilon < x < x_0$ и $f'(x) > 0$ при $x_0 < x < x_0 + \varepsilon$).

Замечание: *Теорема (первое достаточное условие экстремума) остается верной и в случае, если x_0 – точка непрерывности функции и производная в ней не существует, но меняет знак при переходе через данную точку.*

Пример. Найдите наименьшее и наибольшее значения функции $y(x) = x^4 - 2x^2 - 3$ на промежутке [0;2].

№	План нахождения $y_{наим}$ и $y_{наиб}$ на промежутке $[a, b]$	Применение плана
1	Находим производную функции, т.е. y'	$y'(x) = 4x^3 - 4x$.
2	Находим критические точки функции	$y'(x) = 0,\ 4x^3 - 4x = 0,\ 4x(x^2 - 1) = 0$, $x = 0,\quad x = 1,\quad x = -1$ – критические точки функции.
3	Выбираем критические точки, лежащие внутри данного промежутка $[a, b]$	$0 \in [0,2],\ 1 \in [0,2], -1 \notin [0,2]$.
4	Находим значения функции в критических точках (принадлежащих промежутку) и на концах промежутка	$y(0) = 0^4 - 2 \cdot 0^2 - 3 = -3$, $y(1) = 1^4 - 2 \cdot 1^2 - 3 = -4$, $y(2) = 2^4 - 2 \cdot 2^2 - 3 = 5$.
5	Из найденных значений функции выбираем наибольшее и наименьшее	$y_{наим} = y(1) = -4$, $y_{наиб} = y(2) = 5$.

Ниже мы рассмотрим задачи из социально-экономической сферы, которые приводят к понятию производной.

3.6. Экономический смысл производной. Предельные величины в экономической сфере

Теоретический анализ разнообразных явлений экономики использует ряд предельных величин. Перечислим лишь некоторые из них: предельная стоимость, предельные издержки, предельный доход, предельная производительность, предельная полезность, предельная склонность к потреблению. Все эти величины самым тесным образом связаны с понятием производной.

Производительность труда. Пусть функция $Q(t)$ выражает количество произведенной продукции за время t. Найдем производительность труда в момент времени t_0.

За период времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$ количество произведенной продукции изменится от значения $Q(t_0)$ до значения $Q(t_0 + \Delta t)$, т. е. на $\Delta Q = Q(t_0 + \Delta t) - Q(t_0)$; тогда средняя производительность труда за этот период времени $u_{ср} = \dfrac{\Delta Q}{\Delta t}$.

Под производительностью труда в момент времени t_0 естественно понимать предельное значение средней производительности за период времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$ при $\Delta t \to 0$, т. е.

$$u(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} u_{ср} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t}.$$

Таким образом, производительность труда – это скорость роста объема продукции.

В случае дифференцируемой функции $Q(t)$ вычисление производительности труда $u(t_0)$ в момент времени t_0 сводится к нахождению производной функции $Q(t)$ в точке t_0, т.е.

$$u(t_0) = Q'(t_0).$$

Предельный доход. Пусть функция $R(q)$ показывает зависимость дохода R от продажи продукции объема q. Рассуждения, аналогичные предыдущим, приведут к следующей формуле:

$$\lim_{\Delta q \to 0} \frac{\Delta R}{\Delta q} = R'(q).$$

Величина $R'(q)$ определяет предельный доход, который еще называют ***маржинальным*** и обозначают MR, т.е. $MR = R'(q)$.

Предельный продукт. Пусть функция $Q(x)$ выражает зависимость количества произведенной продукции от величины затрат x.

Отношение $\dfrac{\Delta Q}{\Delta x}$ есть средняя величина продукта, соответствующая величине затрат в размере Δx. Под предельным продуктом при затратах x_0 в экономике понимают следующий предел:

$$MQ(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} Q_{ср} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta x}.$$

В случае дифференцируемой функции $Q(x)$ вычисление величины предельного продукта $MQ(x)$ при затратах x сводится к нахождению производной функции $Q(x)$ в точке x, т.е.

$$MQ(x) = Q'(x).$$

Предельная величина характеризует не состояние (как суммарная или средняя величины), а процесс, изменение экономического объекта. Таким образом, предельная величина выступает как скорость изменения некоторого экономического объекта (процесса). Определение предельных величин с помощью понятия производной позволяет использовать математический аппарат для доказательства экономических законов.

3.7. Примеры использования производной в социологии и экономике

Пример. Количество продукции $Q(t)$, произведенной рабочим в течение дня, выражается функцией $Q(t) = -\frac{5}{6}t^3 + \frac{15}{2}t^2 + 100t + 50,$ где t – время в часах, причём $1 \le t \le 8.$ Необходимо вычислить производительность труда через 1 ч после начала работы и за 1 час до окончания рабочего дня.

Решение. Производительность труда $u(t)$ выражается формулой $u(t) = Q'(t),$ тогда $u(t) = Q'(t) = -2{,}5t^2 + 15t + 100.$ Производительность труда через 1 ч после начала работы определяется как $u(1)$: $u(1) = -2{,}5 \cdot 1^2 + 15 \cdot 1 + 100 = 112{,}5$, т.е. через 1 ч после начала работы производительность труда равна 112,5 усл. ед. продукции в час. Производительность труда за 1 час до окончания рабочего дня определяется как $u(7)$: $u(7) = -2{,}5 \cdot 7^2 + 15 \cdot 7 + 100 = 82{,}5$ усл. ед. продукции в час.

Эластичность функции

Понятие эластичности было введено Альфредом Маршаллом в связи с анализом функции спроса. Впоследствии это понятие было распространено и на другие функции.

Эластичностью функции называется предел отношения относительного приращения функции $y=f(x)$ к относительному приращению переменной x, если приращение аргумента стремится к нулю $\Delta x \to 0$. Эластичность функции обозначается $E_x(y)$:

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\frac{x}{y}\right) = \frac{x}{y}y';$$

$$E_x(y) = \frac{x}{y}y'.$$

Вывод: эластичность – это коэффициент пропорциональности между относительными изменениями величин y и x. Если, например, x увеличится на один процент, то y увеличится (приближенно) на $E_x(y)$ процентов.

Эластичность спроса относительно цены. Пусть спрос q зависит от цены p по закону q=q(p). Функция $E_p(q)=\frac{p}{q}\cdot q'$ показывает, как изменится спрос на данный товар, если цена изменится на 1%. Так как обычно $q'<0$, т.е. с увеличением цены спрос уменьшается, то $E_p(q)$ берут со знаком «–», т.е.

$$E_p(q)=-\frac{p}{q}\cdot q'.$$

Если $\left|E_p(q)\right|>1$, то говорят, что спрос эластичен, а если $\left|E_p(q)\right|<1$, то неэластичен, если же $\left|E_p(q)\right|=1$, то спрос нейтрален.

Эластичность предложения относительно цены. Пусть количество товара s, предлагаемого на продажу в единицу времени, зависит от цены p по закону s=s(p). Функция $E_p(s)=-\frac{p}{s}\cdot s'$ показывает, как изменится предложение, если цена на товар изменится на 1%.

Пример. Найдите эластичность спроса q относительно цены p, если $q(p)=-2p^2+3p+8,$ при p=1, p=2.

Решение. Эластичность спроса относительно цены найдём по формуле $E_p(q)=-\frac{p}{q}\cdot q'.$ Найдём производную $q'(p)=\left(-2p^2+3p+8\right)'=-4p+3.$ Получаем

$$E_p(q)=-\frac{p}{-2p^2+3p+8}\cdot\left(-4p+3\right)=-\frac{-4p^2+3p}{-2p^2+3p+8}.$$

При p=1 получаем $E_1(q)=-\frac{-4+3}{-2+3+8}=\frac{1}{9},$ т.е. спрос неэластичен.

При p=2 получаем $E_2(q)=-\frac{-4\cdot 2^2+3\cdot 2}{-2\cdot 2^2+3\cdot 2+8}=1\frac{2}{3},$ т.е. спрос эластичен.

Пример. Правильное применение знаний об эластичности спроса на товары помогает правительству в оценке последствий введения новых налогов или акцизов. Пусть x – акцизы на табачные изделия, y – спрос на этот товар. Предположим, что государство предполагает повысить акцизы на табачные изделия на 10%. Если известно, что эластичность спроса составляет $E_x(y)=-0,2$, то следует ожидать, что это вызовет снижение спроса на данный товар на $0,2\cdot 10$=2% и доходы государства по продаже табачных изделий повысятся на 8%.

3.8. *Исторические сведения*

Отдельные задачи об определении касательных к кривым были решены еще математиками Древней Греции. Например, были найдены способы построения касательных к коническим сечениям и некоторым другим кривым. Однако *разработанные античными математиками методы были применимы лишь в весьма частных случаях и далеки от идей дифференциального исчисления.*

Понятие производной возникло в XVII в., задолго до построения строгой теории пределов. Формирование понятия исторически связано с двумя задачами: задачей проведения касательной к кривой и задачей нахождения скорости движения.

Французский математик и юрист П. Ферма не позднее чем в 1629 г. предложил способы проведения касательных к произвольным кривым, которые, по существу, основывались на применении производных. Другой французский математик и философ Р. Декарт разработал к 1637 г. метод координат и основы аналитической геометрии. Научная переписка между ними помогла выработать общее понятие касательной, понимаемое как предельное положение секущей.

Работы Р. Декарта и П. Ферма способствовали открытию интегрального исчисления и его постепенному обоснованию.

В 1666 г. английский ученый И. Ньютон и независимо от него несколько позднее немецкий математик Г. Лейбниц разработали теорию производных, получившую название дифференциального исчисления. И. Ньютон, исходя из вопросов механики, представлял аргумент функции как время, функцию времени называл флюентой (т. е. текущей величиной), а ее производную рассматривал как скорость течения (т. е. изменения) функции и называл флюксией. И. Ньютон обозначал функции последними буквами латинского алфавита u, x, y, z, *а их флюксии, т. е. производные от флюент по времени, – соответственно теми же буквами с точкой над ними:* $\dot{u}$, $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$. *Терминология И. Ньютона (флюенты, флюксии) и его символы производной утратили свое значение. Лишь в физике в некоторых случаях производные по времени обозначают точками над буквами.*

В середине 70-х гг. XVII в. Г. Лейбниц разработал очень удобный алгоритм дифференциального исчисления. Дальнейшее развитие дифференциального исчисления шло сначала по пути, намеченному Лейбницем; большую роль на этом этапе сыграли работы братьев Якоба и Иоганна Бернулли, английского математика Брука Тейлора (1685–1731) и др.

Следующим этапом в развитии дифференциального исчисления были работы Л. Эйлера и Ж. Лагранжа (XVIII в.). Эйлер впервые стал излагать его как аналитическую дисциплину, независимо от геометрии и механики. Он вновь выдвинул в качестве основного понятия дифференциального исчисления производную. Лагранж пытался строить дифференциальное исчисление алгебраически, пользуясь разложением функций в степенные ряды; ему, в частности, принадлежит введение термина «производная» и обозначения y' *и* $f'(x)$. *В начале XIX в. была удовлетворительно решена задача обоснования дифференциального исчисления на основе теории пределов. Это было выполнено главным образом благодаря работам О. Коши, Б. Больцано и К. Гаусса. Более глубокий анализ исходных понятий дифференциального исчисления был связан с развитием теории множеств и теории функций действительной переменной в конце XIX – начале XX вв.*

Вопрос о взаимосвязи между непрерывностью функции и ее дифференцируемостью сыграл важную роль в проблеме строгого обоснования математического анализа. Дело в *том, что в течение XVII, XVIII и первой половины XIX в. математики считали, что любая непрерывная функция имеет производную. Это утверждение основывалось на том, что непрерывную кривую представляли как траекторию движения тела, а производная – это скорость движения, тогда естественно считать, что всякое движение совершается с некоторой скоростью. Немецкий математик К. Вейерштрасс в 1875 г. построил пример непрерывной функции, не имеющей производной ни в одной точке. Геометрически это значит, что кривая непрерывна, но ни в одной точке не имеет касательной.*

3.9. Примеры решения задач

1. Найдите по определению производную функции $f(x)=x^2$ в точке x.

Решение. Воспользуемся формулой

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

1) $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=(x+\Delta x)^2-x^2=x^2+2x\Delta x+\left(\Delta x\right)^2-x^2=2x\Delta x+\left(\Delta x\right)^2;$

2) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\dfrac{2x\Delta x+\left(\Delta x\right)^2}{\Delta x}=\dfrac{\Delta x(2x+\Delta x)}{\Delta x}=2x+\Delta x;$

3) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(2x+\Delta x\right)=2x.$

Таким образом, $f'(x)=\left(x^2\right)'=2x.$

2. Найдите производную следующих функций

1) $y=2x^3-4x^2+5x-3.$

Решение.

$$y'=\left(2x^3-4x^2+5x-3\right)'=\left(2x^3\right)'-\left(4x^2\right)'+\left(5x\right)'-\left(3\right)'=2\left(x^3\right)'-4\left(x^2\right)'+5\left(x\right)'=$$
$$=6x^2-8x+5;$$

2) $y=\left(2x+3\right)\sin x.$

Решение.

$$y'=\left(\left(2x+3\right)\sin x\right)'=\left(2x+3\right)'\sin x+\left(2x+3\right)\left(\sin x\right)'=2\sin x+\left(2x+3\right)\cos x;$$

3) $y=\dfrac{x^3}{\cos x}.$

Решение.

$$y'=\left(\frac{x^3}{\cos x}\right)'=\frac{\left(x^3\right)'\cos x-x^3\left(\cos x\right)'}{\left(\cos x\right)^2}=\frac{3x^2\cos x-x^3\left(-\sin x\right)}{\left(\cos x\right)^2}=\frac{x^2(3\cos x+x\sin x)}{\cos^2 x};$$

4) $y=\dfrac{2x\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}$.

Решение. Преобразуем исходную функцию к следующему виду:

$$y=\frac{2x\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}=\frac{2x\cdot x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}}=2x\cdot x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{-\frac{1}{3}}=2x^{\frac{7}{6}},$$

$$y'=\left(2x^{\frac{7}{6}}\right)'=2\cdot\frac{7}{6}x^{\frac{7}{6}-1}=\frac{7}{3}x^{\frac{1}{6}}=\frac{7}{3}\sqrt[6]{x};$$

5) $y=\dfrac{4}{\sqrt[3]{x^2}}$.

Решение. Преобразуем исходную функцию к следующему виду $y=\dfrac{4}{\sqrt[3]{x^2}}=4\cdot x^{-\frac{2}{3}}$, тогда

$$y'=\left(4\cdot x^{-\frac{2}{3}}\right)'=4\cdot\left(x^{-\frac{2}{3}}\right)'=4\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)x^{-\frac{2}{3}-1}=-\frac{8}{3}x^{-\frac{5}{3}}=-\frac{8}{3x^{\frac{5}{3}}}=-\frac{8}{3x\cdot\sqrt[3]{x^2}}.$$

3. Составьте уравнение касательной к параболе $y=x^2+x$ в точке x=2.

Решение. Уравнение касательной имеет вид $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$. Найдем ординату в точке x_0=2: $f(x_0)=f(2)=2^2+2=6$.

Далее найдём производную $y'=f'(x)=(x^2+x)'=2x+1$, и её значение в точке $f'(2)=2\cdot 2+1=5$. Таким образом, $y=5(x-2)+6$. Уравнение касательной: $y=5x-4$.

4. Вычислите эластичность функции $y=3x-6$ при: а) x=10; б) x=1.

Решение. Находим производную $y=\left(3x-6\right)'=3$, тогда

$$E_x(y)=\frac{x}{y}\cdot y'=\frac{x}{3x-6}\cdot 3=\frac{x}{x-2};$$

а) при x=10 имеем $E_{10}(y)=\dfrac{10}{10-2}=\dfrac{10}{8}=1{,}25$. Это означает, что если x возрастет на 1% (т.е. с 10 до 10,01), то значение y увеличится на 1,25 %;

б) при x=1 имеем $E_1(y)=\dfrac{1}{1-2}=-1$. Это означает, что если x увеличится на 1 % (т.е. с 1 до 1,01), то y уменьшится на 1 %.

5. Выясните, как изменится выручка продавца с увеличением цены товара при различных вариантах эластичности спроса.

Решение. Пусть цена товара равна p, а величина спроса составляет q, причем $q = q(p)$. Тогда выручка U равна произведению цены товара p на количество проданных единиц товара (на величину спроса) q, т.е. $U=q\cdot p=q(p)\cdot p$. Эластичность выручки относительно цены равна

$$E_p(U)=E_p(q\cdot p)=E_p(q)+E_p(p)=E_p(q)+1,$$

где $E_p(q)$ – эластичность спроса по цене. Так как эластичность спроса по цене отрицательна, то $E_p(U)=E_p(q)+1=1-\left|E_p(q)\right|$.

Возможны следующие варианты:

a) $\left|E_p(q)\right|>1$ (т.е. спрос эластичен), то $\left|E_p(U)\right|<0$. Это означает, что изменение выручки происходит в направлении, противоположном изменению цены, т.е. при эластичном спросе повышение цены p ведет к уменьшению выручки U, а снижение цены на товар увеличивает выручку;

b) $\left|E_p(q)\right|=1$ (т.е. спрос нейтрален), тогда $\left|E_p(U)\right|=0$. Это означает, что изменение цены товара не влияет на выручку;

c) $\left|E_p(q)\right|<1$ (т.е. если спрос неэластичен), тогда $\left|E_p(U)\right|>0$. Это означает, что в этом случае изменение цены товара вызывает изменение выручки в том же направлении. Повышение цены товара ведет к увеличению выручки. Таким образом, продавцу выгодно повышать цену, что приведет к увеличению выручки.

6. Как изменится спрос на товар, если эластичность спроса относительно дохода равна $E_r(q)=3{,}15$, а доход увеличится с 1000 до 1042 ден. ед.?

Решение. Величина $E_r(q)=3{,}15$ показывает, что если доход r увеличится на 1 %, то спрос увеличится на 3,15 %.

Из условия задачи получаем, что доход увеличился на

$$\frac{1042-1000}{1000}\cdot 100\%=4{,}2\%.$$

Следовательно, спрос при этом увеличится на 4,2·3,15 = 13,23 %.

3.10. Задачи для самостоятельного решения

1. Найдите по определению производные функции в точках x_0=1, x_0=2:

a. $y=3x^2+x-2;$

b. $y=x^2-2x+10;$

c. $y=-5x^2+6x+1.$

2. Найдите производные следующих функций:

a. $y=4x^3-5x^2-\dfrac{6}{x}+10;$

b. $y = x^7 - 4x^5 + 2x - 1;$

c. $y = \dfrac{1}{x^3} - \sqrt{x} - x^2;$

d. $y = \sin x \cdot \ln x + x^3 - \sqrt{x} + 4;$

e. $y = (4x^3 - 5x^2 - 6) \cdot \cos x;$

f. $y = x \sin x;$

g. $y = (x^2 + 1) \cdot \cos x;$

h. $y = (x^3 + 2) \cdot \sqrt{x};$

i. $y = \dfrac{2x - 1}{x + 2};$

j. $y = \dfrac{\ln x}{x};$

k. $y = \dfrac{x + 1}{x^2 + 2}.$

3. Напишите уравнения касательных к графикам функции в точке x_0=2:

a. $y = x^2 + 6x + 1;$

b. $y = -3x^2 - x + 2;$

c. $y = 2x^2 - 4x + 3.$

4. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$:

a. $f(x) = x^3 + 3x - 5$ на отрезке [-2;2];

b. $f(x) = 2x - \sqrt{x}$ на отрезке [0;4].

5. Функция полных издержек производства имеет вид $K = K(x)$, где x – объем продукции в условных единицах для данного производства. Определите, при каком объеме производства продукции средние издержки $K_{сред} = \dfrac{K(x)}{x}$ имеют наименьшее значение:

a. $K(x) = x^3 - 6x^2 + 15x;$

b. $K(x) = x^3 - 3x + 5.$

6. Рассчитайте эластичность следующих функций:

a. $y = x^3 + 1,$ x_0=5, x_0=1;

b. $y = 5\ln x,$ x_0=e;

c. $y = 1 + 2x - x^2,$ x_0=10, x_0=1;

d. $y = \dfrac{2x + 1}{x^2 + 1},$ x_0=1.

7. Найдите эластичность спроса q относительно цены p, если $q(p) = -3p^2 + 4p + 5$, при p=1, p=2.

8. Функция спроса имеет вид $q(p) = -p^2 + p + 2$. Оцените эластичность спроса по цене при цене p=1.

9. Функция q спроса относительно дохода r имеет вид $q(r) = 4 + 1{,}2r + 0{,}44r^2$. Как изменится спрос, если доход изменяется: 1) от 100 до 150; 2) от 100 до 90?

10. Дана функция $q = \dfrac{p^3}{2p^2 + 7}$, выражающая зависимость спроса q от цены p. Найдите эластичность спроса относительно цены. Вычислите частное значение эластичности при указанном значении цены p_0=1. Как увеличение цены повлияет на выручку?

11. Объем продукции u, выпускаемой рабочим в течение рабочего дня, выражается функцией $u(t) = -\dfrac{5}{48}t^3 + \dfrac{5}{4}t^2$, где t – время (ч). Вычислите производительность труда и скорость ее изменения в конце пятого часа работы.

12. Под экспериментальные посадки ценных культур решили отгородить участок прямоугольной формы длиной 144 м и шириной 24 м, а затем разделить его пополам перпендикулярно длине. Но с целью экономии средств на постройку забора решили найти наиболее выгодный размер участка. Найдите длину и ширину нового участка такой же площади и экономию средств, если 1 погонный метр забора стоит 2,25 доллара.

13. Под посевы элитных культур выделили земельный участок прямоугольной формы площадью 3,24 га и вдоль всей границы окопали рвом. Найдите размер участка, чтобы стоимость рва была наименьшей. Вычислить наименьшую стоимость рва, если погонный метр его обходится в 0,5 усл. ед.

14. Расходы на топливо для парохода делятся на две части. Первая из них A не зависит от скорости и равна 480 тыс. рублей в час. А другая часть S^* расходов пропорциональна кубу скорости (т.е. равна kv^3), причем при скорости 10 км/ч расходы составляют 30 тыс. рублей в час. При какой скорости общая сумма расходов на 1 км пути будет наименьшей?

15. Океанское пассажирское судно движется со скоростью 12 узлов. Стоимость топлива S^*, необходимого для движения судна, пропорциональна кубу его скорости (т.е. равна kv^3) и составляет 200 усл. ед. в час при скорости 10 узлов. Все другие виды расходов A составляют 500 усл. ед. в час. Найдите экономию средств при движении с наиболее выгодной скоростью, если до порта назначения 1000 морских миль (1 узел = 1 морская миля в час).

3.11. Вопросы для самоконтроля

1. Дайте определение производной функции. Что такое дифференцирование функции? Какая функция называется дифференцируемой в точке?

2. Геометрический и физический смысл производной функции.

3. Как вычислить производную на основе ее определения?

4. Как используется понятие мгновенной скорости в социально-экономической сфере?

5. Запишите основные правила дифференцирования функций.

6. Выпишите таблицу производных основных элементарных функций.

7. Дайте определение дифференциала функции. Геометрический смысл дифференциала функции.

8. Экстремумы функции. Необходимое и достаточное условия экстремума функции.

9. Что такое эластичность функции? Кем данное понятие было введено впервые?

10. Как найти эластичность спроса относительно цены? Что показывает данная функция?

11. Как найти эластичность предложения относительно цены? Что показывает данная функция?

4. Основы интегрального исчисления

4.1. Первообразная. Понятие неопределённого интеграла

Во многих вопросах науки приходится восстанавливать функцию по известной ее производной, т. е. зная функцию $F'(x) = f(x)$, нужно найти функцию $F(x)$. Для решения таких задач служит операция ***интегрирования***, обратная операции дифференцирования, а раздел математического анализа, изучающий способы нахождения функции по ее производной, называют *интегральным исчислением*.

Функция $F(x)$ называется ***первообразной функции*** $f(x)$ на некотором интервале $(a;b)$, если для любого $x \in (a;b)$ выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

Пример. Пусть $f(x) = 3x^2$, тогда $F(x) = x^3$, т.к. $F'(x) = (x^3)' = 3x^2 = f(x)$.

Иногда не указывают конкретно, на каком интервале рассматривается вопрос о первообразной функции $f(x)$. В таких случаях предполагается, что речь идет о максимальном промежутке, на котором функция $f(x)$ определена и непрерывна.

Теорема: Пусть $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$ на интервале $(a;b)$. Тогда $\Phi(x) = F(x) + C$, где C – константа, также является первообразной функции $f(x)$ на интервале $(a;b)$. Справедливо обратное утверждение, каждая функция, являющаяся первообразной функции $f(x)$ на интервале $(a;b)$, может быть представлена в виде

$$\Phi(x) = F(x) + C,$$

где $F(x)$ – некоторая первообразная функции $f(x)$ на интервале $(a;b)$, C – константа.

Из теоремы следует, что множество функций вида $\Phi(x) = F(x) + C$, где $F(x)$ – одна из первообразных функции $f(x)$, C – произвольная постоянная, исчерпывает все семейство первообразных функции $f(x)$.

Совокупность всех первообразных функции $f(x)$ называют ***неопределенным интегралом*** от этой функции и обозначают символом $\int f(x)dx$.

Таким образом, по определению

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где $F'(x) = f(x)$.

Функция $f(x)$ называется *подынтегральной функцией*, выражение $f(x)dx$ – *подынтегральным выражением*, *x – переменной интегрирования*. Операция нахождения неопределенного интеграла от функции называется ***интегрированием*** этой функции.

Геометрически неопределенный интеграл представляет собой семейство кривых, получаемых из одной из них (любой) путем параллельных ее переносов вдоль оси ординат (рис. 1.23).

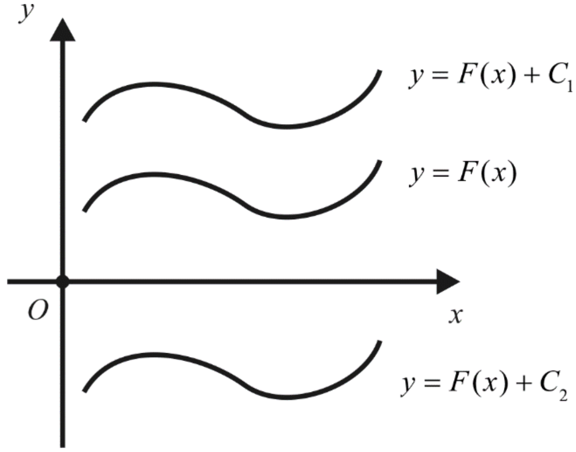


Рис. 1.23 – Семейство кривых

Возникает вопрос: для любой ли функции $f(x)$ существует первообразная, а значит, и неопределенный интеграл? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема, которую мы приводим без доказательства.

Теорема. Если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a;b]$, то на этом промежутке у функции $f(x)$ существует первообразная.

Некоторые свойства неопределённого интеграла.

1. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$, постоянный множитель можно выносить за знак интеграла.

2. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$, производная неопределённого интеграла равна подынтегральной функции.

То есть правильность интегрирования проверяется дифференцированием. Равенство $\int (3x^2+4)dx = x^3+4x+C$ верно, так как $(x^3+4x+C)' = 3x^2+4$.

3. $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$, интеграл от алгебраической суммы конечного числа непрерывных функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций.

4.2. *Таблица основных неопределенных интегралов. Основные методы интегрирования*

Таблица основных неопределенных интегралов

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq 1,$$

$$\int dx = x + C,$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C,$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,$$

$$\int e^x dx = e^x + C,$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C,$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C,\ a \neq 0,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{|a|} + C,\ a \neq 0,$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 + a}\right| + C.$$

Примеры.

1. $$\int x^5 dx = \frac{x^{5+1}}{5+1} + C = \frac{x^6}{6} + C;$$

2. $$\int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + C = \frac{2}{3} x\sqrt{x} + C.$$

Основные методы интегрирования:

1. ***Непосредственным интегрированием*** называется такой метод вычисления интегралов, при котором они сводятся к табличным путём применения к ним основных

свойств неопределённого интеграла. При этом подынтегральную функцию обычно соответствующим образом преобразуют.

Пример. Найдите интеграл $\int\left(2x^4+3\sin x-5e^x\right)dx.$

Решение.

$$\int\left(2x^4+3\sin x-5e^x\right)dx=2\int x^4dx+3\int\sin xdx-5\int e^xdx=2\cdot\frac{x^5}{5}+C_1+3\cdot(-\cos x)+$$

$$+C_2-5\cdot e^x+C_3=\frac{2}{5}x^5-3\cos x-5e^x+C,$$

$$C=C_1+C_2+C_3.$$

2. Во многих случаях введение новой переменной интегрирования позволяет свести нахождение данного интеграла к нахождению табличного интеграла, т. е. перейти к непосредственному интегрированию. Такой метод называется ***методом замены переменной или методом подстановки***. Он основан на следующей теореме.

Теорема: Если $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$, а $x=\varphi(t)$ – функция, имеющая непрерывную производную, то функция $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ также имеет первообразную, причем

$$\int f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)dt=F\left[\varphi(t)\right]+C.$$

Отметим, что в случае «удачной» замены переменной $x=\varphi(t)$ заданный интеграл приводится к новому интегралу, который является табличным или сводится к табличному. Умение правильно подобрать замену переменной приобретается только практикой.

Пример. Вычислите интеграл $\int(2x+1)^{10}dx.$

Решение.

$$\int(2x+1)^{10}dx=\left|\begin{array}{c}2x+1=t\\ d\left(2x+1\right)=dt\\ 2dx=dt\\ dx=\dfrac{dt}{2}\end{array}\right|=\frac{1}{2}\int t^{10}dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{11}}{11}+C=\frac{\left(2x+1\right)^{11}}{22}+C.$$

3. ***Метод интегрирования по частям***:

$$\int udv=uv-\int vdu,$$

где u=$u(x)$ и v=$v(x)$ – функции, имеющие непрерывные производные.

Эта форму дает возможность свести вычисление интеграла $\int udv$ к вычислению интеграла $\int vdu,$ который может оказаться существенно более простым.

Перечислим группы интегралов, берущихся по частям:

а) К первой группе интегралов относятся интегралы, в которых подынтегральная функция в качестве множителя содержит одну из следующих функций:

$$\ln x,\ \arcsin x,\ \arccos x,\ \mathrm{arctg}\, x,\ \mathrm{arcctg}\, x.$$

и т.п. при условии, что оставшаяся часть подынтегральной функции представляет собой производную известной функции. В этом случае, полагают $u(x)$ равной одной из перечисленных функций.

Пример. Вычислите интеграл $\int \ln x dx$.

Решение.

$$\int \ln x dx = \begin{vmatrix} u = \ln x, & dv = dx \\ du = \dfrac{dx}{x}, & v = x \end{vmatrix} = x\ln x - \int x \cdot \frac{dx}{x} = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C.$$

б) К этой группе относятся интегралы вида

$$\int P_n(x)\cos axdx,\ \int P_n(x)\sin axdx,\ \int P_n(x)e^{ax}dx,$$

где a – постоянное число; $P_n(x)$ – многочлен степени n. Здесь считают $u(x)=P_n(x)$, а за dv берём остальные сомножители.

Пример. Вычислите интеграл $\int xe^x dx.$

Решение.

$$\int xe^x dx = \begin{vmatrix} u = x, & dv = e^x dx \\ du = dx, & v = e^x \end{vmatrix} = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$$

Пример. Вычислите интеграл $\int (2x+3)\sin xdx$.

Решение.

$$\int (2x+3)\sin xdx = \begin{vmatrix} u = 2x+3, & dv = \sin xdx \\ du = 2dx, & v = -\cos x \end{vmatrix} = (2x+3)\cdot(-\cos x) - \int(-\cos x)\cdot(2dx) =$$

$$= -(2x+3)\cdot\cos x + 2\int(\cos xdx) = -(2x+3)\cdot\cos x + 2\cdot\sin x + C.$$

Пример. Найдите $\int x\cos xdx$.

Решение.

$$\int x\cos xdx = \begin{vmatrix} u = x, & dv = \cos xdx \\ du = dx, & v = \sin x \end{vmatrix} = x\cdot\sin x - \int \sin xdx = x\cdot\sin x + \cos x + C.$$

4.3. Определённый интеграл.

К понятию определенного интеграла приводят задачи на нахождение предела интегральной суммы. Рассмотрим некоторые из них.

Задачи приводящие к понятию определенного интеграла

Задача о площади криволинейной трапеции

Пусть на отрезке $[a;b]$ оси Ox задана непрерывная функция $y = f(x)$, не меняющая на нем знака. Фигуру, ограниченную графиком этой функции, осью Ox и прямыми $x=a$ и $x=b$ называют *криволинейной трапецией*.

Пусть $f(x) \geq 0$ для всех $x \in [a;b]$. Найдем площадь S криволинейной трапеции, образованной графиком этой функции на отрезке $[a;b]$.

Разобьем отрезок $[a;b]$ на n частей точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ и восстановим в точках деления этого отрезка перпендикуляры до пересечения с графиком функции $y = f(x)$ (рис. 1.24). Тем самым мы разложим рассматриваемую криволинейную трапецию на n частей.

На каждом из отрезков $[x_k; x_{x+1}]$ выберем произвольную точку ξ_k и заменим k-ю криволинейную трапецию разбиения прямоугольником с основанием $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ и высотой $f(\xi_k)$, $k = 0,1,2,...n-1$. Таким образом, мы заменим исходную криволинейную трапецию ступенчатой фигурой, составленной из n прямоугольников. Площадь k-го прямоугольника равна произведению основания на высоту, т. е. $f(\xi_k)\Delta x_k$.

Просуммировав площади всех прямоугольников, получим площадь всей ступенчатой фигуры:

$$S_n = f(\xi_0)\Delta x_0 + f(\xi_1)\Delta x_1 + ... + f(\xi_{n-1})\Delta x_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Эта величина может быть принята за приближенное значение площади рассматриваемой криволинейной трапеции: $S \approx S_n$.

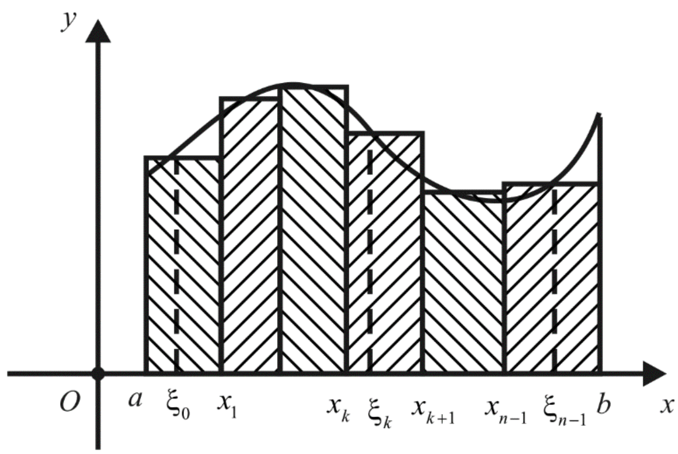


Рис. 1.24

Приближение к искомой площади S криволинейной трапеции будет тем точнее, чем более мелкое разбиение отрезка $[a;b]$ на части мы будем брать. Поэтому за точное значение площади S криволинейной трапеции принимается предел, к которому стремится площадь ступенчатой фигуры S_n, когда n неограниченно возрастает так, что $\lambda = \max \Delta x_k \to 0$:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{\lambda\to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Задача о вычислении длины пути по заданной скорости

Пусть точка M движется прямолинейно с переменной скоростью $V = f(t)$, где $f(t)$ – заданная функция времени t. Вычислим длину пути, пройденного точкой M за промежуток времени от t_0 до T. Промежуток $\left[t_0;T\right]$ разобьем на n промежутков $\left[t_0;t_1\right]$, $\left[t_1;t_2\right],\ldots,\left[t_{n-1};T\right]$ длиной $\Delta t_k = t_{k+1}-t_k \ (k=0,1,2,...,n-1)$.

В течение малого промежутка времени Δt_k скорость движения можно приближенно считать постоянной и равной $f(t_k')$, где t_k' – некоторое значение из промежутка $\left[t_k;t_{k+1}\right]$. Длина пути, пройденного за этот промежуток времени, приближенно равна $f(t_k')\Delta t_k$. Складывая все длины $f(t_k')\Delta t_k$, получаем приближенное значение длины пути, пройденного точкой M за промежуток времени от t_0 до T:

$$S_n = f(t_0')\Delta t_0 + f(t_1')\Delta t_1 + \ldots + f(t_{n-1}')\Delta t_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k')\Delta t_k.$$

Переходя к пределу при $\lambda = \max \Delta t_k \to 0$, находим точное значение длины пути:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=0}^{n-1} f(t_k')\Delta t_k.$$

Сравнивая результаты этих двух задач, нетрудно заметить общий метод их решения: разбиение отрезка, на котором задана функция, на части; составление суммы S_n, которая принимается в качестве приближенного значения искомой величины; предельный переход. Этот метод применяется и для решения многих других задач (например, вычисление объемов, вычисления работы переменной силы). Поэтому пределы такого рода стали предметом особого исследования.

Пусть функция $y=f(x)$ определена и ограничена на отрезке $\left[a;b\right]$. Разобьем отрезок $\left[a;b\right]$ произвольным образом на n частей точками:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b.$$

Пусть $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ – длина частичного отрезка $\left[x_k;x_{x+1}\right]$ $k=0,1,2,...n-1$. На каждом таком отрезке произвольным образом выберем точку ξ_k и составим сумму

$$S_n = f(\xi_0)\Delta x_0 + f(\xi_1)\Delta x_1 + \ldots + f(\xi_{n-1})\Delta x_{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k,$$

которая называется *интегральной суммой Римана* (немецкий математик, 1826–1866) функции $y=f(x)$, соответствующей разбиению отрезка $\left[a;b\right]$ с фиксированными точками ξ_k.

Пусть λ – длина наибольшего частичного отрезка разбиения, т. е. $\lambda = \max \Delta x_k$ $k=0,1,2,...n-1$. Данная величина называется *диаметром разбиения*.

Если существует конечный предел интегральной суммы S_n при $\lambda\to 0$, не зависящий от способа разбиения отрезка $\left[a;b\right]$ на частичные отрезки и выбора точек ξ_k, то этот предел называется ***определенным интегралом*** от функции $y=f(x)$ на отрезке $\left[a;b\right]$ и обозначается

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k,$$

а сама функция $y = f(x)$ называется ***интегрируемой по Риману*** на отрезке $[a;b]$.

Таким образом, определенный интеграл есть число, к которому стремится интегральная сумма, когда $\lambda \to 0$.

Символ $\int_a^b f(x)dx$ читается так: «определенный интеграл от a до b эф от икс дэ икс». Число a называется *нижним пределом интегрирования*, число b – *верхним пределом интегрирования*, функция $f(x)$ – *подынтегральной функцией*, выражение $f(x)dx$ – *подынтегральным выражением*, x – *переменной интегрирования*.

Обозначение определенного интеграла похоже на обозначение неопределенного. И это не случайно. Оказывается, что вычисление определенного интеграла сводится к вычислению неопределенного интеграла.

Отличие в том, что определенный интеграл от $f(x)$ на $[a;b]$ есть число, а неопределенный интеграл – множество первообразных $F(x)+C$.

Возвращаясь к задаче о площади криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a$ и $x = b$, можно сказать, что

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

Таким образом, определенный интеграл от неотрицательной функции численно равен площади соответствующей криволинейной трапеции. В этом и состоит ***геометрический смысл определенного интеграла.***

Если тело движется прямолинейно с переменной скоростью $V = f(t)$, то путь s, пройденный телом за время движения от $t=t_0$ до $t=T$, можно определить по формуле

$$S = \int_{t_0}^{T} f(t)dt.$$

В этом состоит ***физический смысл определенного интеграла***.

4.4. Условия интегрируемости функций. Свойства определенного интеграла

Рассмотрим теоремы, в которых отражены необходимые и достаточные условия интегрируемости функций. Рассмотрим их без доказательства.

Теорема (*необходимое условие интегрируемости функции*). Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$, то она ограничена на данном отрезке.

Обратная теорема неверна: существуют ограниченные функции, не являющиеся интегрируемыми.

Пример: Функция Дирихле

$$f(x)=\begin{cases}1, & \textit{если} \quad x \quad \textit{рационально},\\ 0, & \textit{если} \quad x \quad \textit{иррационально}\end{cases}$$

не интегрируема на отрезке $[0;1]$.

Решение. Действительно, если при разбиении отрезка $[0;1]$ на частичные отрезки выбрать на каждом из них рациональную точку ξ_k, получим

$$S_n=\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x_k=\sum_{k=0}^{n-1} 1\cdot\Delta x_k=\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)=x_n-x_0=1-0=1.$$

Если же выбрать иррациональную точку ξ_k, то $S_n=0$. Следовательно, предела интегральных сумм для функции Дирихле не существует и она не интегрируема на отрезке $[0;1]$, хотя является на нем ограниченной.

Далее сформулируем три теоремы, которые выражают ***достаточные условия интегрируемости функций*** на отрезке.

Теорема. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$, то она интегрируема на этом отрезке.

Теорема: Если функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a;b]$ и непрерывна на нем всюду, кроме конечного числа точек разрыва, то она интегрируема на этом отрезке.

Теорема: Если функция $f(x)$ монотонна на отрезке $[a;b]$, то она интегрируема на этом отрезке.

Заметим, что дифференцирование элементарных функций приводит к элементарным функциям, в то время как для интегрирования это не всегда имеет место. Существуют функции, первообразные которых не выражаются через элементарные функции (например, e^{-x^2}, $\sin x^2$, $\cos x^2$, $\frac{\sin x}{x}$, $\frac{\cos x}{x}$, $\frac{e^x}{x}$, $\frac{1}{\ln x}$ и др.). Интегралы от таких функций называются «неберущимися».

Свойства определенного интеграла

1. $\int_a^b dx=b-a.$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла:

$$\int_a^b kf(x)dx=k\cdot\int_a^b f(x)dx.$$

3. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a;b]$, то их сумма $f(x)+g(x)$ также интегрируема на $[a;b]$ и

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx,$$

т. е. интеграл от суммы равен сумме интегралов.

4. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$, то она интегрируема на любом отрезке $[\alpha;\beta]\subset[a;b]$.

5. Если функция $f(x)$ интегрируема на наибольшем из отрезков $[a;b]$, $[a;c]$, $[c;b]$, то она интегрируема на двух других отрезках, причем

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx.$$

При $a<c<b$ данное равенство имеет простой *геометрический смысл*: площадь криволинейной трапеции с основанием $[a;b]$ равна сумме площадей криволинейных трапеций с основаниями $[a;c]$ и $[c;b]$.

6. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$ $(a<b)$ и $f(x)\geq 0$ для всех $x\in[a;b]$, то $\int_a^b f(x)dx\geq 0$.

7. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на отрезке $[a;b]$ $(a<b)$ и $f(x)\leq g(x)$ для всех $x\in[a;b]$, то $\int_a^b f(x)dx\leq\int_a^b g(x)dx$.

8. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$ $(a<b)$, то функция $|f(x)|$ также интегрируема на отрезке $[a;b]$, причем

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\leq\int_a^b |f(x)|dx.$$

9. Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$ $(a<b)$ и для всех $x\in[a;b]$ выполняются неравенства $m\leq f(x)\leq M$, то

$$m(b-a)\leq\int_a^b f(x)dx\leq M(b-a).$$

10. **Теорема о среднем.** Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$ и для всех $x\in[a;b]$ выполняются неравенства $m\leq f(x)\leq M$, то

$$\int_a^b f(x)dx=\mu(b-a),$$

где $m\leq\mu\leq M$.

Величину μ называют *средним значением* функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$.

Замечание: *Если функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a;b]$, *то теорема о среднем принимает вид*

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a),$$

где $c \in [a;b]$.

4.5. Интеграл с переменным верхним пределом интегрирования. Формула Ньютона – Лейбница

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, интегрируемую на отрезке $[a;b]$. Если $x \in [a;b]$, то данная функция интегрируема также на отрезке $[a;x]$, т. е. существует $\int_a^x f(t)dt$. Предположим, что x меняется на отрезке $[a;b]$. Тогда на этом отрезке определена функция

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

которая задается **определенным интегралом с переменным верхним пределом интегрирования**.

Очевидно, что $F(a) = 0$, $F(b) = \int_a^b f(t)dt$.

Теорема: Если функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a;b]$, то функция $F(x)$ непрерывна на этом отрезке.

Теорема: Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;b]$. Тогда функция $F(x)$ дифференцируема в любой точке $x \in [a;b]$ и $F'(x) = f(x)$.

Таким образом установлено, что любая непрерывная на отрезке $[a;b]$ функция $f(x)$ имеет первообразную (а следовательно, и бесконечное множество первообразных), одной из которых является интеграл с переменным верхним пределом $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. А так как всякая другая первообразная для функции $f(x)$ может отличаться от $F(x)$ только на постоянную, то тем самым установлена *связь между неопределенным и определенным интегралами*:

$$\int f(x)dx = \int_a^x f(t)dt + C.$$

Теорема: (Формула Ньютона – Лейбница). Определенный интеграл от непрерывной функции равен разности значений любой ее первообразной на верхнем и нижнем пределах интегрирования, т. е.

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ – *одна из первообразных функции* $f(x)$.

Формула $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ называется **формулой Ньютона – Лейбница**; ее можно переписать в виде

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b,$$

где $F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$ – **двойная подстановка от *a* до *b*.**

Вычисление определенных интегралов непосредственно по определению очень громоздко и затруднительно даже для простых функций. Гораздо более удобно вычислять определенный интеграл по формуле Ньютона – Лейбница.

Пример. Вычислить интеграл $\int_2^3 x^2 dx$.

Решение.

$$\int_2^3 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Bigg|_2^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{2^3}{3} = \frac{27}{3} - \frac{8}{3} = \frac{19}{3}.$$

В случае нахождения определённых интегралов с помощью теоремы Ньютона-Лейбница могут быть использованы все перечисленные выше приемы для нахождения неопределённых интегралов. Следует учесть, что при вычислении определённого интеграла методом подстановки возвращаться к старой переменной не требуется; не следует забывать менять пределы интегрирования при замене переменной.

Пример. Вычислить интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx$.

Решение.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx = \left| \begin{array}{ll} t = 2x, & dt = 2dx \Rightarrow dx = \dfrac{dt}{2} \\ \alpha = 2 \cdot 0 = 0, & \beta = 2 \cdot \dfrac{\pi}{2} = \pi \end{array} \right| = \int_0^{\pi} \sin t \frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \sin t dt =$$

$$= \frac{1}{2}(-\cos t)\Big|_0^{\pi} = \left(-\frac{1}{2}\cos t\right)\Bigg|_0^{\pi} = \left(-\frac{1}{2}\cos \pi\right) - \left(-\frac{1}{2}\cos 0\right) = \left(-\frac{1}{2}\cdot(-1)\right) - \left(-\frac{1}{2}\cdot 1\right) = 1.$$

Пример. Вычислить интеграл $\int_{-1}^{2} \frac{2xdx}{\left(2x^2+1\right)^2}$.

Решение.

$$\int_{-1}^{2}\frac{2xdx}{\left(2x^2+1\right)^2}=\left|\begin{array}{ll} 2x^2+1=t, & d(2x^2+1)=dt, \\ 4xdx=dt, & 2xdx=\frac{1}{2}dt, \\ \alpha=2\cdot(-1)^2+1=3, & \\ \beta=2\cdot 2^2+1=9 & \end{array}\right|=\frac{1}{2}\int_{3}^{9}\frac{dt}{t^2}=\frac{1}{2}\int_{3}^{9}t^{-2}dt=-\frac{1}{2}t^{-1}\Big|_3^9=$$

$$=-\frac{1}{2t}\Big|_3^9=\left(-\frac{1}{2\cdot 9}\right)-\left(-\frac{1}{2\cdot 3}\right)=-\frac{1}{18}+\frac{1}{6}=\frac{1}{9}.$$

Теорема (*формула интегрирования по частям для определенного интеграла*) Если функции u и v имеют непрерывные производные на отрезке $[a;b]$, то справедлива формула:

$$\int_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int_a^b vdu.$$

Пример. Вычислить интеграл $\int_1^e x\ln xdx.$

Решение.

$$\int_1^e x\ln xdx=\left|\begin{array}{ll} u=\ln x, & dv=xdx, \\ du=\frac{dx}{x}, & v=\frac{x^2}{2} \end{array}\right|=\frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e-\int_1^e\frac{x^2}{2}\cdot\frac{dx}{x}=\frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e-\frac{1}{2}\int_1^e xdx=$$

$$=\frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e-\frac{x^2}{4}\Big|_1^e=\left(\frac{e^2}{2}\ln e-\frac{1^2}{2}\ln 1\right)-\left(\frac{e^2}{4}-\frac{1^2}{4}\right)=\frac{e^2}{2}-\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1+e^2}{4}.$$

Пример. Вычислить интеграл $\int_0^\pi x\sin xdx$.

Решение.

$$\int_0^\pi x\sin xdx=\left|\begin{array}{ll} u=x, & dv=\sin xdx, \\ du=dx, & v=-\cos x \end{array}\right|=-x\cos x\Big|_0^\pi+\int_0^\pi\cos xdx=-x\cos x\Big|_0^\pi+\sin x\Big|_0^\pi=$$

$$=(-\pi\cdot\cos\pi+0\cdot\cos 0)+(\sin\pi-\sin 0)=-\pi\cdot(-1)=\pi.$$

Пример. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной графиками функций $y=x$ и $y=x^2$.

Решение. Изобразим графики обеих функций на плоскости

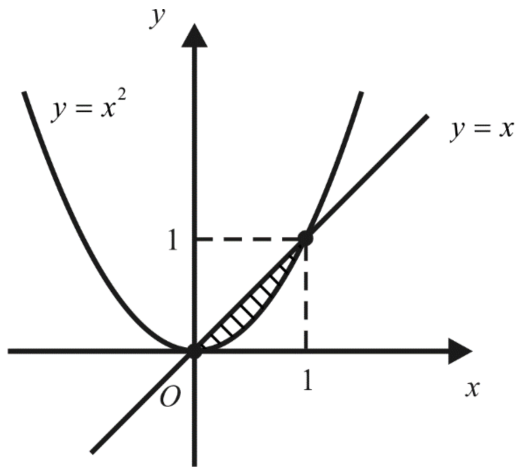


Рис. 1.25. – Площадь плоской фигуры, ограниченной графиками функций $y = x$ и $y = x^2$.

Убеждаемся, что речь идет о криволинейной фигуре, ограниченной сверху графиком функции $y = x$ снизу – графиком функции $y = x^2$. Точки пересечения графиков $(0;0)$ и $(1;1)$ легко находятся из уравнения $x = x^2$. Таким образом, $f_2(x) = x$, $f_1(x) = x^2$, a=0, b=1 и

$$S = \int_0^1 (x - x^2)dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \left(\frac{1^2}{2} - \frac{1^3}{3}\right) - \left(\frac{0^2}{2} - \frac{0^3}{3}\right) = \frac{1}{6}.$$

4.6. Применение интегрального исчисления в социально-экономической сфере

Применение определенного интеграла в социально-экономической сфере основано на том, что любой меняющийся социально-экономический процесс может быть интерпретирован как скачкообразный, скачки которого близки к нулю.

Количество произведенной продукции.

Объем произведенной продукции Q зависит от производительности труда и длительности промежутка рабочего времени, в течение которого производительность может меняться. Пусть $f(t)$ – функция изменения производительности труда от времени. Количество продукции Q, произведенной в промежутке времени от a до b при производительности труда $f(t)$, вычисляется по формуле:

$$Q = \int_a^b f(t)dt.$$

Если затраты труда считать линейно зависимыми от времени, а затраты капитала – неизменными, то функция Кобба-Дугласа примет вид $f(t) = (\alpha t + \beta)e^{\gamma t}$. Тогда объем произведенной продукции Q за T лет составит:

$$Q = \int_0^T (\alpha t + \beta)e^{\gamma t}dt$$

.

Пример. Найдите дневную выработку Q за рабочий день продолжительностью 8 ч., если производительность труда в течение дня меняется по эмпирической формуле $f(t) = -0{,}1t^2 + 0{,}8t + 10.$

Решение. Воспользуемся формулой $Q = \int_a^b f(t)dt.$ В нашем случае имеем

$$Q = \int_0^8 f(t)dt = \int_0^8 \left(-0{,}1t^2 + 0{,}8t + 10\right)dt = \left(-0{,}1\cdot\frac{t^3}{3} + 0{,}8\cdot\frac{t^2}{2} + 10t\right)\Bigg|_0^8 = 88{,}53.$$

Количество денег, поступивших в банк за определенный промежуток времени

Пусть функция $f(t)$ описывает количество денег, поступающих в банк в каждый момент времени t. Определим общее количество денег, поступивших в банк за промежуток времени $[0;\ T]$. Если $f(t) = const$, то количество денег U, поступившее в банк за промежуток времени $[0;\ T]$, находится по формуле $U = f(c)\cdot T$, где c – произвольное значение из отрезка $[0;\ T]$.

Если $f(t)$ – количество денег, поступивших в банк в момент времени t, то общее количество денег, поступивших в банк за промежуток времени $[0;\ T]$ находится по формуле

$$U = \int_0^T f(t)dt.$$

Дисконтирование

Определение начальной суммы по ее конечной величине, полученной через некоторое количество времени t при определенной процентной ставке p, называется ***дисконтированием***. Такие задачи решаются при определении экономической эффективности капиталовложений.

Пусть доход изменяется со временем и описывается функцией $f(t)$, удельная норма процента равна $i = \frac{p}{100}$ и процент начисляется непрерывно. Тогда дисконтированный доход K за время T вычисляется по формуле

$$K = \int_0^T f(t)e^{it}dt.$$

Вычисление средних величин

В социально-экономической сфере часто требуется найти среднюю производительность труда за определённый промежуток времени, среднее значение затрат на производство труда за определённый промежуток времени и т.д. Такого рода задачи решаются с помощью теоремы о среднем: Для непрерывной на отрезке $[a;b]$

функции $f(x)$ существует такая точка $c\in[a;b]$, что $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$. Тогда среднее значение $f(c)$ функции $f(x)$ на отрезке $[a;b]$ равно

$$f(c)=\frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)dx$$
.

Пример. Найдите среднее значение затрат в денежных единицах на производство и реализацию продукции, имеющих вид $S(x)=3x^2+4x+2$, где x – объём продукции в усл.ед., если объём продукции меняется от 2 до 4 усл. ед.

Решение. В этом примере a=2, b =4, $f(x)$ = $S(x)$. Тогда среднее значение функции равно

$$S_{cp}=\frac{1}{4-2}\int_2^4(3x^2+4x+2)dx=\frac{1}{2}\left(x^3+2x^2+2x\right)\Big|_2^4=\frac{1}{2}(104-20)=42.$$

Таким образом, средние издержки составляют 42 усл. ед.

4.7. Исторические сведения

Возникновение задач интегрального исчисления связано с нахождением площадей и объемов. Ряд задач такого рода был решен математиками Древней Греции. Античная математика предвосхитила идеи интегрального исчисления в значительно большей степени, чем дифференциального исчисления. Большую роль при решении таких задач играл метод исчерпывания, созданный Евдоксом Книдским (ок. 408 г. до н. э. – ок. 355 г. до н. э.) и широко применявшийся Архимедом (287–212 гг. до н. э.). Архимед сумел найти площадь витка спирали, объемы эллипсоида и сегментов гиперболоида и параболоида вращения и т. д. Однако он не выделил общего содержания интеграционных приемов и понятия об интеграле, а тем более не создал метода вычисления интегралов.

Ученые Среднего и Ближнего Востока в IX–XV вв. изучали и переводили труды Архимеда на общедоступный в их среде арабский язык, но существенно новых результатов они не получили. Деятельность европейских ученых в это время была еще более скромной. Лишь в XVI и XVII вв. развитие естественных наук поставило перед математиками Европы ряд новых задач, в частности задачи на нахождение квадратур, кубатур (т. е. площадей фигур и объемов тел) и определение центров тяжести. Труды Архимеда, впервые изданные в 1544 г. (на латинском и греческом языках), стали привлекать широкое внимание, и их изучение явилось одним из важнейших отправных пунктов дальнейшего развития интегрального исчисления. Античный метод «неделимых» был возрожден И. Кеплером. В более общей форме идеи этого метода были развиты Б. Кавальери, Эванджелистой Торричелли (1608–1647), Дж. Валлисом, Б. Паскалем. Методом «неделимых» был решен ряд геометрических и механических задач. К этому же времени относятся опубликованные позднее работы П. Ферма по квадрированию парабол n-й степени, а затем – работы Христиана Гюйгенса (1629–1695) по спрямлению кривых.

В итоге этих исследований выявилась общность приемов интегрирования при решении внешне несходных задач геометрии и механики, приводившихся к квадратурам как к геометрическому эквиваленту определенного интеграла. Заключительным звеном в цепи открытий этого периода было установление взаимно обратной связи между задачами на проведение касательной и на квадратуры, т. е. между дифференцированием и интегрированием. Основные понятия и алгоритм интегрального исчисления были созданы независимо друг от друга И. Ньютоном и Г. Лейбницем. Последнему принадлежат термин «интегральное исчисление» и обозначение интеграла $\int ydx$. *В работах Ньютона* *основную роль играло понятие неопределенного интеграла (флюенты), тогда как Лейбниц исходил из понятия определенного интеграла.*

Дальнейшее развитие интегрального исчисления в XVIII в. связано с именами И. Бернулли и Л. Эйлера. В начале XIX в. интегральное исчисление вместе с дифференциальным исчислением было перестроено О. Коши на основе теории пределов. В развитии интегрального исчисления в XIX в. приняли участие русские математики Михаил Васильевич Остроградский (1801–1861/62), Виктор Яковлевич Буняковский (1804–1889), Пафнутий Львович Чебышев (1821–1894). В конце XIX – начале XX в. развитие теории множеств и теории функций действительного переменного привело к углублению и обобщению основных понятий интегрального исчисления (Бернхард Риман (1826–1866), Анри Лебег (1875–1941) и др.).

4.8. Примеры решения задач

1. Вычислить следующие неопределенные интегралы:

а) $\int (x^2+5x^6+4x-8)dx$; б). $\int \frac{2x\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx$;

в). $\int \frac{2+x^4}{x}dx$; г) $\int \frac{dx}{25+4x^2}$; д) $\int \frac{x^2}{x^2+1}dx$.

Решение.

а) $$\int (x^2+5x^6+4x-8)dx = \int x^2dx + 5\int x^6dx + 4\int xdx - 8\int dx =$$
$$= \frac{x^3}{3} + 5\cdot\frac{x^7}{7} + 4\cdot\frac{x^2}{2} - 8x + C;$$

б) $$\int \frac{2x\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx = 2\int x\cdot x^{\frac{1}{2}}\cdot x^{-\frac{1}{3}}dx = 2\int x^{\frac{7}{6}}dx = 2\cdot\frac{6x^{\frac{13}{6}}}{13} + C = \frac{12}{13}\cdot\sqrt[6]{x^{13}} + C;$$

в) $$\int \frac{2+x^4}{x}dx = \int \frac{2}{x}dx + \int \frac{x^4}{x}dx = \int \frac{2}{x}dx + \int x^3dx = 2\ln|x| + \frac{x^4}{4} + C;$$

г) $$\int \frac{dx}{25+4x^2} = \int \frac{dx}{4\cdot\left(\frac{25}{4}+x^2\right)} = \frac{1}{4}\int \frac{dx}{\left(\left(\frac{5}{2}\right)^2+x^2\right)} = \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{5}arctg\frac{2x}{5} + C =$$
$$= \frac{1}{10}arctg\frac{2x}{5} + C;$$

д) $$\int \frac{x^2}{x^2+1}dx = \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx = \int \left(\frac{x^2+1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1}\right)dx = \int \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right)dx =$$
$$= \int dx - \int \left(\frac{1}{x^2+1}\right)dx = x - arctgx + C.$$

2. Вычислить следующие неопределенные интегралы, сделав соответствующие замены:

а) $\int \sin(3x+2)dx$; б) $\int tgx dx$; в) $\int e^{\frac{x}{4}}dx$.

Решение.

$$\text{а) } \int \sin(3x+2)dx = \left| \begin{array}{c} t = 3x+2, \\ dt = (3x+2)'dx = 3dx, \\ dx = \frac{1}{3}dt \end{array} \right| = \int \sin t \cdot \frac{1}{3}dt = \frac{1}{3}\int \sin t dt =$$

$$= -\frac{1}{3}\cos t + C = -\frac{1}{3}\cos(3x+2) + C;$$

$$\text{б) } \int tgx dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = \left| \begin{array}{l} \quad t = \cos x \\ dt = (\cos x)'dx = \\ = -\sin x dx \end{array} \right| = -\int \frac{dt}{t} = -\ln|t| + C = -\ln|\cos x| + C;$$

$$\text{в) } \int e^{\frac{x}{4}}dx = \left| \begin{array}{c} t = \frac{x}{4}, \\ x = 4t, \\ dx = 4dt, \end{array} \right| = 4\int e^t dt = 4e^t + C = 4e^{\frac{x}{4}} + C.$$

3. Вычислить интеграл $I(x) = \int e^x \sin 5x dx$.

Решение.

$$I(x) = \int e^x \sin 5x dx = \left| \begin{array}{ll} u = e^x, & dv = \sin 5x dx, \\ du = e^x dx, & v = -\frac{\cos 5x}{5} \end{array} \right| = e^x \cdot \left(-\frac{\cos 5x}{5}\right) - \int \left(-\frac{\cos 5x}{5}\right) e^x dx =$$

$$= -\frac{1}{5}e^x \cdot \cos 5x + \frac{1}{5}\int e^x \cos 5x dx = \left| \begin{array}{ll} u = e^x, & dv = \cos 5x dx \\ du = e^x dx, & v = \frac{\sin 5x}{5} \end{array} \right| =$$

$$= -\frac{1}{5}e^x \cdot \cos 5x + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}e^x \sin 5x - \frac{1}{5}\underbrace{\int e^x \sin 5x dx}_{I(x)}\right).$$

Таким образом, получим

$$I(x) = -\frac{1}{5}e^x \cdot \cos 5x + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}e^x \sin 5x - \frac{1}{5}I(x)\right), \; I(x) = -\frac{1}{5}e^x \cdot \cos 5x + \frac{1}{25}e^x \sin 5x - \frac{1}{25}I(x),$$

$$I(x) + \frac{1}{25}I(x) = -\frac{1}{5}e^x \cdot \cos 5x + \frac{1}{25}e^x \sin 5x,$$

$$\frac{26}{25}I(x) = -\frac{1}{5}e^x \cdot \cos 5x + \frac{1}{25}e^x \sin 5x,$$

$$I(x) = -\frac{5}{26}e^x \cdot \cos 5x + \frac{1}{26}e^x \sin 5x.$$

4. Вычислить следующие определенные интегралы:

а) $\int_0^{\pi} \sin x dx$; б) $\int_1^8 \frac{x - \sqrt[3]{x}}{x} dx$.

Решение.

а) $\int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x\Big|_0^{\pi} = \cos x\Big|_{\pi}^{0} = \cos 0 - \cos \pi = 1 - (-1) = 2;$

б) $\int_1^8 \frac{x - \sqrt[3]{x}}{x} dx = \int_1^8 dx - \int_1^8 x^{-\frac{2}{3}} dx = x\Big|_1^8 - 3\sqrt[3]{x}\Big|_1^8 =$

$= (8-1) - (3\sqrt[3]{8} - 3\sqrt[3]{1}) = 7 - (6-3) = 4.$

5. Найдите объем произведенной за 6 лет продукции, если функция Кобба-Дугласа имеет вид $z(t) = (14+t)e^t$.

Решение. Объем произведенной продукции определим, вычислив определенный интеграл: $Q = \int_0^6 (14+t)e^t dt$. Для его вычисления воспользуемся методом интегрирования по частям. Тогда

$$Q = \int_0^6 (14+t)e^t dt = \begin{vmatrix} u = 14+t, & dv = e^t dt, \\ du = (14+t)' dt = dt, & v = \int e^t dt = e^t \end{vmatrix} =$$

$$= (14+t)e^t\Big|_0^6 - \int_0^6 e^t dt = ((14+t)e^t - e^t)\Big|_0^6 = ((13+t)e^t)\Big|_0^6 = 19e^6 - 13e^0 \approx 7652.$$

Таким образом, объем произведенной за 6 лет продукции составит 7652 усл. ед.

6. Определите дисконтированный доход за 5 лет при процентной ставке 6%, если базовые капиталовложения составили 10 млн. ден. ед. и ожидается ежегодное увеличение капиталовложений на 1 млн. ден. ед.

Решение. Для определения дисконтированного дохода воспользуемся формулой $K = \int_0^T f(t)e^{-it} dt$. Надо найти функцию капиталовложений $f(t)$, которая, согласно условию задачи, является линейной. Получим: $f(t) = k + l \cdot t$, где k=10, l=1. Тогда $f(t) = 10 + t$. Удельная норма процента равна: $i = \frac{p}{100} = \frac{6}{100} = 0{,}06$. Таким образом, дисконтированный доход

$$K=\int_0^5 (10+t)e^{-0,06t}dt=\left|\begin{matrix} u=10+t, & dv=e^{-0,06t}dt, \\ du=dt, & v=\int e^{-0,06t}dt=\dfrac{e^{-0,06t}}{-0,06}=-\dfrac{100}{6}e^{-0,06t}\end{matrix}\right|=$$

$$=(10+t)\cdot\left(-\frac{100}{6}e^{-0,06t}\right)\Bigg|_0^5-\int_0^5\left(-\frac{100}{6}e^{-0,06t}\right)dt=\left(-\frac{100(10+t)}{6e^{0,06t}}-\frac{100^2}{36e^{0,06t}}\right)\Bigg|_0^5=$$

$$=\left(-\frac{100}{e^{0,06t}}\cdot\frac{(160+6t)}{36}\right)\Bigg|_0^5=\left(-\frac{100}{e^{0,06\cdot 5}}\cdot\frac{(160+6\cdot 5)}{36}\right)-\left(-\frac{100}{e^{0,06\cdot 0}}\cdot\frac{(160+6\cdot 0)}{36}\right)=$$

$$=\left(-\frac{100}{e^{0,3}}\cdot\frac{(190)}{36}\right)-\left(-\frac{100}{e^{0}}\cdot\frac{(160)}{36}\right)=\frac{100}{36}\cdot\left(160-\frac{190}{e^{0,3}}\right)\approx 53,457 \text{ ден. ед.}$$

4.9. Задачи для самостоятельного решения

1. Вычислите неопределённые интегралы:

а) $\int\frac{dx}{x\cdot\sqrt[3]{x}}$; б) $\int\cos 5x dx$; в) $\int\frac{dx}{5-2x}$; г) $\int\frac{dx}{9x^2+4}$;

д) $\int\left(3x^4+\frac{4}{x}-\frac{8}{x^5}+\sqrt{x}\right)dx$; е) $\int\sin 4x dx$.

2. Вычислите определённые интегралы:

а) $\int_2^3 x^2dx$; б) $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos^2 x}$; в) $\int_0^1\left(e^x-1\right)^4 e^x dx$; г) $\int_0^1 \arcsin x dx$.

3. Дневная производительность труда (за 7 рабочих часов) рабочего машиностроительного завода описывается функцией $y=-0,09t^2+0,28t+10,06$, где t – время в часах, y – количество продукции. Какое количество продукции производит рабочий за 1 год (260 рабочих дней)?

4. Найдите среднее значение издержек производства, описываемых функцией $K(x)$, если объем продукции x изменяется от a до b усл. ед. При каком значении объема выпускаемой продукции издержки принимают среднее значение:

a. $K(x)=3x^2+4x+1$, a=0, b=3;

b. $K(x)=4x^2+6x+1$, a=0, b=4;

c. $K(x)=8x^2+2x+5$, a=0, b=3;

d. $K(x)=3x^2+4x+2$, a=0, b=4;

e. $K(x)=6x^2+4x+1$, a=0, b=5.

5. Найдите объем произведенной продукции за 4 года, если функция Кобба-Дугласа имеет вид $z(t)=(1+t)e^{0,5t}$.

6. Определите дисконтированный доход за 3 года при процентной ставке 8%, если базовые капиталовложения составили 11 тыс. ден. ед. и ожидается ежегодное увеличение капиталовложений на 2 тыс. ден. ед.

7. Объем продукции u, произведенной бригадой за смену, задается следующим соотношением: $u=u(t)=6,5t^2+100t+60$, $1\le t\le 8$, где t – рабочее время в часах. Определите производительность труда в момент времени $t_0=4$. Найдите среднюю производительность труда в период от $t_1=1$ до $t_2=8$.

4.10. Вопросы для самопроверки

1. Дайте определение первообразной. Что такое неопределённый интеграл? Геометрический смысл неопределенного интеграла.
2. Свойства неопределенного интеграла.
3. Запишите известные вам свойства неопределённого интеграла.
4. Запишите таблицу основных неопределённых интегралов.
5. В чём состоит непосредственное интегрирование?
6. В чём состоит метод замены переменной в неопределенном интеграле?
7. Выпишите формулу интегрирования по частям. Перечислите группы интегралов, берущихся по частям.
8. Что такое определённый интеграл? Запишите формулу Ньютона-Лейбница.
9. В чём состоит геометрический смысл определённого интеграла?
10. Запишите основные свойства определённого интеграла.
11. Запишите теорему о среднем. Как найти среднее значение функции с помощью определённого интеграла?
12. Что такое дисконтирование? По какой формуле можно вычислить дисконтированный доход K за время T?

ЛИТЕРАТУРА

1 Ахтямов, А.М. Математика для социологов и экономистов: учеб.пособие / А.М. Ахтямов. – М.: Физматлит, 2004. – 464 с.

2 Велько, О.А. Основы высшей математики для социологов: Учебно-методическое пособие / О.А. Велько, М.В. Мартон, Н.А. Моисеева. – Минск: БГУ, 2020. – 303 с.

3 Велько, О.А. Основы высшей математики и теории вероятностей: Учебно-методическое пособие / О.А. Велько, М.В. Мартон, Н.А. Моисеева. – Минск: БГУ, 2022. – 399 с.

4 Велько, О. А. Основы высшей математики и теории вероятностей: учебная программа УВО по учебной дисциплине по специальности 1-23 01 15 Социальные коммуникации [Электронный ресурс] / О.А. Велько // Белорусский государственный университет. – Минск, 2021. – Режим доступа: https://elib.bsu.by/handle/123456789/269619. – Дата доступа: 2.07.2021.

5 Велько, О.А. Основы высшей математики. Учебная программа УВО для специальности 1-23 01 05 Социология [Электронный ресурс] / О.А. Велько, Н.А. Моисеева // Белорусский государственный университет. – Минск, 2019. – Режим доступа:http://elib.bsu.by/handle/123456789/233274. – Дата доступа: 12.07.2019.

6 Велько, О. А. Основы высшей математики : электронный учебно-методический комплекс для специальности 1-23 01 05 «Социология» / О. А. Велько, Н. А. Моисеева; БГУ, Механико-математический фак., Каф. общей математики и информатики. – Минск: БГУ, 2020. – 257 с.: ил. – Библиогр.: с. 255–257. [Электронный ресурс]. – 2020. – Режим доступа: http://elib.bsu.by/handle/123456789/241078. Дата доступа: 06.03.2020.

7 Еровенко, В. А. Основы высшей математики: типовая учебная программа для высших учебных заведений по специальности 1-23 01 05 «Социология» / В. А. Еровенко, М.В. Мартон, О.А. Велько // Типовая учебная программа располагается в коллекциях: Кафедра общей математики и информатики. [Электронный ресурс]. – 2019. – Режим доступа: –http://elib.bsu.by/handle/123456789/218164.

8 Еровенко, В.А. Избранные главы курса «Основы высшей математики» для философов: Методическое пособие для студентов-заочников / В.А. Еровенко, М.В. Мартон. – Минск: БГУ, 2009. – 68 с.

9 Еровенко, В.А. Основы высшей математики: типовая учебная программа для высших учебных заведений по специальности 1-23 01 05 «Социология» / В.А. Еровенко, С.Н. Сиренко, О.А. Велько // Основы высшей математики. Основы информационных технологий: типовые учебные программы для высших учебных заведений по специальности 1-23 01 05 «Социология» / В.А. Еровенко [и др.]; под ред. В.А. Еровенко. – Минск: БГУ, 2009. – С. 5–14.

10 Еровенко, В.А. Основы высшей математики для филологов: методические замечания и примеры: курс лекций / В.А. Еровенко. – Минск: БГУ, 2006. – 175 с.

11 Карасев А.И., Аксютина З.М., Савельева Т.И. Курс высшей математики для экономических вузов. Ч2. – М.: Высшая школа, 1982.

12 Лавров, И.А. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов / И.А. Лавров, Л.Л. Максимова. – М.: Физматлит, 2001. – 256 с.

13 Леонов, Н.Н. Математическая социология: структурно-аппроксимационный подход / Н.Н. Леонов. – Минск, «ООО ФУАинформ», 2002. – 220 с.

14 Лунгу, К.Н. Сборник задач по высшей математике. 1 курс. / К.Н. Лунгу и [и др.]. – 3-е изд., испр. и доп. – М.: Айрис-пресс, 2004. – 576с.

15 Малыхин В.И. Математика в экономике. – М.: Инфра-М, 2001.

16 Мацкевич, И.П. Математические методы в психологии / И.П. Мацкевич, О.А. Велько, Е.В. Воронкова, С.Л. Гуринович. – 3-е изд. – Минск: МИУ, 2009. – 188 с.

17 Моисеева, Н. А. Основы высшей математики : электронный учебно-методический комплекс для специальности 1-23 01 15 «Социальные коммуникации» / Н. А. Моисеева, О. А. Велько; БГУ, Механико-математический фак., Каф. общей математики и информатики. – Минск: БГУ, 2020. – 193 с.: ил. – Библиогр.: с. 191–193. [Электронный ресурс]. – 2020. – Режим доступа: http://elib.bsu.by/handle/123456789/241081. Дата доступа: 06.03.2020.

18 Моисеева, Н. А. Основы высшей математики и теории вероятностей : электронный учебно-методический комплекс для специальности: 1-23 01 15 «Социальные коммуникации» [Электронный ресурс] / Н. А. Моисеева, О. А. Велько ; БГУ, Механико-математический фак., Каф. общей математики и информатики. – Минск : БГУ, 2021. – 239 с. : ил., табл. – Библиогр.: с. 238–239. – Режим доступа: https://elib.bsu.by/handle/123456789/274772: 26.01.2022.

19 Путькина, Л. В. Информатика и математика для гуманитарных вузов : учеб.пособие / Л. В. Путькина, Т. Г. Пискунова, Т. Б. Антипова. – Санкт-Петербург : СПбГУП, 2014. – 236 с. : ил.

20 Суходольский, Г.В. Лекции по высшей математике для гуманитариев: учеб. пособие / Г.В. Суходольский. – Харьков: Изд-во Гуманитарный Центр, 2001. – 248 с.