ГРАДУИРОВАННАЯ ТОПОЛОГИЯ НА АЛГЕБРАХ НОВЫХ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

М. Д. Ёжикова

Белорусский государственный университет, г. Минск;
maya.yo1989banan@gmail.com;
науч. рук. – А.Б. Антоневич, д-р физ.-мат. наук, проф.

В работе изучается новая топологическая структура на векторном пространстве, названная градуированной топологией. Продемонстрированы отличия свойств пространств с такой структурой от топологических векторных пространств и приведены примеры конкретных задач, решение которых может быть получено с использованием градуированной топологии. Одной из мотивировок для введения такой структуры послужило исследование пространств новых обобщенных функций (мнемофункций), позволяющих придать смысл понятию решения для дифференциальных уравнений с сингулярными коэффициентами. В работе рассмотрено построение sharp и градуированной топологических структур на пространствах формальных рядов, бесконечно дифференцируемых функций, периодических распределений; построен аналог принципа сжимающих отображений для пространства рядов, названный градуированным; сформулирована задача о нахождении разложения обратного для возмущённого оператора, решить которую без использования градуированной топологии можно только в конечномерном случае - для возмущённой матрицы.

Ключевые слова: алгебра новых обобщённых функций; пространство периодических распределений; неархимедова метрика; sharp-топология; градуированная топология; асимптотическая сходимость; полином тейлора; пространство бесконечно малых; градуированный принцип сжимающих отображений; обобщённый оператор; возмущённая матрица; явление резонанса для матриц-функций.

ВВЕДЕНИЕ SHARP И ГРАДУИРОВАННОЙ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ СТРУКТУР В ПРОСТРАНСТВЕ ФОРМАЛЬНЫХ РЯДОВ

Рассматриваем пространство E^* формальных рядов по степеням ε с коэффициентами из заданного банахова пространства E. Элемент этого пространства имеет вид $x=\sum_{k=m}^{\infty} a_k\varepsilon^k$ подпространством E_m считаем множество рядов, начинающихся с номера m. Имеем последовательность вложенных подпространств: для каждого m $E_{m+1} \subset E_m$.

Sharp-топология [1] на этом пространстве определяется следующим образом. Определяем порядок элемента: $\nu(x)=\inf\{m : x \in E_m\}$. Затем вводим нормирование $\|x\| = e^{\nu(x)}$. Порождённая таким нормированием метрика удовлетворяет сильному неравенству треугольника: $\forall x,y,z \in E^{*} \rho(x,z) \le \max\{\rho(x,y),\rho(y,z)\}$, т.е. является неархимедовой. С помощью такой метрики задаётся sharp-топология.

Сходимость последовательности в данной топологии является очень сильным условием: последовательность элементов x_n сходится к элементу x, если для любого заданного N найдётся номер n, начиная с которого разность x_n - x лежит в подпространстве X_N.

Основная проблема, связанная с введённой структурой, возникает при исследовании элементов, близких с точки зрения фактор-пространств вида E_n/E_{n-1}. Если рассмотреть элемент $x=\sum_{k=m}^{\infty} a_k \varepsilon^k$ и построить последовательность $x^n=\sum_{k=m}^{\infty} a_k^n \varepsilon^k$, где $a_m^n \ne a_m$, то в sharp-топологии эта последовательность не сходится к x.

Однако на пространстве E задана своя норма, и при близком расстоянии коэффициентов a_m^n и a_m, т.е. $\left\|a_m^n - a_m\right\| \to 0$, есть смысл считать исходные элементы близкими, и таким образом по построенной последовательности найти коэффициент a_m. Далее аналогичным образом можно построить все последующие коэффициенты разложения.

Определение 1. Будем говорить, что на пространстве E^* задана градуированная топология [2], если:

1) в пространстве E^* задана последовательность вложенных подпространств E_m;
2) на каждом E_m задана локально выпуклая топология τ_m и выполнено свойство: если V – окрестность нуля в τ_m и $n>m$, то $E_n \subset V$.

Данную структуру на E^* можно задать с помощью полунорм вида $p_m(x)=\sup \varepsilon^{-m} \left\|a_m\right\|_E$ на каждом из подпродпространств E_m.

ДРУГИЕ ПРИМЕРЫ ПРОСТРАНСТВ С ОПИСАННЫМИ СТРУКТУРАМИ

Аналогичные структуры могут быть введены и в других пространствах, используемых в анализе. Рассмотрим пространство функций $L=C^{\infty}(\mathbb{R})$. Пусть подпространство L_n состоит из функций вида $g(x)=o((x-x_0)^n)$, где $x_0 \in \mathbb{R}$. Имеем: $L_{n+1} \subset L_n$ для каждого n.

Каждая из функций данного пространства может быть представлена в виде разложения Тейлора: $f(x)=\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{[k]}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + r_n(x)$. Рассмотрим 2 различных варианта формы остатка $r_n(x)$ – форму Пеано: $r_n(x) = o((x-x_0)^n)$ и форму Лагранжа: $r_n(x) = \dfrac{f^{[n+1]}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$.

Сходимость полиномов Тейлора $T_n(x, x_0, f) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{f^{[k]}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ к функции f в случае остатка в форме Пеано – асимптотическая, что эквивалентно: $T_n - f \in L_n$, т.е. сходимости в sharp-топологии на L. В случае формы Лагранжа имеем сходимость коэффициента при $(x\text{-}x_0)^{n+1}$ остатка $r_n(x)$, что эквивалентно сходимости в градуированной топологии.

ГРАДУИРОВАННЫЙ ПРИНЦИП СЖИМАЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Рассмотрим аналог принципа сжимающих отображений на пространстве формальных рядов E^*. Задача состоит в нахождении решения уравнения вида $u = Au + v$ или неподвижной точки отображения $F: E^* \to E^*$, $F(u) = Au + v$, где A – линейный непрерывный оператор на E^*. Будем считать, что A действует в пространстве E_0.

В случае sharp-топологии на E^* условие сжимаемости A эквивалентно тому, что соответствующая матрица является верхнетреугольной, и при этом все элементы главной диагонали нулевые. В случае градуированной топологии условие можно ослабить следующим образом: элементы главной диагонали не нулевые, но при этом для них выполнено $\|a_{ii}\|_E < 1$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots \\ \vdots & a_{11} & \vdots \\ 0 & \cdots & \ddots \end{pmatrix}, \|a_{ii}\|_E < 1.$$

В данном случае применим градуированный принцип сжимающих отображений, который заключается в следующем: при заданном начальном приближении $x_0^0 \in E_0$ условие $\|a_{00}\|_E < 1$ гарантирует сходимость первых коэффициентов последовательных приближений x_0^n, т.е. коэффициентов при ε^0, к соответствующему коэффициенту решения. Далее, аналогично выбирая приближение $x_1^0 \in E_1$, из условия $\|a_{11}\|_E < 1$ получаем сходимость коэффициентов при ε^1 и т.д.

НАХОЖДЕНИЕ ОБРАТНОЙ ДЛЯ ВОЗМУЩЁННОЙ МАТРИЦЫ

Пусть $D(\varepsilon)$ – матрица-функция, зависящая аналитически от малого параметра ε. При исследовании резольвент для конечномерных возмущений заданного оператора возникает необходимость нахождения условий для существования конечного предела и построения асимптотического разложения для обратных матриц семейства $D^{-1}(\varepsilon)$. Как можно заметить, основные методы решения задачи для конечномерного случая [3], используют такие понятия, как нормальная форма матрицы, определитель. Если сформулировать обобщение задачи на бесконечномерный случай, т.е. положить, что $D(\varepsilon)$ является возмущённым линейным оператором, данные методы применить не получится. В таком случае для нахождения разложения необходимо строить итерационный процесс, использующий топологию фактор-пространств, т.е. на всём пространстве задать градуированную топологию.

ЗАДАНИЕ ТОПОЛОГИЙ НА ПРОСТРАНСТВЕ МНЕМОФУНКЦИЙ

Рассмотрим введение описанных топологических структур на примере пространстве периодических распределений (мнемофункций на окружности), построенное в [4]. Подпространства G_N определим как множества $G_N(\mathrm{S}^1)/J(\mathrm{S}^1)$, где $G_N(\mathrm{S}^1)$ состоит из семейств, аппроксимирующих распределения гладкими функциями на окружности, скорость роста которых ограничена степенью ε^{-N}, $J(\mathrm{S}^1)$ – идеал, состоящий из семейств, убывающих быстрее любой степени ε. Имеем: $G_N \subset G_{N+1} \forall N$. Sharp-топология задаётся с помощью нормирования $\|u\| = e^{\nu(u)}$, где $\nu(u) = \max\{N : u \in G_N\}$ – порядок элемента. Градуированная топология задаётся с помощью полунорм вида $P_N(u) = \lim\limits_{\varepsilon_1 \to 0} \sup\limits_{\varepsilon < \varepsilon_1} \varepsilon^N p_N(u_\varepsilon)$, где $p_N(u_\varepsilon)$ – N-я норма на $C^\infty(\mathrm{S}^1)$, на подпространствах G_N.

Другим примером пространства, встречающегося в приложениях, является пространство обобщённых операторов, введённое в [5]. В случае заданной на этом пространстве sharp-топологии аналог теоремы Банаха-Штейнгауза вырождается в тривиальное утверждение, однако он может быть построен в пространстве с градуированной топологией.

Библиографические ссылки

1. *Delcroi A., Scarpalezos D.* Sharp Topologies on (C,E,P)-Algebras // Nonlinear Theory of Generalized Function, Chaptman&Hall, Research Notes of Mathematics. 1999. V. 401. P. 165–174.
2. *Antonevich A.* Graded sharp topology on spaces of new generalized functions // Nonlinear algebraic analysis and applications. Cambridge Scientific Publishers. 2004. P. 1–6.
3. *Антоневич А. Б., Романчук Т. А.* Уравнения с дельта-образными коэффициентами: метод конечномерных аппроксимаций. Саарбрюккен: LAP Lambert, 2012.
4. *Антоневич А. Б., Шагова Т. Г.* Умножение распределений и алгебры мнемофункций // Труды Крымской осенней математической школы-симпозиума. СМФН 65, № 3. Российский университет дружбы народов, М., 2019, С. 339–389.
5. *Гулецкая О. И., Радыно Н. Я.* К общей спектральной теории банаховых модулей // Докл. РАН. 1995. Т. 343, № 1. С. 7–9.