

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Н. Г. Кембровская
И. Н. Медведь
И. И. Жолнеревич

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

*Рекомендовано
Учебно-методическим объединением
по естественнонаучному образованию в качестве пособия
для студентов высших учебных заведений, обучающихся
по специальности 1-31 04 01 «Физика (по направлениям)»*

МИНСК
БГУ
2013

УДК 537(075.8)
ББК 22.33я73
К35

Рецензенты:

кандидат физико-математических наук *О. А. Новицкий*;
кандидат физико-математических наук *Т. П. Янукович*

Кембровская, Н. Г.

К35 Электричество и магнетизм : пособие / Н. Г. Кембровская,
И. Н. Медведь, И. И. Жолнеревич. – Минск : БГУ, 2013. – 119 с. : ил.
ISBN 978-985-518-804-0.

В пособии рассмотрены методы решения наиболее характерных задач по курсу «Электричество и магнетизм» с указанием последовательности действий для каждого из методов. Большинство задач дополнено рисунками.

Для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальности 1-31 04 01 «Физика (по направлениям)».

УДК 537(075.8)
ББК 22.33я73

© Кембровская Н. Г., Медведь И. Н.,
Жолнеревич И. И., 2013
© БГУ, 2013

ISBN 978-985-518-804-0

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ.....	4
1. ЗАКОН КУЛОНА. МЕТОД СУПЕРПОЗИЦИИ ПРИ РАСЧЕТЕ НАПРЯЖЕННОСТИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ СИСТЕМЫ ТОЧЕЧНЫХ ЗАРЯДОВ.....	5
2. МЕТОД СУПЕРПОЗИЦИИ ПРИ РАСЧЕТЕ НАПРЯЖЕННОСТИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ НЕТОЧЕЧНЫХ ЗАРЯДОВ.....	7
3. ТЕОРЕМА ОСТРОГРАДСКОГО – ГАУССА В ВАКУУМЕ.....	11
4. ПОТЕНЦИАЛ, РАЗНОСТЬ ПОТЕНЦИАЛОВ	19
5. ОСНОВНАЯ ЗАДАЧА ЭЛЕКТРОСТАТИКИ, ПОЛЕ ДИПОЛЯ, ПОЛЕ ПРОИЗВОЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ЗАРЯДОВ.....	23
6. ПРОВОДНИКИ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ	28
7. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ДИЭЛЕКТРИКАХ	34
8. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ	38
9. ЭЛЕКТРОЕМКОСТЬ. ВЗАИМНАЯ ЕМКОСТЬ.....	42
10. ЭНЕРГИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЗАРЯДОВ. ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ	48
11. ЗАКОНЫ ПОСТОЯННОГО ТОКА. РАСЧЕТ СОПРОТИВЛЕНИЯ СРЕДЫ. КВАЗИСТАЦИОНАРНЫЕ ТОКИ.....	52
12. ЭЛЕКТРОДВИЖУЩАЯ СИЛА. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ ПОСТОЯННОГО ТОКА. ЗАКОНЫ КИРХГОФА	59
13. ТЕОРЕМА БИО – САВАРА – ЛАПЛАСА	65
14. ТЕОРЕМА О ЦИРКУЛЯЦИИ ВЕКТОРА МАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ	70
15. СИЛА АМПЕРА. КОНТУР С ТОКОМ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ	76
16. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВЕЩЕСТВЕ	83
17. ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ	91
18. САМОИНДУКЦИЯ. ИНДУКТИВНОСТЬ. ВЗАИМНАЯ ИНДУКЦИЯ	99
19. ЭНЕРГИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ.....	104
20. ЦЕПИ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА	107
21. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА. ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ И МАГНИТНОМ ПОЛЯХ.....	111
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	119

ПРЕДИСЛОВИЕ

Пособие написано в соответствии с тематическим планом, рекомендованным типовой учебной программой для практических занятий по курсу «Электричество и магнетизм», и предназначено для работы на практических занятиях, а также для индивидуальной и контрольно-самостоятельной работы.

Согласно программе в процессе обучения студенты должны научиться рассчитывать характеристики стационарных электрического и магнитного полей в вакууме и веществе, а также определять характеристики цепей квазистационарных переменных токов и гармонически изменяющихся электрического и магнитного полей.

Использование пособия повысит эффективность самостоятельной работы студентов при освоении методов решения задач, а также будет способствовать формированию устойчивых практических навыков по применению законов электромагнетизма.

1. ЗАКОН КУЛОНА. МЕТОД СУПЕРПОЗИЦИИ ПРИ РАСЧЕТЕ НАПРЯЖЕННОСТИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ СИСТЕМЫ ТОЧЕЧНЫХ ЗАРЯДОВ

Задачи по данной теме можно разделить на две группы. К первой относятся те, в которых задано распределение точечных зарядов, в них необходимо:

- 1) записать закон Кулона для каждой пары точечных зарядов;
- 2) изобразить в выбранном масштабе векторы сил;
- 3) сложить силы:

а) по правилам сложения векторов;

б) спроектировать векторы сил на оси выбранной системы отсчета и суммировать проекции.

Ко второй группе относятся задачи, в которых заданы заряженные тела.

Закон Кулона в форме $\vec{F}_{12} = \frac{kq_1q_2}{r_{12}^3}\vec{r}_{12} = -\vec{F}_{21}$ применим лишь для рас-

чета сил взаимодействия двух точечных зарядов, т. е. заряженных тел, размерами которых можно пренебречь по сравнению с расстоянием между ними. Поэтому для таких задач необходимо:

- 1) заряженное тело представить как систему точечных зарядов;
- 2) записать закон Кулона для какой-либо пары точечных зарядов;
- 3) изобразить соответствующий вектор силы;

4) выбрать систему отсчета и спроецировать каждый вектор силы на оси, а затем суммировать проекции всех сил на каждую ось.

Задача 1. В вершинах квадрата со стороной $a = 10$ см расположены равные по модулю точечные заряды $q = 2$ нКл, три положительных и один отрицательный. Найти модули результирующих сил, действующих на отрицательный заряд и на расположенный в противоположной вершине положительный заряд.

Решение. Модули сил взаимодействия зарядов:

$$F_3 = F_6 = \frac{kq^2}{2a^2}, \quad F_1 = F_2 = F_4 = F_5 = \frac{kq^2}{a^2}.$$

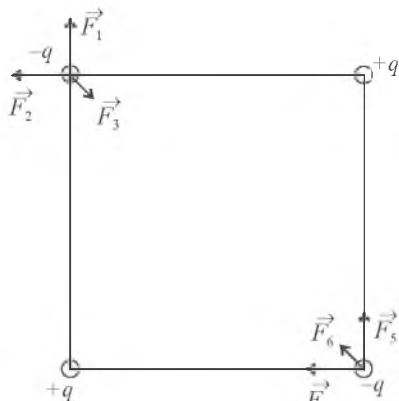


Рис. 1

Направление векторов сил показано на рис. 1.

Результирующая сила, действующая на отрицательный заряд, $\vec{F}_- = \vec{F}_4 + \vec{F}_5 + \vec{F}_6$, на положительный заряд $-\vec{F}_+ = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$. Модули результирующих сил:

$$F_- = \frac{kq^2}{a^2}\sqrt{2} + \frac{kq^2}{2a^2} = \frac{kq^2}{2a^2}(2\sqrt{2} + 1);$$

$$F_+ = \frac{kq^2}{a^2}\sqrt{2} - \frac{kq^2}{2a^2} = \frac{kq^2}{2a^2}(2\sqrt{2} - 1).$$

Тогда $F_- = 14 \text{ мкН}$, $F_+ = 6,0 \text{ мкН}$.

Задача 2. Заряд $q_1 = q$ равномерно распределен по тонкой проволоке, имеющей форму четверти дуги окружности радиусом R . В центре кривизны проволоки расположен точечный заряд $q_2 = -q$ (рис. 2). Чему равен модуль силы взаимодействия точечного заряда и зарядов, распределенных по проволоке?

Решение. Так как заряд равномерно распределен по проволоке, линейная плотность заряда $\lambda = \frac{dq}{dl} = \frac{q_1}{l} = \frac{2q_1}{\pi R}$, где $l = \frac{1}{4}2\pi R = \frac{\pi R}{2}$. Представим распределение заряда по проволоке как систему точечных зарядов, расположенных на малых элементах длиной $dl \ll R$. Тогда на малом элементе dl_1 находится точечный заряд $dq_{11} = \lambda dl_1$. Запишем закон Кулона для зарядов dq_{11} и q_2 : $d\vec{F}_1 = \frac{k dq_{11} q_2}{r_{12}^3} \vec{r}_{12}$, где $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \left(\frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{Кл}^2} \right)$; \vec{r}_1 – вектор, проведенный от dq_{11} к q_2 . Так как $q_2 = -q$, эта сила направлена противоположно вектору \vec{r}_1 .

Если взять другой элемент проволоки, но равный по длине первому $dl_1 = dl_2$, то $dq_{12} = \lambda dl_2 = dq_{11}$ и модули $r_1 = r_2 = R$. Следовательно, модули сил равны $dF_1 = dF_2 = dF$, но направление их различно. Результирующая сила $\vec{F}_p = \sum_i^N d\vec{F}_i$.

Складывать векторно N векторов сил сложно, проще спроецировать векторы сил на ось системы отсчета и найти проекции результирующей силы.

Как выбрать систему отсчета? На рис. 2 показано, что если выбрать ось OY совпадающей с осью симметрии проволоки, а ось OX перпендикулярной ей, то для зарядов dq , расположенных на равных расстояниях от оси OY , проекции сил на ось OX будут равны по модулю и противоположны по знаку.

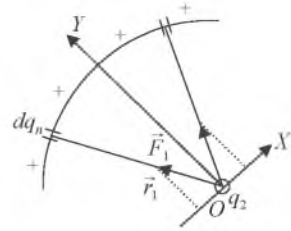


Рис. 2

Следовательно, в такой системе отсчета проекция результирующей силы на ось OX $F_{px} = 0$. Тогда модуль результирующей силы $F_p = F_{py} = \int dF_y$. Пусть α – угол между вектором какой-то из сил и осью OY , проекция силы $dF_y = dF \cos \alpha = \frac{k dq_1 q_2}{R^2} \cos \alpha = \frac{k \lambda dl q_2}{R^2} \cos \alpha$. Так как $dl = R d\alpha$, то $dF_y = \frac{k \lambda q_2}{R} \cos \alpha d\alpha$. Так как ось OY делит дугу на равные части, можно интегрировать по половине дуги, т. е.

$$F_p = F_{py} = 2 \int_0^{\pi/4} \frac{k \lambda q_2}{R} \cos \alpha d\alpha = 2 \frac{k q_2 \lambda}{R} \sin \frac{\pi}{4}$$

Подставим линейную плотность, значение синуса, выражение для k , тогда модуль результирующей силы равен

$$F_p = F_{py} = 2 \frac{2 q_1 q_2}{4 \pi \epsilon_0 \pi R^2} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{q_1 q_2 \sqrt{2}}{2 \epsilon_0 \pi^2 R^2}$$

2. МЕТОД СУПЕРПОЗИЦИИ ПРИ РАСЧЕТЕ НАПРЯЖЕННОСТИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ НЕТОЧЕЧНЫХ ЗАРЯДОВ

При расчете результирующей напряженности поля, создаваемого системой точечных зарядов, последовательность действий следующая:

1) записать формулу для напряженности поля $\vec{E} = \frac{kq}{r^3} \vec{r}$ в заданной точке, создаваемой каждым зарядом системы;

- 2) изобразить в выбранном масштабе эти векторы в заданной точке;
 3) найти по принципу суперпозиции вектор результирующей напряженности:

а) по правилам сложения векторов $\vec{E}_p = \sum_i^N \vec{E}_i$;

б) суммируя проекции векторов на оси выбранной системы отсчета.

Задача 3. В трех вершинах квадрата со стороной $a = 10$ см последовательно размещены три точечных заряда $q_1 = -20$ нКл, $q_2 = 20$ нКл, $q_3 = -20$ нКл. Рассчитать модуль напряженности поля в четвертой вершине квадрата.

Решение. Так как модули зарядов q_1 и q_3 равны и они расположены на одинаковом расстоянии от четвертой вершины, $|\vec{E}_1| = |\vec{E}_3| = \frac{k|q|}{a^2}$. Модуль напряженности поля, создаваемого в этой точке вторым зарядом, $|\vec{E}_2| = \frac{k|q|}{r^2} = \frac{k|q|}{2a^2}$.

Направление векторов напряженности показано на рис. 3.

Проекции результирующей напряженности на оси OX и OY совпадают:

$$E_{px} = |\vec{E}_1| - \frac{\sqrt{2}}{2} |\vec{E}_2| = \frac{k|q|}{a^2} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{4} \right);$$

$$E_{py} = |\vec{E}_3| - \frac{\sqrt{2}}{2} |\vec{E}_2| = \frac{k|q|}{a^2} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{4} \right).$$

Тогда

$$|\vec{E}_p| = \sqrt{E_{px}^2 + E_{py}^2} = \frac{k|q|}{a^2} \left(\sqrt{2} - \frac{1}{2} \right), \quad |\vec{E}_p| = 16 \frac{\text{кН}}{\text{Кл}}.$$

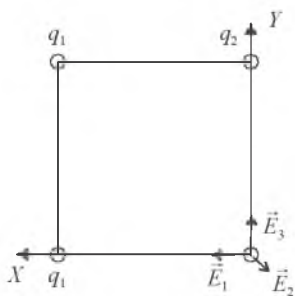


Рис. 3

Для расчета напряженности поля, создаваемого заряженным телом, необходимо:

1) заряженное тело (распределенный в пространстве заряд) представить как систему точечных зарядов;

2) записать формулу для напряженности поля $d\vec{E} = \frac{k dq}{r^3} \vec{r}$ в заданной точке, создаваемой точечным зарядом dq . Точечный заряд, в зависимости от условия задачи, можно записать как $dq = \rho(x, y, z) dV$, где $\rho(x, y, z)$ – объемная плот-

ность заряда; $dq = \sigma(x, y, z)dS$, где $\sigma(x, y, z)$ – поверхностная плотность заряда; $dq = \lambda(x, y, z)dl$, где $\lambda(x, y, z)$ – линейная плотность заряда;

3) изобразить в заданной точке соответствующий вектор напряженности $d\vec{E}$;

4) выбрать систему отсчета, спроецировать вектор $d\vec{E}$ на оси и рассчитать $E_x = \int dE_x$, $E_y = \int dE_y$, $E_z = \int dE_z$, $|\vec{E}| = \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2}$ по принципу суперпозиции вектор напряженности $\vec{E} = \sum_i^N d\vec{E}_i$.

Задача 4. Определить напряженность поля, создаваемого равномерно заряженным отрезком, с линейной плотностью $\lambda = 20 \frac{\text{мкКл}}{\text{м}}$ в точке O , удаленной от отрезка на $r_0 = 10$ см (рис. 4). Углы $\alpha_1 = 60^\circ$, $\alpha_2 = 30^\circ$.

Решение. Представим заряженный отрезок в виде системы точечных зарядов dq , каждый из которых расположен на малом элементе длиной dl , $dq = \lambda dl$.

Напряженность поля, создаваемого таким зарядом, $d\vec{E} = \frac{k dq}{r^3} \vec{r} = \frac{k \sigma ds}{r^3} \vec{r}$.

Проведем радиус-вектор от произвольного заряда dq в точку O и вектор напряженности в этой точке.

Найдем проекции этого вектора на оси координат:

$$dE_x = dE \cos \alpha = \frac{k dq}{r^2} \cos \alpha;$$

$$dE_y = -dE \sin \alpha = -\frac{k dq}{r^2} \sin \alpha.$$

где $dq = \lambda dl = \lambda dy$, α – угол между осью OX и вектором напряженности. Из прямоугольного треугольника:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{r_0}, \quad \cos \alpha = \frac{r_0}{r}.$$

Для нахождения dy про дифференцируем первое выражение:

$$\frac{d\alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{dy}{r_0}.$$

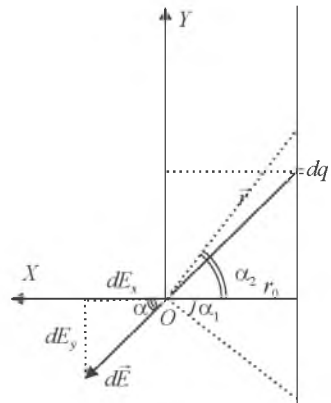


Рис. 4

Подставим в выражения для проекций:

$$dE_x = \frac{k dq}{r^2} \cos \alpha = \frac{\lambda dy}{r_0^2} \cos^3 \alpha = \frac{k \lambda}{r_0} \cos \alpha d\alpha, \quad dE_y = -\frac{k \lambda}{r_0} \sin \alpha d\alpha;$$

$$E_x = \int_{-\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{k \lambda}{r_0} \cos \alpha d\alpha = \frac{k \lambda}{r_0} (\sin \alpha_2 + \sin \alpha_1);$$

$$E_y = -\int_{-\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{k \lambda}{r_0} \sin \alpha d\alpha = \frac{k \lambda}{r_0} (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1);$$

$$E_x = -9(1 + \sqrt{3}) \cdot 10^5 \frac{\text{В}}{\text{М}}, \quad E_y = -9(\sqrt{3} - 1) \cdot 10^5 \frac{\text{В}}{\text{М}};$$

$$|\vec{E}| = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = 18\sqrt{2} \cdot 10^5 \frac{\text{В}}{\text{М}}.$$

Задача 5. Поверхность полусферы радиусом R заряжена равномерно с поверхностной плотностью заряда σ . Рассчитать модуль напряженности поля в центре кривизны сферической поверхности.

Представим заряженную сферическую поверхность в виде системы точечных зарядов dq , каждый из которых расположен на малом элементе поверхности ds , $dq = \sigma ds$.

Решение. Напряженность поля, создаваемого таким зарядом:

$$d\vec{E} = \frac{k dq}{r^3} \vec{r} = \frac{k \sigma ds}{r^3} \vec{r}.$$

Как видно из рис. 5, модули всех векторов напряженности равны, а направление различно.

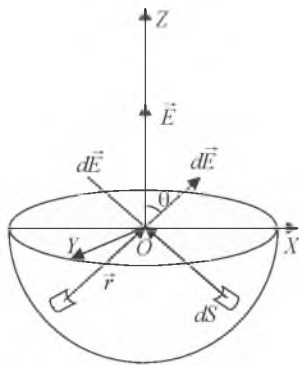


Рис. 5

Для рационального расчета модуля напряженности выберем систему координат с началом в центре кривизны сферической поверхности, а ось OZ – совпадающей с осью симметрии системы (см. рис. 5).

Имеем:

$$E_x = \int dE_x = 0;$$

$$E_y = \int dE_y = 0;$$

$$|\vec{E}| = E_z = \int dE_z.$$

В сферической системе координат:

$$dE_z = dE \cos \theta, \quad ds = R^2 \sin \theta \, d\varphi \, d\theta;$$

$$\begin{aligned} |\vec{E}| = E_z &= \iint \frac{k\sigma ds}{R^2} \cos \theta = \\ &= \iint k\sigma \sin \theta \, d\varphi \, d\theta \cos \theta = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{k\sigma}{2} d(\sin^2 \theta) = k\pi\sigma = \frac{\sigma}{4\epsilon_0}. \end{aligned}$$

3. ТЕОРЕМА ОСТРОГРАДСКОГО – ГАУССА В ВАКУУМЕ

Одна из основных задач электростатики состоит в определении вектора напряженности электростатического поля \vec{E} по указанному распределению электрического заряда в пространстве.

При условии, что распределение заряда обладает симметрией (сферической или аксиальной), наиболее целесообразным при решении задач является применение теоремы Остроградского – Гаусса.

Согласно этой теореме поток вектора напряженности \vec{E} сквозь произвольную замкнутую поверхность S равен полному заряду, заключенному в объеме, ограниченном этой поверхностью, деленному на ϵ_0 , т. е.

$$\oiint \vec{E} d\vec{S} = \frac{q_{\text{внутр}}}{\epsilon_0}.$$

Для решения задачи с помощью теоремы Остроградского – Гаусса следует рассчитать поток Φ вектора напряженности \vec{E} . Для этого необходимо:

1) выбрать точки, расположенные симметрично, т. е. на одинаковом расстоянии от центра симметрии (оси симметрии, плоскости симметрии) системы распределения заряда;

2) выбрать замкнутую поверхность S так, чтобы эти выбранные точки принадлежали ей. Как правило, если заряд в пространстве обладает сферической симметрией, то в роли такой замкнутой поверхности выступает поверхность сферы радиусом r , площадь которой S . Если заряд в пространстве распределен так, что имеет осевую (аксиальную) симметрию, то замкнутая поверхность выбирается в виде цилиндра, радиус и высота которого равны r и h соответственно. В этом случае площадь замкнутой поверхности $S = 2S_{\text{осн}} + 2S_{\text{бок}}$;

3) восстановить к различным точкам этой замкнутой поверхности внешние единичные нормали (перпендикуляры) \vec{n} ;

4) указать направление вектора напряженности \vec{E} в этих точках и зафиксировать значение угла α между векторами \vec{E} и \vec{n} . При рациональном выборе замкнутой поверхности, как правило, значение этого угла α численно равно 0° или 90° ;

5) вычислить поток вектора напряженности как $\Phi = \oiint \vec{E} d\vec{S}$.

Для окончательного решения задачи необходимо рассчитать электрический заряд $q_{\text{внутр}}$, заключенный в объеме этой замкнутой поверхности. В случае совокупности точечных зарядов этот заряд $q_{\text{внутр}}$, рассчитывают как алгебраическую сумму зарядов, заключенных только внутри поверхности S , $q_{\text{внутр}} = \sum_{i=1}^n \pm q_i$. При более сложных способах распределения заряда, согласно условию задачи, можно использовать формулы:

$$q_{\text{внутр}} = \int \lambda dl, \quad q_{\text{внутр}} = \iint \sigma dS, \quad q_{\text{внутр}} = \iiint \rho dV,$$

где λ , σ , ρ – линейная, поверхностная и объемная плотность распределения заряда соответственно. Эти величины, в свою очередь, могут быть как постоянными при равномерном распределении заряда, так и заданными в качестве функции некоторого аргумента, например $\sigma(\theta) = \sigma_0 \cos\theta$

или $\rho(r) = \rho_0 \left(1 + \frac{r}{R}\right)$.

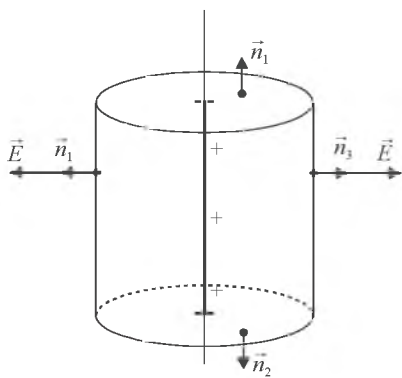


Рис. 6

Задача 6. Найти модуль напряженности электростатического поля, созданного прямой бесконечной нитью, как функцию расстояния r от нее. Нить заряжена равномерно с линейной плотностью λ .

Решение. Так как поле, созданное зарядом, распределенным по нити, обладает осевой симметрией, в качестве замкнутой поверхности S выбираем соосный (коаксиальный) цилиндр (боковая поверхность + два основания) радиусом r и высотой h (рис. 6).

Восстановим внешние единичные нормали \vec{n}_1 , \vec{n}_2 , \vec{n}_3 к каждому основанию и к точкам боковой поверхности соответственно.

Так как заряд распределен вдоль нити равномерно, созданное электрическое поле изображается расходящимися силовыми линиями, касательная в каждой точке которых совпадает с направлением вектора \vec{E} . Отметим, что \vec{n}_1 и \vec{n}_2 , проведенные к основаниям поверхности S , перпендикулярны \vec{E} , а нормаль \vec{n}_3 , восстановленная в любой точке, сонаправлена с \vec{E} .

Расчет потока вектора \vec{E} сквозь выбранную замкнутую поверхность S выполним как

$$\begin{aligned} \oiint \vec{E} d\vec{S} &= 2 \iint_{S_{\text{осн}}} \vec{E} d\vec{S} + \iint_{S_{\text{бок}}} \vec{E} d\vec{S} = \iint_{S_{\text{осн}}} E dS n_1 \cos 90^\circ + \\ &+ \iint_{S_{\text{осн}}} E dS n_2 \cos 90^\circ + \iint_{S_{\text{бок}}} E dS n_3 \cos 0^\circ = E 2\pi r h. \end{aligned}$$

Главной особенностью расчета является постоянство модуля вектора направленности во всех точках на боковой поверхности выбранного цилиндра на расстоянии r от нити, что позволяет вынести $|\vec{E}|$ из-под интеграла.

Заряд, который находится внутри объема, ограниченного замкнутой цилиндрической поверхностью, равен $q_{\text{внутр}} = \lambda h$. Таким образом, теорема

Остроградского – Гаусса приводит к равенству $E 2\pi r h = \frac{\lambda h}{\epsilon_0}$, из кото-

рого получаем значение модуля вектора напряженности электростатического поля, созданного бесконечно равномерно заряженной нитью, как

функцию расстояния r от нее: $E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$.

Заметим, что вид замкнутой поверхности S (поверхность цилиндра) обусловлен исключительно удобством вычисления потока вектора напряженности сквозь нее. Но можно утверждать, что согласно теореме Остроградского – Гаусса результат решения задачи от формы поверхности не зависит.

Следует также помнить, что полученная формула справедлива только для нити, которую согласно условию можно считать бесконечной. В случае рассмотрения поля заряженной полубесконечной нити, а тем более поля заряженного отрезка конечных размеров, эта формула не применима.

Задача 7. Прямолинейный, очень длинный цилиндрический кабель, внутренний и внешний радиусы которого равны R_1 и R_2 соответственно,

заряжен с объемной плотностью $\rho(r) = \frac{\rho_0}{r}$, где $\rho_0 = \text{const}$; r – расстоя-

ние от оси кабеля. Определить модуль вектора напряженности поля как функцию расстояния r от оси кабеля.

Решение. Представим кабель как две соосные цилиндрические обкладки, в пространстве между которыми имеется электрический объемный заряд.

Решение задачи предполагает четкое разграничение области исследования.

Первоначально рассмотрим область $r < R_1$, т. е. внутри кабеля. Так как по условию кабель пустотелый, следовательно, в этой области электрический заряд отсутствует. Это позволяет утверждать, что $\oiint_S \vec{E}_1 d\vec{S} = 0$

согласно теореме Остроградского – Гаусса. Следовательно, в области $0 \leq r \leq R_1$ модуль вектора напряженности равен нулю, т. е. $E_1(r) = 0$.

Рассмотрим далее область $R_1 \leq r \leq R_2$ между обкладками кабеля, т. е. ту, где распределен заряд. Так как распределение заряда обладает осевой симметрией, выберем в качестве замкнутой поверхности цилиндрическую радиусом r ($R_1 < r < R_2$) и высотой h (рис. 7).

Электрическое поле области имеет радиальный характер, т. е. вектор \vec{E}_2 в каждой точке перпендикулярен оси цилиндра. Расчет потока вектора \vec{E}_2 сквозь данную поверхность выполним аналогично предыдущей задаче: $\oiint \vec{E}_2 d\vec{S} = E_2 2\pi r h$.

Так как электростатический заряд распределен по объему неравномерно,

а с объемной плотностью $\rho = \frac{\rho_0}{r}$, то заряд, заключенный в объеме замкнутой поверхности, вычислим как $q_{\text{внутр}} = \iiint \rho dV$.

Представим малый элементарный объем как $dV = h dS = 2\pi r dr h$. Тогда получим выражение

$$q_{\text{внутр}} = \int_{R_1}^r \frac{\rho_0}{r} 2\pi r h dr = \rho_0 2\pi h (r - R_1).$$

Таким образом, в области $R_1 \leq r \leq R_2$ получаем равенство

$$E_2 2\pi h = \frac{\rho_0 2\pi h (r - R_1)}{\epsilon_0}.$$

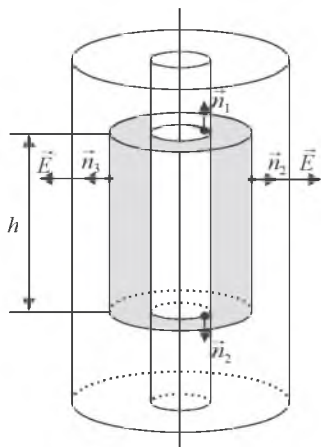


Рис. 7

Можно утверждать, что модуль вектора

$$E_2(r) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left(1 - \frac{R_1}{r} \right).$$

Полезно заметить, что при $r = R_1$ $E_2(r) = 0 = E_1(r)$.

Рассмотрим область $r \geq R_1$ (рис. 8).

Для расчета потока вектора \vec{E}_3 выбираем цилиндрическую замкнутую поверхность с $r > R_2$ и высотой h : $\oiint \vec{E}_3 d\vec{S} = E_3 2\pi r h$. Следует особое внимание уделить расчету заряда, находящегося в объеме замкнутой по-

верхности: $q_{\text{внутр}} = \iiint \rho dV = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\rho_0}{r} 2\pi r h dr = \rho_0 2\pi h (R_2 - R_1)$. Таким обра-

зом, в области $r > R_2$ справедливо равенство $E_3 2\pi h = \frac{\rho_0 2\pi h (R_2 - R_1)}{\epsilon_0}$,

следовательно, модуль вектора $E_3(r) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \frac{R_2 - R_1}{r}$.

Подводя итоги решения данной задачи, можно сделать вывод, что для простоты расчета потока вектора напряженности \vec{E} электростатического поля, созданного зарядом, обладающим осевой (аксиальной) симметрией, необходимо в качестве замкнутой поверхности выбрать соосную цилиндрическую поверхность.

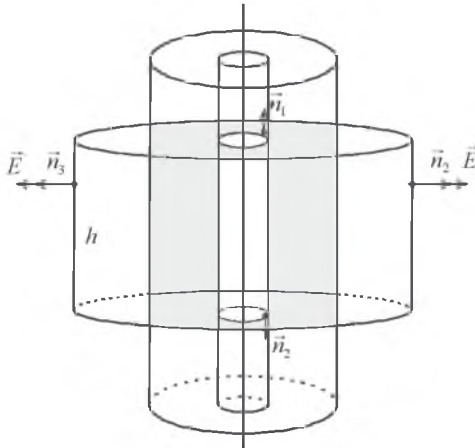


Рис. 8

Радиус этой цилиндрической поверхности зависит от области исследования. Необходимо обратить внимание на пределы интегрирования при расчете $q_{\text{внутр}}$, так как искомый заряд – это только тот, который находится в объеме, охваченном выбранной замкнутой поверхностью. Для наглядного представления зависимости модуля вектора напряженности как функции расстояния r от оси кабеля построим график зависимости $E = f(r)$ (рис. 9).

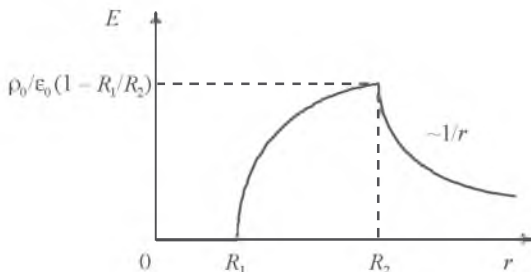


Рис. 9

Задача 8. Шар радиусом R имеет положительный заряд, объемная плотность которого зависит только от расстояния r до его центра как $\rho(r) = \rho_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right)$, где $\rho_0 = \text{const}$. Найти модуль напряженности внутри и вне шара как функцию r .

Решение. Рассмотрим первоначально область внутри шара, т. е. $r < R$. В качестве замкнутой поверхности выберем поверхность сферы радиусом r , все точки которой равноудалены от центра шара.

Выберем единичную внешнюю нормаль \vec{n} к выбранной точке поверхности. Так как объемная плотность заряда зависит только от r , то во всех точках поверхности $|\vec{E}_1| = \text{const}$ и, как вектор, \vec{E}_1 сонаправлен с \vec{n} . Поток вектора равен $\oiint \vec{E}_1 d\vec{S} = \oiint E_1 n ds \cos 0^\circ = E_1 4\pi r^2$, где $4\pi r^2 = S$ – площадь поверхности сферы. Заряд, находящийся внутри поверхности, заключен в области, заштрихованной на рис. 10:

$$q_{\text{внутр}} = \iiint \rho dV = \int_0^r \rho_0 \left(1 - \frac{r}{R}\right) 4\pi r^2 dr = 4\pi \rho_0 \left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4R}\right),$$

где $dV = 4\pi r^2 dr$ – элементарный объем. Согласно теореме Остроградского – Гаусса имеем выражение $E_1 4\pi r^2 = \frac{4\pi\rho_0}{\epsilon_0} \left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4R} \right)$, следовательно, $E_1 = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left(\frac{r}{3} - \frac{r^2}{4R} \right)$ внутри шара (т. е. в области $0 \leq r \leq R$).

Рассмотрим область $r \geq R$. Так как распределение заряда обладает сферической симметрией, выберем в качестве замкнутой поверхности концентрическую сферу, только теперь $r > R$ (рис. 11).

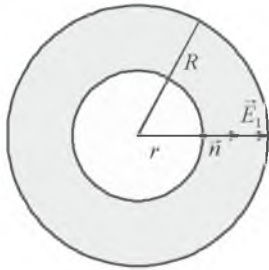


Рис. 10

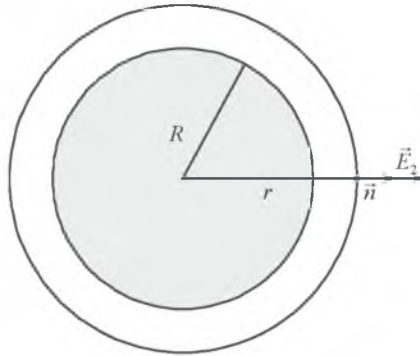


Рис. 11

Выбирая \vec{n} и определяя во всех точках выбранной поверхности $|\vec{E}_2| = \text{const}$, рассчитываем поток вектора $\oiint \vec{E}_2 d\vec{S} = E_2 4\pi r^2$. При расчете $q_{\text{внутр}}$ надо обратить внимание на то, что внутрь выбранной поверхности попадает теперь весь заряд шара, поэтому

$$q_{\text{внутр}} = \iiint \rho dV = \int_0^R \rho_0 \left(1 - \frac{r}{R} \right) 4\pi r^2 dr = 4\pi\rho_0 \frac{R^3}{12}$$

Следовательно, $E_2 4\pi r^2 = \frac{4\pi\rho_0 R^3}{\epsilon_0 12}$, из которого находим, что $E_2 = \frac{\rho_0 R^3}{\epsilon_0 12r^2}$.

Проведем дополнительное исследование модуля напряженности E_1 . Определим его максимальное значение $E_{1\text{max}}$ и соответствующее ему значение r_{max} .

Исследуем функцию $E_1 = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left(\frac{r}{3} - \frac{r^2}{4R} \right)$ на экстремум: $\frac{dE_1}{dr} = 0$, т. е.

$$\frac{\rho_0}{3\epsilon_0} - \frac{2\rho_0 r}{4\epsilon_0 R} = 0 \Rightarrow r_{\max} = \frac{2}{3}R, \text{ при этом значении } r_{\max} \text{ модуль вектора на}$$

пряженности принимает максимальное значение $E_{1\max} = \frac{\rho_0 R}{9\epsilon_0}$.

График зависимости модуля вектора напряженности от расстояния до центра заряженного шара изображен на рис. 12.

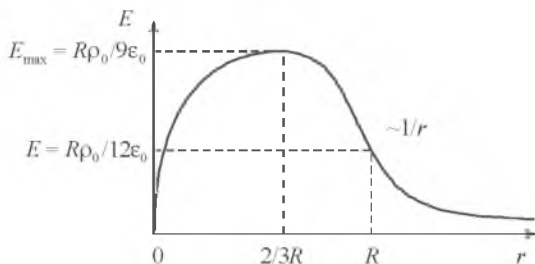


Рис. 12

Задача 9. Найти распределение объемного заряда в пространстве, если вектор напряженности поля равен: а) $\vec{E} = 2axy\vec{i} + a(x^2 + y^2)\vec{j}$; б) $\vec{E} = ay\vec{i} + (ax + by)\vec{j} + by\vec{k}$; в) $\vec{E} = \frac{a\vec{r}}{r^2}$, где a, b – постоянные; $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – орты осей x, y, z ; \vec{r} – радиус-вектор точки.

Решение. Для решения данной задачи необходимо использовать дифференциальную форму теоремы Остроградского – Гаусса: $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$, или

$$\vec{\nabla} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

Если вектор напряженности поля \vec{E} задан в декартовых координатах, то целесообразно использовать векторный дифференциальный оператор $\vec{\nabla}$ также в декартовых координатах: $\vec{\nabla} = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$.

В случае а) $\vec{E} = 2axy\vec{i} + a(x^2 + y^2)\vec{j}$, тогда $\vec{\nabla} \vec{E} = 4ay$, следовательно, $\rho = 4ay\epsilon_0$.

В случае б) $\vec{E} = a\vec{i} + (ax + by)\vec{j} + by\vec{k}$, тогда $\vec{\nabla}\vec{E} = 0$, следовательно, $\rho = 0$.

В случае в) $\vec{E} = \frac{a\vec{r}}{r^2}$, тогда вектор напряженности можно представить как $\vec{E} = \frac{a(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})}{x^2 + y^2 + z^2}$ и найти $\vec{\nabla}\vec{E} = \frac{a}{r^2}$, следовательно, $\rho = \frac{a\epsilon_0}{r^2}$.

Так как поле обладает сферической симметрией, данную задачу можно решить не переходя к декартовым координатам, а используя векторный дифференциальный оператор $\vec{\nabla}$ в сферических координатах:

$$\vec{\nabla}\vec{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (E_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial E_\phi}{\partial \phi}.$$

По условию задачи $E = f(r)$, тогда $E_\theta = 0$, $E_\phi = 0$, отсюда следует:

$$\vec{\nabla}\vec{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_r) = \frac{a}{r^2} \text{ и } \rho = \frac{a\epsilon_0}{r^2}.$$

Использование выражения оператора $\vec{\nabla}$ не только в декартовых, но и в сферических, а также цилиндрических координатах позволяет быстро решить задачу даже при сложных зависимостях напряженности от соответствующих координат.

4. ПОТЕНЦИАЛ, РАЗНОСТЬ ПОТЕНЦИАЛОВ

Если известно распределение зарядов, то потенциал точки поля или разность потенциалов между двумя точками поля можно рассчитать двумя способами:

1) *методом суперпозиции*. Для расчета потенциала в точке поля необходимо:

а) заряженное тело (распределенный в пространстве заряд) представить как систему точечных зарядов;

б) записать формулу для потенциала поля $d\phi = \frac{k dq}{r}$ в заданной точке, создаваемой точечным зарядом dq . Точечный заряд в зависимости от условия задачи можно записать как $dq = \rho(x, y, z) dV$, где $\rho(x, y, z)$ – объемная плотность заряда; $dq = \sigma(x, y, z) dS$, где $\sigma(x, y, z)$ – поверхностная плотность заряда; $dq = \lambda(x, y, z) dl$, где $\lambda(x, y, z)$ – линейная плотность заряда;

в) по принципу суперпозиции найти результирующий потенциал $\phi = \sum_i^N d\phi_i$;

2) используя соотношения $\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l}$, $\vec{E} = -\text{grad } \varphi$, которые по-

зволяют найти разность потенциалов (по известной функциональной зависимости напряженности от координат) или напряженность (по известной функциональной зависимости потенциала от координат).

Задача 10. Тонкое кольцо радиусом R имеет заряд q . Найти потенциал на оси кольца в точке, расположенной на расстоянии L от центра кольца (рис. 13) в случаях: а) заряд равномерно распределен по кольцу; б) распределение заряда по кольцу не задано.

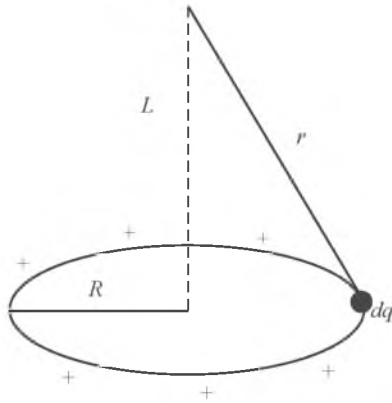


Рис. 13

Решение. Представим заряженное кольцо как систему точечных зарядов dq .

В случае а) можно ввести линейную плотность заряда $\lambda = \frac{dq}{dl} = \frac{q}{2\pi R}$ и записать $dq = \lambda dl = \frac{q}{2\pi R} dl$. Так как все dq одинаковы и каждый создает в заданной точке одинаковый потенциал $d\varphi = \frac{k dq}{r}$, где $r = \sqrt{R^2 + L^2}$, то по принципу суперпозиции результирующий потенциал

$$\varphi = \sum_i^N d\varphi_i = \int_0^{2\pi R} \frac{k dq}{r} = \int_0^{2\pi R} \frac{kq}{2\pi R \sqrt{R^2 + L^2}} dl = \frac{kq}{\sqrt{R^2 + L^2}}.$$

В случае б) точечные заряды неодинаковы и каждый создает в заданной точке различный потенциал $d\varphi_i = \frac{k dq_i}{r}$, но расстояние $r = \sqrt{R^2 + L^2}$ одинаково, поэтому по принципу суперпозиции

$$\varphi = \sum_i^N d\varphi_i = \sum_i^N \frac{k dq_i}{\sqrt{R^2 + L^2}} = \frac{k}{\sqrt{R^2 + L^2}} \sum_i^N dq_i = \frac{kq}{\sqrt{R^2 + L^2}}.$$

Задача 11. Найти напряженность и потенциал на оси плоского кольца как функцию расстояния от его центра. Кольцо равномерно заряжено с поверхностной плотностью σ , внутренний радиус кольца R_1 , внешний – R_2 (рис. 14). Рассмотреть предельные случаи: а) поле плоского диска при $R_1 \rightarrow 0$; б) поле заряженной плоскости $R_1 \rightarrow 0$ и $R_2 \rightarrow \infty$.

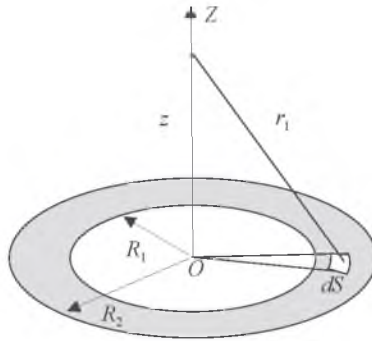


Рис. 14

Решение. Так как потенциал – скалярная величина, а напряженность – векторная, найдем сначала потенциал точки поля.

Представим кольцо как систему точечных зарядов $dq = \sigma dS$. Наиболее рационально в этой задаче использовать полярную систему координат и $dS = r dr d\varphi$.

Для поля точечного заряда $d\varphi = \frac{k dq}{r_1}$, где $r_1 = \sqrt{r^2 + z^2}$, где z – расстояние от центра кольца до точки, в которой находим потенциал. По принципу суперпозиции результирующий потенциал

$$\begin{aligned}\varphi &= \sum_i^N d\varphi_i = \iint \frac{k dq}{r_1} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{R_1}^{R_2} \frac{k\sigma r dr}{\sqrt{r^2 + z^2}} = 2\pi k\sigma \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{2} \frac{d(r^2 + z^2)}{\sqrt{r^2 + z^2}} = \\ &= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(\sqrt{R_2^2 + z^2} - \sqrt{R_1^2 + z^2} \right).\end{aligned}$$

Напряженность электрического поля

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} \vec{k} \right) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(\frac{z}{\sqrt{R_2^2 + z^2}} - \frac{z}{\sqrt{R_1^2 + z^2}} \right) \vec{k}.$$

В случае а) поле плоского диска при $R_1 \rightarrow 0$:

$$\varphi = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(\sqrt{R_2^2 + z^2} - z \right), \quad \vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{R_2^2 + z^2}} \right) \vec{k},$$

где z можно рассматривать как координату точки на оси OZ , проходящей через центр диска.

В случае б) поле заряженной плоскости $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \vec{k}$ является однородным, а линии вектора напряженности коллинеарны оси OZ и имеют противоположное направление с обеих сторон плоскости. Потенциал поля в

точке с координатой z : $\varphi = -\frac{\sigma z}{2\varepsilon_0} + C$ при $z > 0$; $\varphi = +\frac{\sigma z}{2\varepsilon_0} + C$ при $z < 0$.

Так как потенциал – функция непрерывная и при переходе через заряженную плоскость должна изменяться непрерывно, постоянная C одна и та же в обоих случаях. Никаким выбором этой постоянной нельзя получить равенство потенциала нулю на бесконечности, так как на бесконечности имеются не только поля, но и заряды.

Задача 12. В поле равномерно заряженной прямолинейной очень длинной нити движется α -частица. На расстоянии $r_1 = 10$ мм от нити скорость частицы $v_1 = 2 \cdot 10^5 \frac{\text{М}}{\text{с}}$, а на расстоянии $r_2 = 40$ мм – $v_2 = 3 \cdot 10^6 \frac{\text{М}}{\text{с}}$. Найти линейную плотность зарядов на нити.

Решение. Линейную плотность заряда можно определить из формулы для модуля напряженности поля нити, полученной ранее (см. задачу 6):

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}.$$

Работа сил потенциального электростатического поля, под действием сил которого движется частица, не зависит от траектории движения заряда, равна изменению кинетической энергии частицы $A = q(\varphi_1 - \varphi_2) = \Delta W_k$.

Поэтому $\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} = \int_1^2 E dr$, получим:

$$q \int_{r_1}^{r_2} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} dr = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} \quad \text{или} \quad \frac{q\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}$$

и $\lambda = \frac{\pi\epsilon_0 m(v_2^2 - v_1^2)}{q \ln \frac{r_2}{r_1}}$, тогда $\lambda = 8 \frac{\text{нКл}}{\text{м}}$.

Задача 13. Найти потенциал $\varphi(x, y, z)$ электростатического поля $\vec{E} = ay\vec{i} + (ax + bz)\vec{j} + by\vec{k}$, где a и b – постоянные; $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – орты осей x, y, z .

Решение. Так как $\vec{E} = -\text{grad } \varphi = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{k}\right)$, следовательно,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -ay, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -(ax + bz), \quad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = -by.$$

Находим:

$$\varphi(x, y = \text{const}, z = \text{const}) = \int (-ay) dx = -axy + c_1;$$

$$\varphi(x = \text{const}, y, z = \text{const}) = \int (-ax - bz) dy = -axy - bzy + c_2;$$

$$\varphi(x = \text{const}, y = \text{const}, z) = \int (-by) dz = -byz + c_3.$$

При дифференцировании этих выражений по x, y, z должны получиться проекции исходного вектора напряженности на оси координат. Этому соответствует выражение для потенциала:

$$\varphi(x, y, z) = -axy - bzy = -y(ax + bz).$$

5. ОСНОВНАЯ ЗАДАЧА ЭЛЕКТРОСТАТИКИ, ПОЛЕ ДИПОЛЯ, ПОЛЕ ПРОИЗВОЛЬНОЙ СИСТЕМЫ ЗАРЯДОВ

Прямая задача электростатики – по известному распределению зарядов найти функциональную зависимость от координат для вектора напряженности и для потенциала.

Рациональный путь решения зависит от условия задачи:

1) методом суперпозиции найти независимо друг от друга напряженность и потенциал;

2) найти напряженность (потенциал) и, используя формулы $\varphi_1 - \varphi_2 = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l}$ или $\vec{E} = -\text{grad}\varphi$, рассчитать вторую характеристику поля;

3) представить систему зарядов как систему точечных диполей, найти потенциал, а затем напряженность поля.

Обратная задача – по известным функциям для вектора напряженности и потенциала рассчитать распределение зарядов в пространстве.

Рациональный путь решения зависит от условия задачи:

1) при заданной функции для напряженности можно использовать теорему Остроградского – Гаусса в дифференциальной форме $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$;

2) при известных начальных условиях решить и прямую, и обратную задачи электростатики позволяют уравнения Пуассона $\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$, где

$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$, и Лапласа $\Delta\varphi = 0$ (при отсутствии в пространстве свободных зарядов).

Задача 14. Поверхность бесконечного цилиндра радиусом R равномерно заряжена с поверхностной плотностью σ (рис. 15). Определить напряженность и потенциал внутри и вне цилиндра, полагая потенциал поверхности цилиндра равным нулю. Построить качественно графики зависимости модуля напряженности и потенциала от расстояния до оси цилиндра.

Решение. В данном случае прямая задача электростатики решается рационально по пути 2), так как по условию поверхность цилиндра заряжена равномерно и эквипотенциальна. Следовательно, линии напряженности перпендикулярны поверхности, а поле имеет ось симметрии, совпадающую с осью цилиндра, что позволяет использовать для расчета напряженности теорему Остроградского – Гаусса: $\oiint \vec{E} d\vec{S} = \frac{q_{\text{внутр}}}{\epsilon_0}$.

В качестве замкнутой поверхности выберем цилиндрическую поверхность длиной L , ось которой совпадает с осью цилиндра, а основания перпендикулярны его оси.

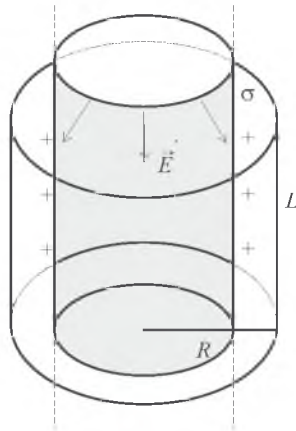


Рис. 15

Для точек с $r \leq R$ внутри выбранной замкнутой поверхности нет зарядов и $\oiint \vec{E} d\vec{S} = 0$, а значит, и модуль напряженности равен $E = 0$. Для точек с $r \geq R$ линии напряженности перпендикулярны выбранной поверхности, модуль напряженности на всей поверхности имеет одну и ту же величину E_k , а внутри нее находится заряд $q = \sigma 2\pi RL$. Тогда:

$$\oiint E dS \cos 0^\circ = E \oiint dS = \frac{\sigma 2\pi RH}{\epsilon_0}, \quad E 2\pi r H = \frac{\sigma 2\pi RH}{\epsilon_0}.$$

Модуль напряженности точек поля вне цилиндра при $r \geq R$ $E = \frac{\sigma R}{\epsilon_0 r}$.

Так как $\vec{E} = -\text{grad}\phi$, а для всех точек внутри $E = 0$, то потенциал точек поля внутри должен иметь постоянную величину, равную потенциалу на поверхности, т. е. при $r < R$ $\phi = \text{const}$.

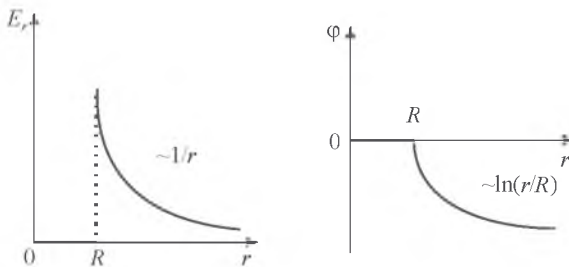


Рис. 16

При $r < R$ модуль напряженности $E = \frac{\sigma R}{\epsilon_0 r} = f(r)$, поэтому $E = -\frac{\partial \varphi}{\partial r}$.

$$\varphi = -\int_R^r \frac{\sigma R}{\epsilon_0 r} dr = -\frac{\sigma R}{\epsilon_0} \ln \frac{r}{R}. \text{ Графики показаны на рис. 16.}$$

Задача 15. Две безграничные плоскости, отстоящие друг от друга на расстояние l , равномерно заряжены с поверхностной плотностью σ и $-\sigma$ (рис. 17). Плоскости имеют коаксиальные отверстия радиусом R , причем $l \ll R$. Взяв координатную ось OX , как показано на рис. 17, найти потенциал и проекцию вектора напряженности электрического поля на оси системы как функции координаты.

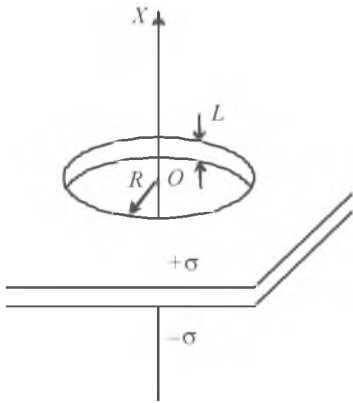


Рис. 17

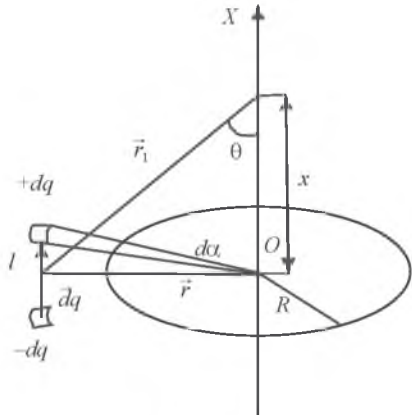


Рис. 18

Решение. Для решения прямой задачи электростатики в данном случае рационально использовать:

- путь 2) – искать на первом этапе проще потенциал как скалярную функцию;

- путь 3) – позволяет представить заданное распределение зарядов как систему точечных диполей (рис. 18) с модулем дипольного момента $dp = dq l$, где $dq = \sigma dS = \sigma r dr d\alpha$, где α – полярный угол.

Потенциал, создаваемый точечным диполем в точке на оси с координатой x :

$$d\varphi = \frac{k d\vec{p} r_1^2}{r_1^3} = \frac{k\sigma r dr d\alpha l r_1 \cos\theta}{r_1^3},$$

где $r_1^2 = r^2 + \left(x + \frac{l}{2}\right)^2 \approx r^2 + x^2$, $\cos\theta = \frac{x + \frac{l}{2}}{r_1} \approx \frac{x}{\sqrt{r^2 + x^2}}$, так как по условию l очень мало.

Тогда $d\varphi = \frac{k\sigma r dr d\alpha l}{(r^2 + x^2) \sqrt{r^2 + x^2}}$ и результирующий потенциал в точке с координатой x : $\varphi = \int_0^{2\pi} d\alpha \int_R^\infty \frac{1}{2} \frac{k\sigma l x d(r^2 + x^2)}{(r^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sigma l x}{2\varepsilon_0 \sqrt{R^2 + x^2}}$.

$$\text{Проекция вектора напряженности } E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{\sigma l R^2}{2\varepsilon_0 (R^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Задача 16. Напряженность поля в некоторой области пространства задана функцией $\vec{E} = -a(x\vec{i} + y^2\vec{j} - 2z\vec{k})$. Определить объемную плотность зарядов, создающих поле.

Решение. Обратную задачу электростатики в данном случае рационально решать используя $\text{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$:

$$\text{div}\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}, \quad \text{div}\vec{E} = -a(1-2) = a, \quad \rho = \varepsilon_0 a.$$

Задача 17. Потенциал в некоторой области пространства определяется формулой $\varphi(x) = -\frac{ax^2}{2}$. Найти плотность зарядов $\rho(x)$, создающих это поле.

Решение. Используем уравнение Пуассона $\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$. Так как потенциал является функцией только от x , $\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}$.

Продифференцируем выражение для потенциала $\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -ax$, $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = -a$. Следовательно, $\rho = \varepsilon_0 a$.

6. ПРОВОДНИКИ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Классическая модель металлического незаряженного проводника – это в целом нейтральная система, состоящая из кристаллической решетки положительных ионов и свободных электронов, которые хаотически двигаются в поле кристаллической решетки подобно одноатомному электронно-молекулярному газу. Концентрация свободных электронов $n \sim (10^{28} - 10^{29}) \text{ м}^{-3}$. По содержанию задачи этой темы можно разделить на две группы:

I. Поле уединенного заряженного проводника.

Если проводник получил какой-либо заряд, то в течение $\sim 10^{-19}$ с происходит перераспределение свободных электронов и устанавливается такое равновесное распределение зарядов, что результирующая сила, действующая на каждый заряд, равна нулю.

Тогда при решении задач необходимо учитывать следующее:

1) напряженность результирующего поля внутри проводника равна нулю ($\vec{E} = 0$);

2) так как $\text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$, $\rho = 0$ и внутри проводника нет свободных избыточных зарядов, а полученный заряд располагается на поверхности проводника в слое толщиной порядка 10^{-10} м;

3) поскольку $\vec{E} = -\text{grad} \phi$, поверхность и объем проводника эквипотенциальны $\phi_s = \phi_v = \text{const}$;

4) линии напряженности поля вне проводника перпендикулярны его поверхности, модуль напряженности результирующего поля вблизи некоторой точки поверхности проводника $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$, где σ – поверхностная плотность зарядов в этой точке. Поверхность проводника любой формы можно представить как множество участков сферических поверхностей с различными радиусами кривизны. Плотность зарядов на поверхности заряженного проводника обратно пропорциональна радиусу кривизны $\sigma \sim \frac{1}{R}$.

II. Проводник находится во внешнем поле.

При помещении незаряженного проводника в электрическое поле происходит явление электростатической индукции – перераспределения свободных зарядов в проводнике до тех пор, пока устанавливается такое равновесное распределение зарядов, что результирующая сила, действующая на каждый заряд, равна нулю.

В результате этого явления:

- 1) на поверхности проводника появляются индуцированные заряды, суммарный заряд которых равен нулю;
- 2) внутри проводника результирующее поле равно нулю;
- 3) поверхность и объем проводника эквипотенциальны;
- 4) линии напряженности результирующего поля вне проводника перпендикулярны его поверхности.

Распределение индуцированных зарядов по поверхности проводника и результирующее поле, в общем случае, могут быть очень сложными. Для некоторых задач используется искусственный метод электрических изображений, который предполагает следующее:

- в соответствии с пунктами 1) – 4) и данными условия задачи качественно изображается результирующее поле индукционных и заданных зарядов;
- подбирается система точечных зарядов, результирующее поле которой в некоторой области совпадает с полем индукционных и заданных зарядов;
- согласно теореме единственности при совпадении полей задача о расчете характеристик поля имеет единственное решение. Поэтому проводник можно убрать, заменив его совокупностью точечных зарядов, которая называется электрическим изображением зарядов, создающих поле в поверхности проводника. Расчет искомых величин проводится для поля системы точечных зарядов.

Задача 18. Металлический шарик радиусом R имеет заряд q . Найти модуль результирующей силы, которая действует на заряд, расположенный на одной половине шарика.

Решение. Задача относится к группе I. Используя 2) и 4), можно заключить, что так как радиус кривизны всех точек поверхности одинаков, заряд распределен по поверхности равномерно с поверхностной плотностью $\sigma = \frac{q}{4\pi R^2}$. Точечный заряд dq , расположенный на малом элементе поверхности dS , находится в поле E_0 всех остальных зарядов, поэтому на него действует сила $dF = dqE_0 = \sigma dSE_0$.

На рис. 19 показаны векторы напряженности полей, создаваемых зарядом dq и всеми остальными зарядами внутри и вне

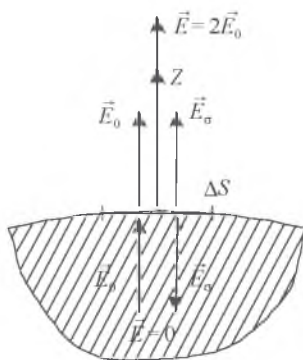


Рис. 19

проводника. Так как напряженность результирующего поля внутри проводника $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_\sigma = 0$, то модули

$$E_0 = E_\sigma = \frac{E}{2} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \text{ и } dF = dqE_0 = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} dS.$$

Задача 19. Незаряженная металлическая сфера имеет внутренний радиус $r_1 = 10$ см и внешний радиус $r_2 = 20$ см. Найти потенциал поля в центре сферы, если на расстоянии $a = 50$ мм от него помещен положительный точечный заряд $q = 2,0$ нКл.

Решение. Задача относится к группе II. Так как металлическая сфера находится в поле положительного точечного заряда, то вследствие электростатической индукции на ее внутренней поверхности появится индуцированный заряд q_1 , а на внешней поверхности – q_2 , причем $q_1 + q_2 = 0$, так как сфера была не заряжена.

Результирующий потенциал в любой точке поля будет определяться всеми зарядами.

Найдем заряд q_1 по теореме Остроградского – Гаусса: $\oiint \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$.

Для этого выберем замкнутую сферическую поверхность с центром, совпадающим с центром сферы, и радиусом $r_1 < r < r_2$, т. е. внутри металлической сферы.

Внутри проводника напряженность поля равна нулю, поэтому

$$\oiint \vec{E} d\vec{S} = 0 = \frac{q + q_1}{\varepsilon_0} \text{ и } q_1 = -q, \text{ а } q_2 = q.$$

Потенциал в любой точке внутри заряженного проводника равен потенциалу на его поверхности, поэтому результирующий потенциал в центре сферы

$$\varphi_0 = \frac{kq}{a} + \frac{kq_1}{r_1} + \frac{kq_2}{r_2} = \frac{kq}{a} - \frac{kq}{r_1} + \frac{kq}{r_2} = kq \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right), \quad \varphi_0 = 0,27 \text{ кВ.}$$

Задача 20. Положительный точечный заряд q находится на расстоянии h от безграничной проводящей плоскости. Определить: а) напряженность поля вблизи проводника; б) поверхностную плотность зарядов, индуцированных на плоскости, как функции расстояния r от основания перпендикуляра, опущенного из заряда на плоскость; в) потенциал поля в точке A , равноудаленной от заряда и плоскости на расстояние h , и в симметричной ей относительно плоскости точке B .

Решение. Задача относится к группе II, в соответствии с пунктами 1) – 4) можно заключить следующее:

- на проводящей плоскости в поле положительного точечного заряда индуцируется отрицательный заряд, но распределение зарядов не известно;
- так как плоскость безгранична (от $-\infty$ до $+\infty$) и эквипотенциальна, потенциал всех точек плоскости одинаков и равен $\varphi = 0$;
- линии напряженности результирующего поля точечного заряда и индуцированных зарядов перпендикулярны плоскости.

Качественно поле точечного заряда и индуцированных зарядов в объеме показано на рис. 20, а в плоском сечении на рис. 21.

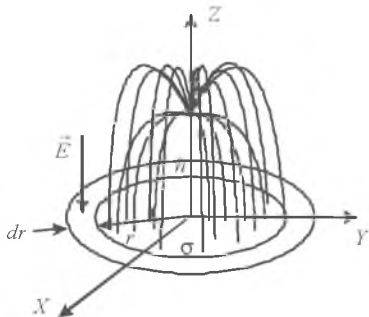


Рис. 20

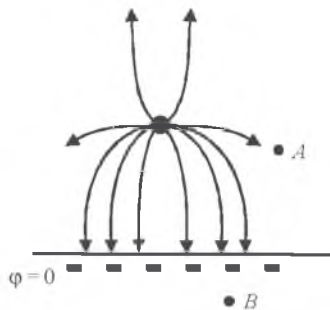


Рис. 21

Так как плотность линий напряженности определяется модулем вектора напряженности, который, в свою очередь, зависит от величины заряда, то это поле соответствует середине поля, созданного двумя точечными зарядами q и $-q$, расположенными на расстоянии $2h$ друг от друга. Положение проводящей плоскости соответствует эквипотенциальной поверхности, равноудаленной от этих точечных зарядов и имеющей потенциал $\varphi = 0$ соответственно. Отрицательный заряд $-q$ является симметричным изображению заряда $+q$ относительно проводящей плоскости (рис. 22).

Следовательно, напряженность поля возле плоскости равна результирующей напряженности поля двух точечных зарядов $\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-$ (рис. 23), модули этих векторов

$$E_+ = E_- = \frac{kq}{r_1^2},$$

$$\text{где } r_1^2 = r^2 + h^2; \quad E = 2E_+ \cos \alpha = \frac{2kq}{r^2 + h^2} \frac{h}{\sqrt{r^2 + h^2}}.$$

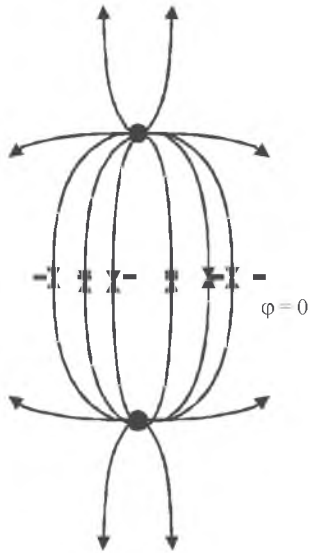


Рис. 22

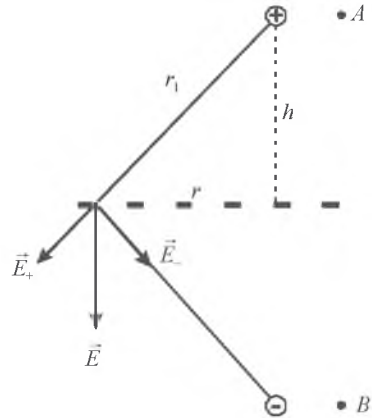


Рис. 23

Поверхностная плотность индуцированных на плоскости зарядов находится из соотношения $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$, $\sigma = \frac{\epsilon_0 2kq}{r^2 + h^2} \frac{h}{\sqrt{r^2 + h^2}} = \frac{qh}{2\pi(r^2 + h^2)^{\frac{3}{2}}}$.

Потенциал точки A как результирующий потенциал поля двух точечных зарядов равен

$$\varphi_A = \varphi_+ + \varphi_- = \frac{kq}{h} - \frac{kq}{\sqrt{h^2 + 4h^2}} = \frac{kq}{h} \left(1 - \frac{\sqrt{5}}{5} \right).$$

Поле точечного заряда и плоскости расположено над плоскостью. Под плоскостью поля нет, т. е. $E = 0$, поэтому потенциал любых точек пространства под плоскостью равен потенциалу плоскости и $\varphi = 0$.

Задача 21. Точечный заряд q находится между двумя проводящими взаимно перпендикулярными полуплоскостями на расстоянии L от каждой полуплоскости. Найти модуль вектора силы, действующей на заряд.

Решение. Задача относится к группе II. В соответствии с пунктами 1) – 4) можно заключить следующее:

- на проводящих полуплоскостях возникают индукционные заряды, распределение которых не известно. Так как заданы полуплоскости (т. е. уходят на ∞) и они эквипотенциальны, потенциал всех точек обеих полуплоскостей одинаков и равен $\varphi = 0$;

• линии напряженности результирующего поля точечного заряда и индуцированных зарядов перпендикулярны полуплоскостям. На рис. 24 показана качественная картина поля в плоском сечении (в случае положительного точечного заряда).

Система точечных зарядов, поле которых будет в этой области эквивалентно полю индуцированных зарядов и точечного заряда, показана на рис. 25. В данной задаче «изображением» точечного заряда в двух полуплоскостях являются два отрицательных и один положительный заряд, потому что только в этом случае на месте полуплоскостей будут расположены эквипотенциальные поверхности с $\varphi = 0$ (рис. 26).

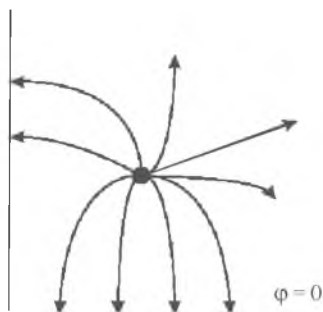


Рис. 24

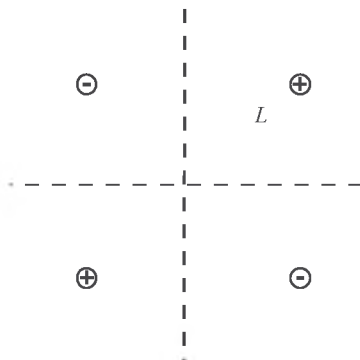


Рис. 25

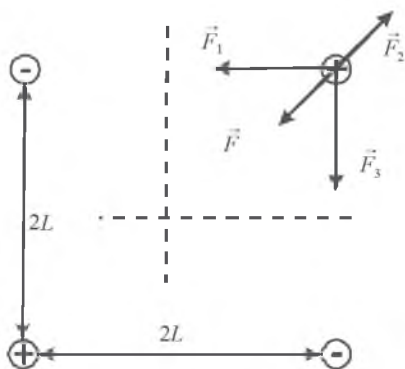


Рис. 26

В системе точечных зарядов искомая сила $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$, где модули сил: $F_1 = F_3 = \frac{kq^2}{4L^2}$, $F_2 = \frac{kq^2}{8L^2}$. Тогда $F = \frac{kq^2}{4L^2}\sqrt{2} - \frac{kq^2}{8L^2} = \frac{kq^2}{8L^2}(\sqrt{2} - 1)$.

7. ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В ДИЭЛЕКТРИКАХ

В диэлектриках источниками \vec{E} являются все электрические заряды – сторонние и связанные, поэтому теорема Остроградского – Гаусса оказывается бесполезной: $\oiint \vec{E} d\vec{S} = \frac{q_{\text{стор}} + q'}{\epsilon_0}$.

Для нахождения модуля вектора напряженности \vec{E} это затруднение можно обойти путем введения вектора электрического смещения \vec{D} , для которого в случае однородных изотропных диэлектриков справедливо соотношение $\vec{D} = \epsilon\epsilon_0\vec{E}$.

Поэтому в таких задачах расчет поля \vec{E} в диэлектриках обязательно начинают с расчета \vec{D} с помощью теоремы Остроградского – Гаусса в виде $\oiint \vec{D} d\vec{S} = q_{\text{стор}}$ (см. тему 3), а затем по указанному выше соотношению переходят к нахождению \vec{E} .

Задача 22. Сторонние заряды равномерно распределены с объемной плотностью ρ ($\rho > 0$) по шару радиусом R из однородного изотропного диэлектрика с проницаемостью ϵ . Найти модуль напряженности E электрического поля как функцию расстояния r от центра шара.

Решение. Вне шара, т. е. в области $r \geq R$, для нахождения модуля E_1 сначала нужно воспользоваться теоремой $\oiint \vec{D} d\vec{S} = q_{\text{стор}}$. Выбираем замкнутую поверхность в виде сферы радиусом r ($r > R$), центр которой совпадает с центром шара (рис. 27). Восстановим единичную внешнюю нормаль \vec{n} и найдем поток вектора электрического смещения как $\Phi_1 = D_1 4\pi r^2$.

Так как сторонний заряд заключен только в объеме шара, расчет величины заряда $q_{\text{внутр}}$ выполним как $q_{\text{внутр}} = \iiint \rho dV = \rho \frac{4}{3}\pi R^3$. Следовательно, верно следующее соотношение: $D_1 4\pi r^2 = \rho \frac{4}{3}\pi R^3$. Вне шара модуль векто-

ра D_1 как функция расстояния r от центра шара равен $D_1 = \frac{4\rho R^3}{3r^2}$, и, используя соотношение $E_1 = \frac{D_1}{\epsilon_0}$, получим модуль вектора $E_1 = \frac{4\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2}$.

Внутри шара, т. е. в области $r \leq R$, существенно присутствие диэлектрика, поэтому воспользуемся теоремой $\oiint \vec{D}_2 d\vec{S} = q_{\text{стор}}$. Выберем замкнутую поверхность в виде сферы, центр которой совпадает с центром системы $r \leq R$ (рис. 28), и найдем, что поток вектора D_2 численно равен $\Phi_2 = D_2 4\pi r^2$. Заряд только сторонний, заключенный внутри этой поверхности (заштрихован на рис. 28): $q_{\text{внутр. стор}} = \rho \frac{4}{3}\pi r^3$. Приравнивая эти выражения, получаем $\rho \frac{4}{3}\pi r^3 = D_2 4\pi r^2 \Rightarrow D_2 = \frac{\rho r}{3}$. Внутри шара модуль вектора напряженности электростатического поля как функция расстояния r от центра шара равен $E_2 = \frac{D_2}{\epsilon\epsilon_0} = \frac{\rho r}{3\epsilon\epsilon_0}$.

Для наглядного представления построим графики зависимости $E(r)$ и $D(r)$ (рис. 29). Заметим, что значение модуля вектора \vec{E} в точках на границе диэлектрик – вакуум имеет разные значения, так как источниками поля являются как сторонний заряд, так и связный, который появляется вследствие поляризации диэлектрика.

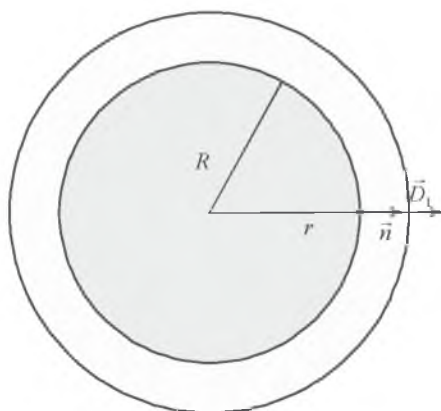


Рис. 27

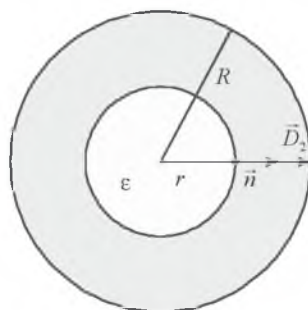


Рис. 28

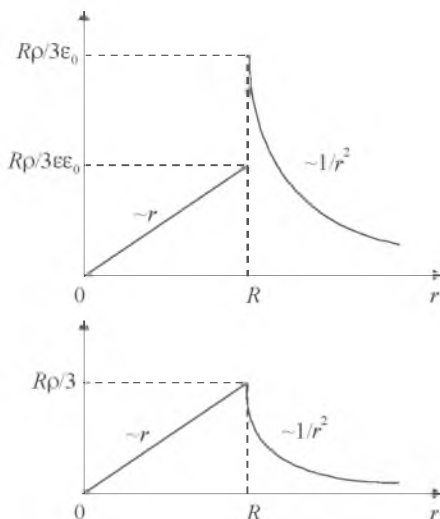


Рис. 29

Задача 23. Точечный сторонний заряд q находится в центре шара из однородного изотропного диэлектрика с диэлектрической проницаемостью ϵ . Найти модуль вектора поляризации \vec{P} как функцию расстояния r от центра шара, связанный заряд q' внутри сферы, радиус которой меньше радиуса шара.

Решение. Из теории известно, что для нахождения $q'_{\text{внутр}}$ можно применить теорему Остроградского – Гаусса к вектору \vec{P} следующим образом: $\oiint_S \vec{P} d\vec{S} = q'_{\text{внутр}}$, а для установления функции $P(r)$ использовать

взаимосвязь между векторами \vec{P} и \vec{E} для изотропных диэлектриков:

$$\vec{P} = (\epsilon - 1)\epsilon_0\vec{E}.$$

Но решение задачи следует начинать с нахождения модуля вектора \vec{D} в диэлектрике и вне его, а затем переходить к нахождению модулей векторов \vec{P} и \vec{E} .

Первоначально рассмотрим область внутри диэлектрического шара. Выберем замкнутую поверхность в виде сферы радиусом r ($r \leq R$), центр которой совпадает с центром системы (рис. 30), и по теореме

$\oiint \vec{D}_1 d\vec{S} = q_{\text{стор}}$ найдем $D_1 4\pi r^2 = q$, а затем по

формуле $E_1 = \frac{D_1}{\epsilon\epsilon_0}$ найдем $E_2 = \frac{q_{\text{стор}}}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2}$.

Используя связь векторов \vec{P} и \vec{E} , получим модуль вектора поляризации как функцию расстояния r от центра шара в области $0 < r \leq R$:

$$P_1 = (\epsilon - 1)\epsilon_0 E_1 = \frac{(\epsilon - 1)q_{\text{стор}}}{4\pi\epsilon r^2}$$

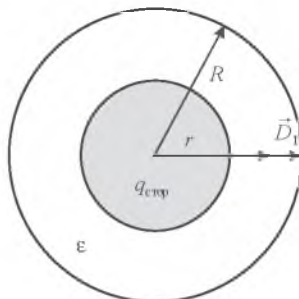


Рис. 30

Используя теорему Остроградского – Гаусса для вектора \vec{P} , получим способ расчета связанного поляризационного заряда, находящегося внутри сферы, радиусом $r \geq R$: $P_1 4\pi r^2 = -q'_{\text{внутр}}$. Тогда и

$$\frac{(\epsilon - 1)q_{\text{стор}}}{4\pi\epsilon r^2} = -q'_{\text{внутр}} \text{ и } -q'_{\text{внутр}} = \frac{(\epsilon - 1)q_{\text{стор}}}{\epsilon}$$

Рассмотрим область $r \geq R$. Для этой области находим $D_2 = \frac{q_{\text{стор}}}{4\pi r^2}$,

$E_2 = \frac{q_{\text{стор}}}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2}$ и $P_2 = \frac{(\epsilon - 1)q_{\text{стор}}}{4\pi r^2}$, учитывая отсутствие диэлектрика.

Задача 24. Точечный сторонний заряд q находится в центре сферического слоя неоднородного диэлектрика, проницаемость которого изменяется только в радиальном направлении по закону $\epsilon = \frac{\alpha}{r}$, где $\alpha = \text{const}$; r – расстояние от центра системы. Найти объемную плотность ρ' связанных зарядов как функцию расстояния r внутри слоя.

Решение. Воспользуемся теоремой Остроградского – Гаусса для вектора \vec{P} , предварительно выбрав замкнутую поверхность в виде сферы радиусом r , центр которой совпадает с центром системы. Таким образом, $P 4\pi r^2 = -q'$, где q' – связанный заряд внутри этой сферы. Записав дифференциал этого выражения, мы найдем dq' – связанный заряд в тонком сферическом слое, заключенный между сферами радиусом r и $r + dr$ (рис. 31): $4\pi d(r^2 P) = -dq'$. Считая объемную плотность связанных зарядов ρ' , можно найти $dq' = \rho' 4\pi r^2 dr$. Для нахождения модуля векто-

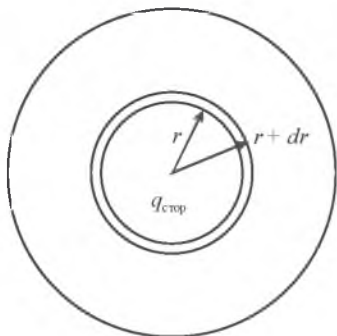


Рис. 31

ра \vec{P} действуем аналогично предыдущей задаче, только учтем, что $\varepsilon = \frac{\alpha}{r}$. Тогда $P = (\varepsilon - 1)\varepsilon_0 E = \frac{(\varepsilon - 1)}{\varepsilon} D = \frac{(\varepsilon - 1)q_{\text{стоп}}}{4\pi\varepsilon r^2}$. После соответствующих преобразований получим выражение $\rho'(r) = \frac{1}{4\pi\alpha} \frac{q_{\text{стоп}}}{r^2}$.

Однако данную задачу можно решить используя дифференциальное выражение теоремы Остроградского – Гаусса для вектора \vec{P} , т. е. $\text{div } \vec{P} = -\rho'$ или $\vec{\nabla} \vec{P} = -\rho'$, причем целесообразнее в этом случае дифференциальный векторный оператор $\vec{\nabla}$ задать в сферических координатах, так как модуль вектора \vec{P} является только функцией r :

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 P_r) = -\rho'(r).$$

После выполнения заданных операций, получим то же самое выражение: $\rho'(r) = \frac{1}{4\pi\alpha} \frac{q_{\text{стоп}}}{r^2}$.

8. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

В результате поляризации однородного изотропного диэлектрика на границе *диэлектрик – диэлектрик*, а также *диэлектрик – вакуум*, *диэлектрик – проводник* возникает поверхностный связанный заряд, который характеризуется поверхностной плотностью σ' .

Связь между вектором \vec{P} на границе раздела однородных диэлектриков с поверхностной плотностью заряда σ' устанавливается граничным условием $P_{2n} - P_{1n} = -\sigma'$, где P_{1n} и P_{2n} – проекции векторов \vec{P}_1 и \vec{P}_2 на внешние нормали \vec{n}_1 и \vec{n}_2 в точках 1 и 2 на границе соответственно (рис. 32).

Преломление силовых линий на границе двух диэлектриков также можно объяснить с помощью граничных условий для нормальных и тангенциальных составляющих векторов \vec{D} и \vec{E} : $E_{1\tau} = E_{2\tau}$, $\varepsilon_1 E_{1n} = \varepsilon_2 E_{2n}$, $D_{1n} = D_{2n}$ (при условии отсутствия на границе раздела свободных зарядов) (рис. 33).

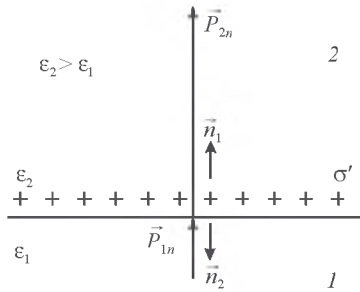


Рис. 32

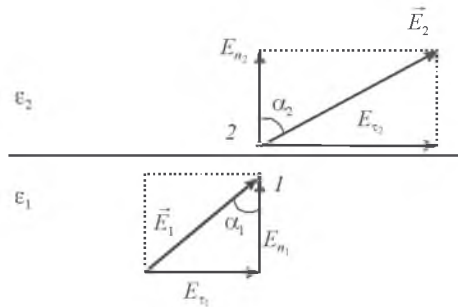


Рис. 33

Если на границе раздела двух однородных изотропных диэлектриков нет сторонних зарядов, то при переходе этой границы составляющие E_{τ} и D_n не изменяются, а составляющие E_n и D_{τ} претерпевают скачок, т. е. резкое изменение.

Граничными условиями называется связь между векторами (\vec{E} , \vec{D} , \vec{P}) поля по разные стороны границы двух диэлектриков с разными диэлектрическими проницаемостями (ϵ_1 , ϵ_2).

Во всех случаях граничные условия позволяют определить изменение векторов поля при переходе через границу двух диэлектриков (или в частном случае через границу *диэлектрик – вакуум*).

Задача 25. Сторонние заряды равномерно распределены с объемной плотностью $\rho > 0$ по шару из однородного изотропного диэлектрика с проницаемостью ϵ . Найдите поверхностную плотность связанных зарядов σ' на границе *диэлектрик – вакуум*.

Решение. Из теории известно граничное условие для вектора \vec{P} на границе двух изотропных диэлектриков: $P_{2n} - P_{1n} = -\sigma'$, где P_{1n} и P_{2n} – проекции вектора \vec{P} в точках 1 и 2 соответственно. В частности, как в задаче 24, если среда 2 – вакуум, то $P_{2n} = 0$, и условие приобретает более простой вид $P_{1n} = \sigma'$.

Для нахождения P_{1n} используем известное выражение $P_{1n} = (\epsilon - 1)\epsilon_0 E_{1n}$, где E_{1n} – проекция вектора \vec{E} на нормаль внутри диэлектрика вблизи его поверхности, т. е. в точке $r = R$.

Для нахождения E_{1n} используем связь $E_{1n} = \frac{D_{1n}}{\epsilon\epsilon_0}$, причем D_{1n} найдем по теореме Остроградского – Гаусса. Сначала определим модуль вектора \vec{D}_1 как функцию расстояния r от центра шара в области $r \leq R$ (см. рис. 28) по формуле $D_1 4\pi r^2 = \rho \frac{4}{3}\pi R^3$.

Устремив $r \rightarrow R$, получим выражение для $D_1 = \frac{\rho R}{3}$ на границе диэлектрик – вакуум. Следовательно, в этой точке $E_{1n} = \frac{\rho R}{3\epsilon\epsilon_0}$, а $P_{1n} = \frac{(\epsilon - 1)\rho R}{3\epsilon}$. Таким образом, поверхностная плотность связанного заряда

$$\sigma' = P_{1n} = \frac{(\epsilon - 1)\rho R}{3\epsilon}.$$

Задача 26. Вблизи точки 2 (см. рис. 33), находящейся на границе раздела двух изотропных диэлектриков с проницаемостями ϵ_1 и ϵ_2 соответственно, вектор напряженности \vec{E}_2 составляет с нормалью к границе угол α_2 . Найти соотношение $\frac{\text{tg}\alpha_1}{\text{tg}\alpha_2}$, где α_1 – угол, который составляет вектор напряженности поля \vec{E}_1 с нормалью \vec{n}_1 в точке 1.

Решение. Из рис. 33 имеем соотношения: $\text{tg}\alpha_1 = \frac{E_{1\tau}}{E_{1n}}$, $\text{tg}\alpha_2 = \frac{E_{2\tau}}{E_{2n}}$. Учитывая граничные условия $E_{1\tau} = E_{2\tau}$, $\epsilon_1 E_{1n} = \epsilon_2 E_{2n}$, получим $\frac{\text{tg}\alpha_1}{\text{tg}\alpha_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}$.

Задача 27. Внутри шара радиусом R , состоящего из однородного изотропного диэлектрика с проницаемостью ϵ , создано однородное элек-

трическое поле напряженностью \vec{E} . Найти максимальную поверхностную плотность связанных зарядов σ'_{\max} и полный связанный заряд q' одного знака.

Решение. Так как существует связь между векторами \vec{E} и \vec{P} , следовательно, в точке I на границе диэлектрик – вакуум $\vec{P}_1 = (\epsilon - 1)\epsilon_0\vec{E}$. Но заметим, что вектор \vec{P}_1 составляет с нормалью \vec{n} угол θ (рис. 34), поэтому $P_{1n} = P_1 \cos \theta = (\epsilon - 1)\epsilon_0 E \cos \theta$.

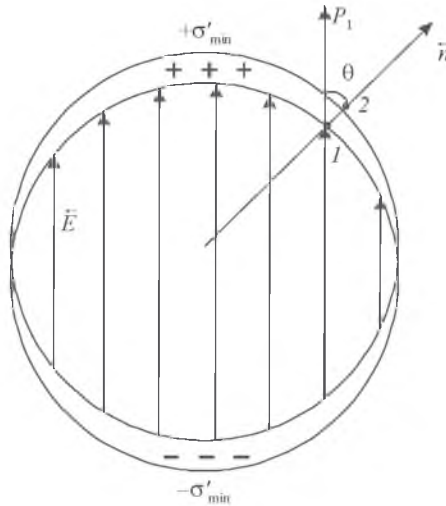


Рис. 34

Так как диэлектрик граничит с вакуумом, то $P_{2n} = 0$. Воспользуемся граничным условием $P_{2n} - P_{1n} = -\sigma'$ и получим выражение

$$\sigma'(\theta) = (\epsilon - 1)\epsilon_0 E \cos \theta$$

зависимости поверхностной плотности заряда σ' от угла θ . Следовательно, $\sigma'_{\max} = (\epsilon - 1)\epsilon_0 E$.

Объяснить эту формулу можно, представив поляризованный шар как результат малого сдвига всех положительных зарядов диэлектрика относительно всех отрицательных зарядов. Так как распределение связанного

заряда обладает симметрией, а заряд одного знака находится только на половине поверхности шара, вычислить его величину можно как

$$+q' = \iint_S \sigma' dS = (\epsilon - 1)\epsilon_0 ER^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi,$$

где величина dS выражена в сферической системе координат как $dS = R^2 \sin\theta d\theta d\varphi$, таким образом, $+q' = (\epsilon - 1)\epsilon_0 E\pi R^2$.

9. ЭЛЕКТРОЕМКОСТЬ. ВЗАИМНАЯ ЕМКОСТЬ

Электроемкостью уединенного проводника принято называть величину $C = \frac{q}{\varphi}$, где q – заряд проводника; φ – потенциал его поверхности (при условии, что на бесконечности потенциал равен нулю).

Конденсатором называется совокупность двух любых проводников с одинаковыми по абсолютному значению, но противоположными по знаку зарядами. Конденсатор может быть представлен в виде:

- 1) концентрических сфер разных радиусов;
- 2) коаксиальных цилиндров разных радиусов;
- 3) совокупности параллельных плоских пластин.

Электроемкость конденсатора определяется соотношением $C = \frac{q}{U}$, где q – заряд на обкладках; U – напряжение (или разность потенциалов) между обкладками конденсатора. Электроемкость конденсатора зависит только от геометрической формы и размеров обкладок, их взаимного расположения и диэлектрической проницаемости среды между ними.

Задача 28. Найти емкость шарового проводника радиусом R_1 , окруженного прилегающим к нему концентрическим слоем диэлектрика с проницаемостью ϵ , если радиус внешней поверхности диэлектрика R_2 .

Решение. Мысленно зарядим проводник сторонним зарядом q (рис. 35). Чтобы найти потенциал φ , возникший при этом на поверхности провод-

ника (напомним, что при таком условии поверхность проводника эквипотенциальна), воспользуемся выражением

$$\varphi_{R_1} - \varphi_{\infty} = \int_{R_1}^{\infty} \vec{E} d\vec{r} = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E}_1 d\vec{r} + \int_{R_2}^{\infty} \vec{E}_2 d\vec{r},$$

где \vec{E}_1 – значение вектора напряженности поля в диэлектрическом слое в области $R_1 \leq r \leq R_2$; \vec{E}_2 – значение вектора напряженности поля в вакууме в области $r \geq R_2$, $\varphi_{\infty} = 0$; $d\vec{r}$ – элемент пути интегрирования.

Так как величина потенциала не будет зависеть от выбора пути интегрирования, следует его выбрать так, чтобы выполнялись условия $\vec{E}_1 \parallel d\vec{r}$, $\vec{E}_2 \parallel d\vec{r}$.

Далее решение задачи требует нахождения значения вектора напряженности \vec{E}_1 . Как было показано ранее, расчет начнем с нахождения величины вектора \vec{D}_1 по теореме Остроградского – Гаусса:

$$D_1 4\pi r^2 = q \Rightarrow D_1 = \frac{q}{4\pi r^2},$$

а следовательно, $E_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2}$ при $R_1 \leq r \leq R_2$.

Расчет величины \vec{E}_2 произведем аналогично в области $r \geq R_2$. Получим $D_2 = \frac{q}{4\pi r^2}$ и $E_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$.

Подставляя данные выражения в формулу для расчета потенциала, получим

$$\varphi = \int_{R_1}^{R_2} \frac{q}{4\pi\epsilon\epsilon_0 r^2} dr + \int_{R_2}^{\infty} \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\left(\frac{1}{\epsilon R_1} - \frac{1}{\epsilon R_2} \right) + \frac{1}{R_1} \right].$$

В итоге емкость уединенного проводника равна

$$C = \frac{4\pi\epsilon\epsilon_0 R_1}{1 + (\epsilon - 1) \frac{R_1}{R_2}}.$$

На основании полученного выражения следует сделать вывод, что емкость уединенного проводника зависит только от его размеров и его формы, а также от диэлектрической проницаемости окружающей среды.

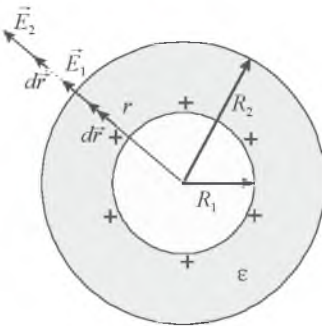


Рис. 35

Задача 29. Зазор между обкладками плоского конденсатора заполнен изотропным диэлектриком, проницаемость которого изменяется в перпендикулярном обкладкам направлении по линейному закону от ε_1 до ε_2 (причем $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$), площадь каждой обкладки S , расстояние между ними d (рис. 36). Определить емкость плоского конденсатора.

Решение. Введем ось OX , начало совместим с нижней пластиной и направим так, как показано на рис. 36. Тогда согласно условию можно записать, что диэлектрическая проницаемость внутри диэлектрика изменяется по закону $\varepsilon = \varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{d}x$.

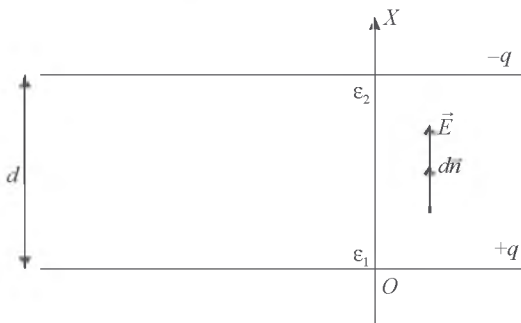


Рис. 36

Мысленно зарядим конденсатор (поместим на обкладки заряды $+q$ и $-q$ соответственно). В результате между обкладками возникает напряжение U . Емкость конденсатора численно равна $C = \frac{q}{U}$. Для нахождения напряжения между обкладками по формуле $U = \int_0^d \vec{E} d\vec{x}$ необходимо определить напряженность поля E .

Используя теорему Остроградского – Гаусса и принцип суперпозиции для вектора \vec{D} , получим $D = \frac{q}{S}$, а затем $E = \frac{q}{\varepsilon_0 \left(\varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{d}x \right) S}$. Следовательно, после интегрирования получим

$$U = \frac{q}{\varepsilon_0 S \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{d}} \ln \left(1 + \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1} \right).$$

Тогда емкость такого плоского конденсатора определяется $C = \frac{\epsilon_0 S (\epsilon_2 - \epsilon_1)}{d \ln\left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}\right)}$. Метод решения задачи универсальный, т. е. подходит

для решения аналогичных задач.

Задача 30. Найти емкость единицы длины цилиндрического конденсатора, радиусы обкладок которого равны R_1 и R_2 ($R_1 < R_2$), заполненного диэлектриком, проницаемость которого зависит от расстояния до центра как $\epsilon = \frac{\alpha}{r}$, где α – постоянная; r – расстояние от оси системы. Краевыми эффектами пренебречь.

Решение. Мысленно зарядим обкладки конденсатора одинаковыми по модулю, но противоположными по знаку зарядами так, что на единицу длины приходится заряд $+\lambda$ и $-\lambda$. Тогда на единице длины конденсатора h заряд равен $\pm q = \pm \lambda h$. И по определению емкость такой системы численно равна $C = \frac{q}{U}$. Напряжение U между обкладками можно

определить как $U = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} d\vec{r}$.

Из соображения осевой симметрии следует, что поле между обкладками имеет радиальный характер, т. е. вектор \vec{E} в каждой точке перпендикулярен оси цилиндрического конденсатора, а модуль вектора \vec{E} зависит только от расстояния r до оси. Поэтому, учитывая присутствие диэлектрика между пластинами, применим теорему Остроградского – Гаусса для вектора \vec{D} , выбрав замкнутую цилиндрическую поверхность радиусом r ($R_1 < r < R_2$) и высотой h (рис. 37).

Имеем $D 2\pi r h = \lambda h$. Учитывая зависимость $\epsilon = \frac{\alpha}{r}$ и связь между векторами \vec{D} и \vec{E} , получим выражение $E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\alpha}$. Тогда напряжение на обкладках конденсатора

$$U = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\alpha} dr = \frac{\lambda(R_2 - R_1)}{2\pi\epsilon_0\alpha}.$$

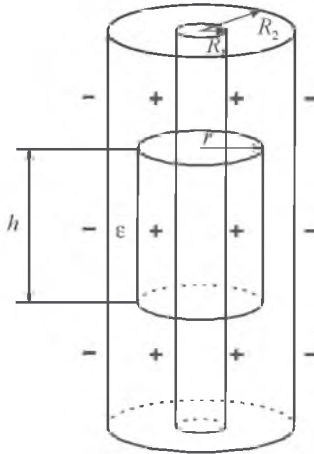


Рис. 37

Емкость единицы длины такого цилиндрического конденсатора равна $C = 2\pi\epsilon_0\alpha(R_2 - R_1)$.

Задача 31. Определить взаимную емкость системы, которая состоит из металлического шарика радиусом R и безграничной проводящей плоскости, отстоящей от центра шарика на расстоянии l , $l \gg a$.

Решение. Мысленно зарядим шарик зарядом $+q$, вследствие явления электростатической индукции на поверхности проводящей пластины появится нескомпенсированный отрицательный индуцированный заряд, распределенный неравномерно по поверхности пластины, величина которого равна $-q$.

Поэтому результирующее поле определяется как суперпозиция внешнего поля заряженного шарика и поля индуцированных зарядов на плоскости. Воспользуемся методом изображений, т. е. введем заряженный шарик-изображение $q'_{\text{изобр}} = -q$ вместо индуцированной плоскости, расположенный по другую сторону плоскости на таком же расстоянии l от нее. Только надо иметь в виду, что при этом методе поле рассматривается только в полупространстве, заключенном между проводящей плоскостью и шариком с зарядом $+q$.

Определим взаимную емкость системы проводников (шарика и безграничной плоскости) как $C = \frac{q}{\phi_1 - \phi_2}$, где ϕ_1 и ϕ_2 соответствующие потенциалы в точках 1 и 2 (рис. 38).

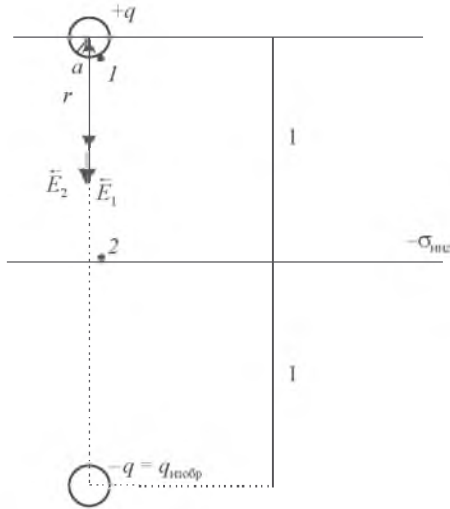


Рис. 38

Для расчета разности потенциалов используем выражение

$$\Phi_1 - \Phi_2 = \int_R^l \vec{E} d\vec{r},$$

где \vec{E} – вектор напряженности результирующего поля в области между точками 1 и 2.

По принципу суперпозиции $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$, где \vec{E}_1 – вектор напряженности поля, созданного заряженным шаром, а \vec{E}_2 – вектор напряженности поля, созданного шариком-изображением соответственно. Модули векторов \vec{E}_1 и \vec{E}_2 как функции расстояния r от центра шарика численно равны:

$$E_1 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad E_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 (2l-r)^2}.$$

Учитывая сонаправленность векторов \vec{E}_1 и \vec{E}_2 , получим, что модуль результирующего поля равен

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{(2l-r)^2} \right),$$

и, полагая $l \gg R$, выполнив интегрирование, получим

$$\Phi_1 - \Phi_2 = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}.$$

Следовательно, взаимная емкость этой системы проводников (при условии $l \gg R$) численно равна $C = 4\pi\epsilon_0 R$ и зависит только от формы и размеров проводников и их взаиморасположения.

10. ЭНЕРГИЯ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЗАРЯДОВ. ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Задача 32. Определить суммарную энергию взаимодействия точечных зарядов, расположенных в вершинах квадрата со стороной a , в системе, указанной на рис. 39.

Решение. Из теории известно, что энергия взаимодействия системы, состоящей из n точечных зарядов определяется формулой $W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \Phi_i$, где q_i – i -й заряд системы; Φ_i – потенциал, создаваемый в месте нахождения i -го заряда всеми остальными зарядами системы.

Воспользовавшись этим выражением, получим

$$W = \frac{1}{2} \left[q_1 \left(\frac{(-q_2)}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{q_3}{4\pi\epsilon_0 a\sqrt{2}} + \frac{(-q_4)}{4\pi\epsilon_0 a} \right) + (-q_2) \left(\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{q_3}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{(-q_4)}{4\pi\epsilon_0 a\sqrt{2}} \right) \right] + \left[q_3 \left(\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 a\sqrt{2}} + \frac{(-q_2)}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{(-q_4)}{4\pi\epsilon_0 a} \right) + (-q_4) \left(\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 a} + \frac{(-q_2)}{4\pi\epsilon_0 a\sqrt{2}} + \frac{q_3}{4\pi\epsilon_0 a} \right) \right].$$

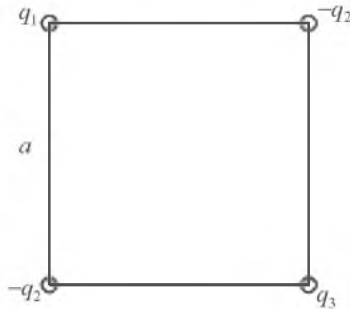


Рис. 39

После преобразования, учитывая, что $q_1 = |q_2| = q_3 = |q_4| = q$, получим

$$W = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 a} (\sqrt{2} - 4).$$

Задача 33. Диэлектрический изотропный шар радиусом R и проницаемостью ϵ равномерно заряжен сторонним зарядом с объемной плотностью ρ (рис. 40). Сфера какого радиуса a делит шар на две части с равными энергиями?

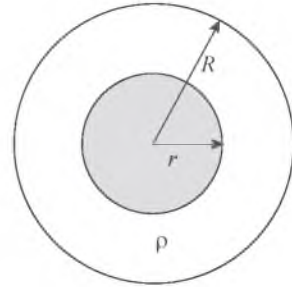


Рис. 40

Решение. Из теории известно, что в случае изотропного диэлектрика энергию W , локализованную в поле, можно выразить через напряженность E как $W = \iiint_V w dV$, где $w = \frac{\epsilon\epsilon_0 E^2}{2}$ – объемная плотность энергии,

распределенная в пространстве. Внутри диэлектрического шара, т. е. в области $r < R$, выберем замкнутую сферическую поверхность, центр которой совпадает с центром шара, и определим модуль \vec{D} по теореме Остроградского – Гаусса: $D4\pi r^2 = \rho \frac{4}{3}\pi r^3$, а модуль \vec{E} как функцию расстояния r от центра шара: $E = \frac{\rho r}{3\epsilon\epsilon_0}$.

Рассчитаем энергию W_1 в некоторой области шара, которая ограничена сферой искомого радиуса a (см. рис. 40), а затем энергию W_2 в оставшейся части диэлектрического шара:

$$W_1 = \int_0^a \frac{\epsilon\epsilon_0}{2} \left(\frac{\rho r}{3\epsilon\epsilon_0} \right)^2 4\pi r^2 dr = \frac{2\pi\rho^2 a^5}{45\epsilon\epsilon_0},$$

$$W_2 = \int_a^R \frac{\epsilon\epsilon_0}{2} \left(\frac{\rho r}{3\epsilon\epsilon_0} \right)^2 4\pi r^2 dr = \frac{2\pi\rho^2 (R^5 - a^5)}{45\epsilon\epsilon_0}.$$

Согласно условию задачи $W_1 = W_2$, следовательно, $a = \frac{R}{\sqrt[5]{2}} \approx 0,87R$.

Задача 34. Сферическая проводящая оболочка заряжена равномерно с поверхностной плотностью σ . Найти модуль электрической силы, действующей на единицу поверхности оболочки.

Решение. Следует помнить важный результат, полученный теоретически и имеющий общий характер как в жидком, так и в газообразном диэлектрике. Оказывается, поверхностная плотность силы $F_{\text{ед}}$ (т. е. сила на единицу поверхности), действующая на проводник, равна объемной плотности электрической энергии вблизи поверхности проводника:

$$F_{\text{ед}} = w = \frac{\vec{E}\vec{D}}{2} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 E^2}{2}.$$

Направлена эта сила всегда по нормали к поверхности, причем наружу проводника (стремясь его растянуть), независимо от знака поверхностного заряда. Таким образом, решение задачи сводится к нахождению плотности электрической энергии, локализованной в поле вблизи поверхности сферической оболочки.

Используя теорему Остроградского – Гаусса, получим $E(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$,

где $r > R$ оболочки, или $E(r) = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 r^2}$, условно полагая $\varepsilon = 1$. Объемная

плотность электрической энергии, локализованная в поле как функция расстояния r от центра сферической оболочки, равна $w(r) = \frac{\sigma^2 R^4}{2\varepsilon_0 r^4}$. То-

гда вблизи поверхности оболочки (где $r = R$) $w(R) = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$. Из вышеска-

занного следует, что модуль силы, действующей на единицу поверхности оболочки, равен $F_{\text{ед}} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0}$.

Задача 35. Точечный заряд q находится на расстоянии l от безграничной проводящей плоскости. Найти собственную энергию зарядов, индуцированных на плоскости.

Решение. Собственная энергия индуцированных зарядов – это энергия взаимодействия друг с другом элементов индуцированного заряда, появившегося на плоскости вследствие явления электростатической индукции.

Введем $W = \frac{1}{2} \int \sigma(x)\varphi(x)dS$, где $\sigma(x)$ – плотность индуцированных зарядов как функция расстояния x ; $\varphi(x)$ – потенциал, который создают на пластине только индуцированные заряды, как функция расстояния x от основания перпендикуляра, опущенного на плоскость из точки нахождения заряда q (рис. 41).

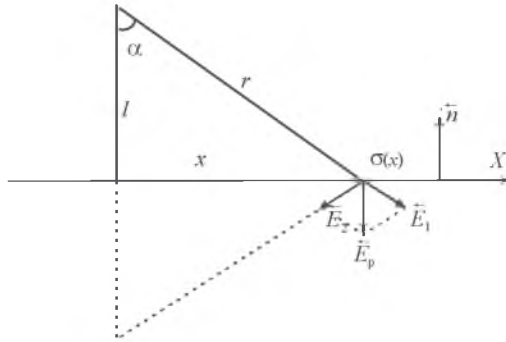


Рис. 41

Для нахождения $\varphi(x)$ воспользуемся методом изображений, тогда сможем утверждать, что потенциал, созданный в этой точке только индуцированными зарядами, равен потенциалу, который создает в этой точке заряд-изображение $-q$: $\varphi(x) = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{l^2 + x^2}}$.

Для нахождения $\sigma(x)$ воспользуемся формулой, которая устанавливает связь между поверхностной плотностью зарядов на поверхности проводника с напряженностью электрического поля вблизи проводника как $\sigma = \epsilon_0 E_n$, где E_n – проекции результирующей напряженности на внешнюю нормаль вблизи проводника в точке на расстоянии x от основания перпендикуляра, опущенного на поверхность из точки, где находится заряд q .

Воспользовавшись методом изображений и принципом суперпозиции, учитывая, что $E_1 = E_2 = E$, получим

$$E_p(x) = 2E \cos \alpha = 2 \frac{q}{4\pi\epsilon_0 (l^2 + x^2)} \frac{l}{\sqrt{l^2 + x^2}}$$

Следует обратить внимание на направление вектора \vec{E}_p , так как его проекция на внешнюю нормаль \vec{n} будет отрицательной.

Значит, $\sigma(x) = \frac{-ql}{2\pi(l^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}$, где знак « \rightarrow » показывает, что индуцированный заряд имеет противоположный знак заряду $+q$.

Собственную энергию индуцированных зарядов рассчитаем по формуле

$$W_{\text{собс}} = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{-ql}{2\pi(l^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{l^2 + x^2}} 2\pi x dx = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 l}.$$

11. ЗАКОНЫ ПОСТОЯННОГО ТОКА. РАСЧЕТ СОПРОТИВЛЕНИЯ СРЕДЫ. КВАЗИСТАЦИОНАРНЫЕ ТОКИ

Законы постоянного тока в интегральной форме или классические законы Ома и Джоуля – Ленца, $I = \frac{U}{R}$ и $Q = I^2 R t$, сформулированы на основе экспериментальных измерений при работе в установившемся режиме цепи, подключенной к источнику постоянного напряжения.

При замыкании (размыкании) цепи на протяжении какого-то времени возникает (замедляется) направленное движение электронов, т. е. изменяется сила тока. При прохождении тока происходит нагревание проводников, при котором изменяется их сопротивление. Это происходит до установления теплового равновесия, т. е. сколько тепла выделяется по закону Джоуля – Ленца в проводнике, столько же уходит в окружающую среду.

В установившемся режиме сопротивления проводников (среды) и сила тока во всех участках цепи остаются постоянными, т. е. не зависят от времени.

Законы последовательного и параллельного соединений проводников сформулированы на основе экспериментальных измерений при установившемся режиме работы цепей, подключенных к постоянному напряжению.

Законы постоянного тока в дифференциальной форме $\vec{j} = \frac{\vec{E}}{\rho} = \lambda \vec{E}$ и $w = j^2 \rho = \lambda E^2 = \vec{j} \vec{E}$ не содержат дифференциалов (производных), а называются так потому, что устанавливают связь между локальными величинами, характеризующими точку внутри проводника.

В такой локальной форме эти законы могут быть применены к любым проводникам вне зависимости от их формы, однородности, а также причин, возбуждающих ток.

В реальных цепях токи чаще бывают нестационарными (переменными), чем постоянными (стационарными). Для расчета некоторых параметров непостоянного тока применяются законы постоянного тока, если ток квазистационарный (как бы стационарный).

Квазистационарным называется такой нестационарный ток, мгновенные значения которого практически одинаковы на всех участках цепи. Это возможно, если время изменения его характеристик значительно больше, чем время установления электрического равновесия в цепи, которое определяется скоростью распространения по цепи электромагнитного поля $V \approx c \approx 3 \cdot 10^8$ м/с.

Задачи на расчет сопротивления можно разделить на две группы. К *первой группе* относятся задачи по расчету цепей со смешанным сопротивлением, в которых заданы сопротивления отдельных участков (локализованные сопротивления). Для решения многих из них используется метод эквивалентных схем, предусматривающий следующие действия:

1) в цепи находятся участки чисто последовательного или чисто параллельного соединения, их общее сопротивление рассчитывается по

формулам: $R_0 = \sum_i R_i$ – для последовательного соединения, $\frac{1}{R_0} = \sum_i \frac{1}{R_i}$ –

для параллельного соединения;

2) если схема сложная и зрительно участки чисто последовательного или чисто параллельного соединения трудно выделить, то необходимо проанализировать токи и изменение потенциала на различных участках цепи. При параллельном соединении разность потенциалов (напряжение) на участках одинакова, а токи обратно пропорциональны сопротивлениям. При последовательном соединении через все сопротивления протекает один и тот же ток, а разность потенциалов зависит от величины сопротивления $\varphi_1 - \varphi_2 = IR$. Если две точки цепи имеют одинаковые потенциалы, то ток между двумя этими точками не течет, а сопротивление этого участка при расчете общего сопротивления не учитывается;

3) в исходной схеме рассчитанные участки заменяются их общими сопротивлениями, т. е. получается эквивалентная (равноценная), но упрощенная схема;

4) эти действия повторяются до полного расчета сопротивления цепи.

К *второй группе* относятся задачи, в которых необходимо рассчитать сопротивление среды. Для расчета таких задач используются два метода. Первый метод предполагает следующие действия:

1) среда рассматривается как система таких малых объемов с постоянным удельным сопротивлением, в которых линии стационарного электрического поля или вектор плотности тока перпендикулярны граням. В этом случае сопротивление такого малого объема можно рассчитывать по формуле тонкого цилиндрического проводника $dR = \frac{\rho dl}{ds}$;

2) затем рассчитывается сопротивление для последовательно или параллельно соединенных соответствующих dR и общее сопротивление.

Второй метод предполагает использование закона Ома в интегральной форме $R = \frac{U}{I}$ и формул для расчета напряжения $U = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l}$ и силы тока $I = \iint \vec{j} d\vec{S}$.

Задача 36. Найти сопротивление проволочного каркаса (рис. 42), имеющего форму куба при включении его в цепь между точками 1–3, если сопротивление каждого ребра каркаса равно R .

Решение. Так как цепь сложная, то анализируем распределение токов и потенциалов. Пусть, например, в точку 1 ток входит, а из точки 3 ток выходит. В точке 1 ток разветвляется на три тока, два из которых равны $I_{12} = I_{14}$, так как сопротивления ребер одинаковы. По закону Ома $\varphi_1 - \varphi_2 = I_{12}R$ и $\varphi_2 = \varphi_1 - I_{12}R$, аналогично $\varphi_4 = \varphi_1 - I_{14}R$, и следовательно, $\varphi_2 = \varphi_4$, эти точки можно соединить. Значит, ребра 1–2 и 1–4 включены параллельно, а также ребра 2–3 и 4–3 соединены параллельно. Так как сопротивления ребер 1–2 и 2–3 равны, то $\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_3)$ и $\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi_3}{2}$.

Ток I_{15} расходится в точке 5 по двум одинаковым ребрам, т. е. токи $I_{56} = I_{58}$, тогда $\varphi_6 = \varphi_8$, эти точки можно соединить. Значит, ребра 5–6 и 5–8 включены параллельно, а также параллельно включены ребра 6–7 и 8–7. Так как сопротивление участка 1–5–6 равно сопротивлению участка 6(8)–7–3, $\varphi_1 - \varphi_6 = \frac{1}{2}(\varphi_1 - \varphi_3)$ и $\varphi_6 = \frac{\varphi_1 + \varphi_3}{2}$.

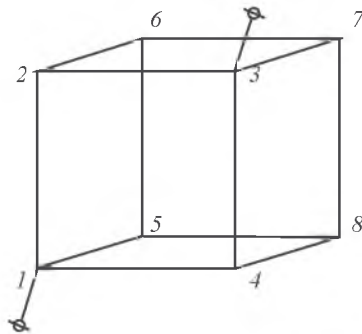


Рис. 42

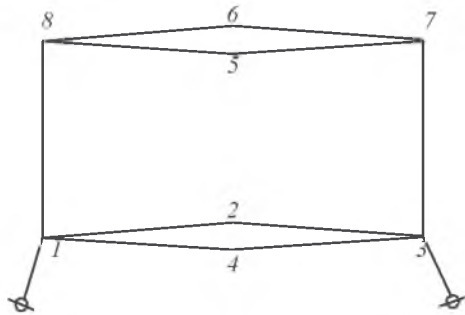


Рис. 43

Следовательно, потенциалы $\varphi_2 = \varphi_6$ и $\varphi_4 = \varphi_8$. Так как для протекания тока необходима разность потенциалов, по ребрам 2–6 и 4–8, соединяющим эти точки, ток не течет, и эти ребра не вносят вклад в общее сопротивление.

Перерисуем схему с учетом сделанных выводов. У куба 12 ребер, на рис. 43 изображено 10 ребер, а ребра 2–6 и 4–8 не показаны, так как ток по ним не течет.

Это первая эквивалентная схема. Сопротивление параллельных участков

$$\frac{1}{R_{12}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R} = \frac{2}{R}, \quad R_{12} = \frac{R}{2}.$$

Аналогично $R_{23} = R_{56} = R_{67} = \frac{R}{2}$.

На рис. 44 вторая эквивалентная схема из двух параллельных ветвей 1–5–7–3 и 1–2–4–3, на которой показано сопротивление всех участков. В ветви 1–5–7–3 все сопротивления включены последовательно, поэтому $R_{1573} = 3R$. Сопротивление ветви 1–3 равно $R_{1243} = R$. Общее сопротивление цепи рассчитываем по формуле для параллельного соединения

$$\frac{1}{R_0} = \frac{1}{3R} + \frac{1}{R} = \frac{4}{3R}, \quad R_0 = \frac{3R}{4}.$$

Задача 37. Пространство между двумя проводящими концентрическими сферами, радиусы которых a и b ($a < b$), заполнено однородной слабо проводящей средой. Емкость такой системы равна C . Найти удельное сопротивление среды, если разность потенциалов между сферами, отключенными от внешнего напряжения, уменьшается в η раз за время Δt .

Решение. Уменьшение разности потенциалов между сферами объясняется тем, что среда является проводящей, т. е. через нее с одной сферы на другую движутся заряды или протекает ток. Так как среда слабо проводящая (имеет большое сопротивление), через нее в единицу времени проходит очень малый заряд и напряжение между сферами изменяется медленно. В этих условиях ток можно считать квазистационарным.

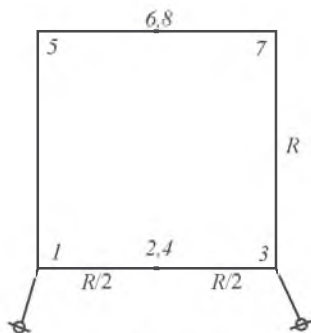


Рис. 44

Тогда мгновенное напряжение (мгновенная разность потенциалов) между сферами определяет мгновенный ток через всю среду по закону Ома $i_t = \frac{U_t}{R}$, где R – общее сопротивление среды, которое зависит и от искомого удельного сопротивления ρ .

Найдем общее сопротивление цепи, используя соотношения $U_t = \frac{q_t}{C}$ и $i_t = -\frac{dq}{dt}$, где знак « \leftrightarrow » соответствует убыли заряда на сферах.

Подставим в закон Ома $-\frac{dq}{dt} = \frac{q_t}{RC}$, разделим переменные $\frac{dq}{q_t} = -\frac{dt}{RC}$,

проинтегрируем $\int_{q_0}^{q_t} \frac{dq}{q_t} = -\int_0^t \frac{dt}{RC}$, найдем зависимость заряда на сферах от

времени $q_t = q_0 e^{-\frac{t}{RC}}$, где $q_0 = CU_0$ – заряд конденсатора в начальный момент времени; U_0 – начальное напряжение (начальная разность потенциалов) между сферами.

Так как емкость конденсатора постоянна и задана, из соотношения $U_t = \frac{q_t}{C}$ следует зависимость напряжения от времени $U_t = U_0 e^{-\frac{t}{RC}}$.

По условию $\eta = \frac{U_0}{U_{\Delta t}} = e^{\frac{\Delta t}{RC}}$, отсюда $\ln \eta = \frac{\Delta t}{CR}$ и $R = \frac{\Delta t}{C \ln \eta}$.

Найдем общее сопротивление среды по первому методу, представив среду как систему последовательно и параллельно соединенных сопротивлений.

Пусть внутренняя сфера заряжена положительно, а внешняя отрицательно, и заряды будут двигаться коллинеарно линиям поля (рис. 45).

Выделим тонкий сферический слой, центр которого совпадает с центром сфер, радиусом r и малой толщиной dr . Этот сферический слой можно представить как систему тонких проводников длиной dr , площадью сечения dS , включенных параллельно друг другу. В каждом таком тонком цилиндрическом проводнике линии электрического поля перпендикулярны сечениям, а модуль напряженности практически не изменяется.

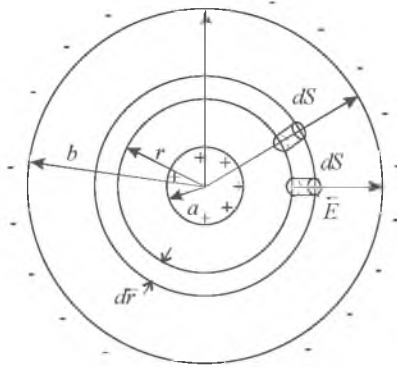


Рис. 45

Тогда сопротивление такого малого проводника $dR_1 = \frac{\rho dr}{dS}$; общее сопротивление всех параллельно включенных тонких проводников, образующих сферический слой, $\frac{1}{dR} = \sum_i \frac{1}{dR_{1i}} = \sum_i \frac{dS_i}{\rho dr} = \frac{1}{\rho dr} \sum_i dS_i = \frac{dS}{\rho dr}$, где $dS = 4\pi r^2$ – площадь поверхности тонкого сферического слоя.

Общее сопротивление сферического слоя $dR = \frac{\rho dr}{4\pi r^2}$. Всю проводящую среду можно представить как набор таких сферических слоев, включенных последовательно. Тогда общее сопротивление среды

$$R = \sum dR = \int_a^b \frac{\rho dr}{4\pi r^2} = -\frac{\rho}{4\pi} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right) = \frac{\rho(b-a)}{4\pi ba}.$$

Подставим в выражение для общего сопротивления:

$$R = \frac{\rho(b-a)}{4\pi ba} = \frac{\Delta t}{C \ln \eta}, \quad \rho = \frac{4\pi ba \Delta t}{C \ln \eta(b-a)}.$$

Задача 38. Два длинных параллельных провода находятся в слабо проводящей среде с удельным сопротивлением ρ . Расстояния между осями проводов l , радиус сечения каждого провода a . Найти для случая $a \ll l$ плотность тока в точке, равноудаленной от осей проводов на расстояние r , если разность потенциалов между проводами U , и сопротивление среды на единицу длины проводов.

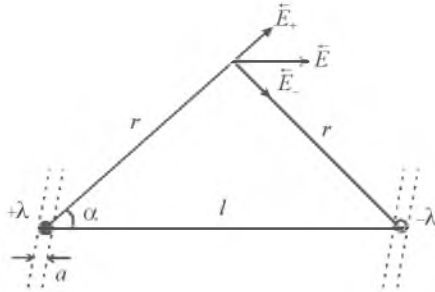


Рис. 46

Решение. Как и в задаче 37, ток можно считать квазистационарным. Тогда плотность тока в любой точке можно определить по закону Ома в дифференциальной форме $\vec{j} = \frac{\vec{E}}{\rho}$, где \vec{E} – напряженность результирующего поля в данной точке. Так как провода длинные и по условию расстояние между их осями $l \gg a$, можно считать, что они заряжены равномерно с линейной плотностью $+\lambda$ и $-\lambda$, а результирующее поле по принципу суперпозиции $\vec{E} = \vec{E}_+ + \vec{E}_-$ (рис. 46).

Так как искомая точка равноудалена от осей проводов, $E_+ = E_-$ и модуль плотности тока $j = \frac{1}{\rho} 2E_+ \cos \alpha$, где $\cos \alpha = \frac{l}{2r}$.

Напряженность поля нити найдем по теореме Остроградского – Гаусса $\oiint \vec{E} d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$. В качестве замкнутой поверхности выберем поверхность прямого цилиндра радиусом r , высотой H , ось которого совпадает с осью провода, тогда $E_+ 2\pi r H = \frac{\lambda H}{\epsilon_0}$ и $E_+ = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$. Подставим в выражение для модуля плотности тока:

$$j = \frac{1}{\rho} 2E_+ \cos \alpha = \frac{1}{\rho} 2 \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \frac{l}{2r} = \frac{\lambda l}{2\pi\epsilon_0 \rho r^2}.$$

Чтобы найти линейную плотность заряда λ , воспользуемся соотношением $U = \phi_1 - \phi_2 = \int_a^{l-2a} \vec{E} d\vec{l} = \int_a^{l-2a} (\vec{E}_+ + \vec{E}_-) d\vec{r}$, где, так как поле потенциально, выбираем $d\vec{l} = d\vec{r}$ и интегрируем по кратчайшему пути:

$$U = \int_a^{l-2a} (\vec{E}_+ + \vec{E}_-) d\vec{r} = 2 \int_a^{l-2a} \vec{E}_+ d\vec{r} = 2 \int_a^{l-2a} \frac{\lambda dr}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \ln \frac{l}{a},$$

где $\ln \frac{l}{a} \approx \ln \frac{l-2a}{a}$.

Тогда линейная плотность заряда равна $\lambda = \frac{\pi\epsilon_0 U}{\ln \frac{l}{a}}$. Подставим в вы-

ражение для плотности тока $j = \frac{\lambda l}{2\pi\epsilon_0 \rho r^2} = \frac{Ul}{2\rho r^2 \ln \frac{l}{a}}$.

С другой стороны, сопротивление среды можно рассчитать иным образом. По закону Ома в интегральной форме $R = \frac{U}{I}$, где сила тока $I = \iint \vec{j} d\vec{S} = \iint \frac{\vec{E}}{\rho} d\vec{S} = \frac{1}{\rho} \oiint \vec{E} d\vec{S} = \frac{\lambda H}{\rho\epsilon_0}$; H – длина провода, охваченная этой поверхностью.

Тогда $R = \frac{U}{I} = \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \ln \frac{l}{a} \left(\frac{\lambda H}{\rho\epsilon_0} \right)^{-1}$ и сопротивление среды на единицу длины провода $R = \frac{\rho}{\pi} \ln \frac{l}{a}$.

12. ЭЛЕКТРОДВИЖУЩАЯ СИЛА. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ ПОСТОЯННОГО ТОКА. ЗАКОНЫ КИРХГОФА

Электродвижущей силой (ЭДС) называется скалярная физическая величина, равная работе сторонних сил по перемещению единичного положительного заряда на участке цепи или в замкнутой цепи:

$$\epsilon = \frac{A_{ст}}{q} = \int_1^2 \vec{E}_{ст} d\vec{l} \quad \text{– на участке цепи; } \epsilon = \oint \vec{E}_{ст} d\vec{l} \quad \text{– в замкнутой цепи.}$$

Закон Ома в интегральной форме на участке цепи с ЭДС: $I = \frac{\Phi_1 - \Phi_2 + \epsilon}{R_{12}}$ – обобщенный закон Ома, где $\Phi_1 - \Phi_2$ – разность потенциалов на концах этого участка.

Закон Ома для замкнутой цепи: $I = \frac{\varepsilon}{R+r}$, где r – внутреннее сопротивление источника ЭДС; R – сопротивление всей остальной (внешней) цепи.

Работой источника называется работа сторонних сил $A_{\text{ст}} = \varepsilon q$.

При решении задач на постоянный ток в проводящей среде необходимо использовать следующее:

1) поле постоянного тока является стационарным, математическим выражением этого является теорема о циркуляции вектора напряженности $\oint \vec{E} d\vec{l} = 0$;

2) условие стационарности тока в интегральной $\oiint \vec{j} d\vec{S} = 0$ или дифференциальной $\text{div} \vec{j} = 0$ формах.

Правила Кирхгофа для линейных разветвленных цепей применяются для расчета сложных разветвленных цепей, содержащих несколько источников. Первое правило является следствием закона сохранения заряда, а второе – обобщением закона Ома на произвольное число источников сторонних ЭДС в изолированном замкнутом контуре.

При расчете с применением правил Кирхгофа необходимо:

1) выбрать произвольное направление токов на всех участках цепи; действительное направление токов выяснится при решении: если искомый ток получится положительным, то его направление было выбрано правильно, а если отрицательным, то его истинное направление противоположно выбранному;

2) выбрать направление обхода контуров и строго его придерживаться, записывая с соответствующими знаками токи и ЭДС;

3) записать первое правило Кирхгофа для узлов цепи – алгебраическая сумма токов, сходящихся в узле, равна нулю: $\sum_k I_k = 0$;

4) записать второе правило Кирхгофа для контуров – в любом замкнутом контуре, произвольно выбранном в разветвленной электрической цепи, алгебраическая сумма произведений сил токов на сопротивления соответствующих участков этого контура равна алгебраической сумме ЭДС, встречающихся в этом контуре: $\sum_k I_k R_k = \sum_i \varepsilon_i$;

5) количество всех уравнений должно быть равно количеству искоемых величин (в систему уравнений необходимо включить все сопротивления и ЭДС рассматриваемой цепи).

Задача 39. К зажимам аккумулятора подключен вольтметр. Под конец зарядки аккумулятора при силе тока в цепи $I_1 = 2,1$ А показание вольтметра $U_1 = 4,5$ В. В начале разрядки аккумулятора при силе тока в цепи $I_2 = 3,4$ А показание вольтметра $U_2 = 4,0$ В. Найти ЭДС источника и внутреннее сопротивление аккумулятора.

Решение. О сопротивлении вольтметра в задаче ничего не говорится, поэтому по умолчанию оно считается идеальным, т. е. $R_V \gg r$, следовательно, током через вольтметр в обоих случаях можно пренебречь. Так как вольтметр подключен параллельно аккумулятору, то он показывает разность потенциалов на его клеммах.

Тогда при зарядке аккумулятора через него течет ток I_1 , направленный противоположно полю сторонних сил в аккумуляторе (рис. 47). Вольтметр показывает $U_1 = \varphi_2 - \varphi_1 > \varepsilon$, где $\varphi_2 > \varphi_1$, иначе такой ток не будет протекать.

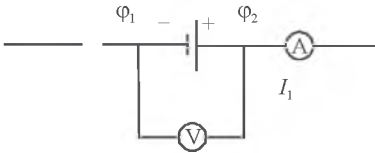


Рис. 47

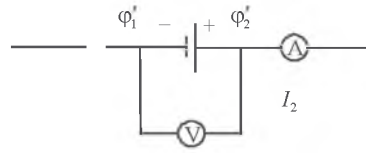


Рис. 48

Обобщенный закон Ома в этом случае $I_1 r = \varphi_2 - \varphi_1 - \varepsilon$, или $I_1 r = U_1 - \varepsilon$.

При разрядке аккумулятора через него течет ток I_2 , сонаправленный полю сторонних сил (рис. 48). Вольтметр показывает $U_2 = \varphi'_2 - \varphi'_1 < \varepsilon$, где $\varphi'_2 < \varphi'_1$. Обобщенный закон Ома в таком случае $I_2 r = \varphi'_1 - \varphi'_2 + \varepsilon$, или $I_2 r = -U_2 + \varepsilon$.

Из этих уравнений следует:

$$r = \frac{U_1 - U_2}{I_1 + I_2}, \quad \varepsilon = \frac{U_1 I_2 + U_2 I_1}{I_1 + I_2}, \quad r = 0,09 \text{ Ом}, \quad \varepsilon = 4,3 \text{ В}.$$

Задача 40. Участок цепи из последовательно соединенных конденсатора емкостью C и резистора сопротивлением R подключают к источнику с ЭДС ε (рис. 49). Найти зависимость заряда на пластинах конденсатора от времени, работу источника по зарядке конденсатора и количество теплоты, выделившееся при этом.

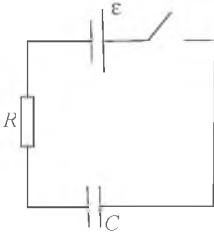


Рис. 49

Решение. По закону сохранения энергии за счет работы источника dA за малый промежуток времени dt изменяется энергия электрического поля конденсатора dW и выделяется количество теплоты dQ . Следовательно,

$$dA = dW + dQ,$$

$$\text{где } dA = \varepsilon I dt; \quad dW = d\left(\frac{q^2}{2C}\right) = \frac{q dq}{C}; \quad dQ = I^2 R dt.$$

Подставим эти соотношения и выражение для силы тока $I = \frac{dq}{dt}$ в закон сохранения энергии:

$$\varepsilon \frac{dq}{dt} dt = \frac{q dq}{C} + \left(\frac{dq}{dt}\right)^2 R dt.$$

Разделим обе части этого выражения сначала на dt , а затем на $\frac{dq}{dt}$:
 $\varepsilon = \frac{q}{C} + \frac{dq}{dt} R$. Разделим переменные $\frac{dt}{CR} = \frac{dq}{C\varepsilon - q}$ и проинтегрируем:

$$\int_0^t \frac{dt}{CR} = \int_0^q \frac{dq}{C\varepsilon - q}, \quad \frac{t}{CR} = -\ln \frac{C\varepsilon - q}{C\varepsilon}.$$

Зависимость заряда от времени $q = C\varepsilon(1 - e^{-\frac{t}{CR}})$ показывает, что заряд обкладок конденсатора при его зарядке увеличивается до максимального значения $q_{\max} = C\varepsilon$ при условии $t \rightarrow \infty$.

$$\text{Работа источника за это время } A = \int_0^{\infty} \varepsilon I dt = \int_0^{\infty} \varepsilon \frac{dq}{dt} dt = \varepsilon q_{\max} = C\varepsilon^2.$$

К моменту полной зарядки конденсатора ток в цепи прекратится и напряжение на конденсаторе станет равным $U = \varepsilon$. Соответственно, энергия заряженного конденсатора $W = \frac{C\varepsilon^2}{2}$.

По закону сохранения энергии за время зарядки $A = W + Q$. Следовательно, количество выделившейся теплоты $Q = A - W = \frac{C\varepsilon^2}{2}$.

Задача 41. Между пластинами 1 и 2 плоского конденсатора находится неоднородная слабо проводящая среда (рис. 50). Ее диэлектрическая

проницаемость и удельное сопротивление изменяются от значений ϵ_1, ρ_1 у пластины 1 до значений ϵ_2, ρ_2 у пластины 2. Конденсатор подключен к постоянному напряжению, и через него течет установившийся ток I от пластины 1 к пластине 2. Найти суммарный сторонний заряд в данной среде.

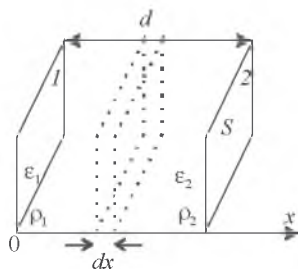


Рис. 50

Решение. Суммарный сторонний заряд можно найти по формуле $q = \iiint \rho_{\text{ст}} dV$, а плотность сторонних зарядов из теоремы Остроградского – Гаусса для вектора электрического смещения в дифференциальной форме $\text{div} \vec{D} = \rho_{\text{ст}}$.

Так как ток течет от пластины 1 к пластине 2, так же направлены линии напряженности и вектор электрического смещения. Пусть начало оси Ox расположено на пластине 1, тогда модуль вектора смещения на расстоянии x от пластины 1: $D_x = \epsilon_0 \epsilon_x E_x$, где ϵ_x, E_x – диэлектрическая проницаемость и напряженность поля на расстоянии x от пластины 1.

По условию через среду течет постоянный ток, т. е. $\text{div} \vec{j} = 0$ и $\vec{j} = \text{const}$, а модуль $j = \frac{I}{S}$, где S – площадь сечения (пластин конденсатора).

По закону Ома в дифференциальной форме $\vec{j} = \frac{\vec{E}}{\rho}$ и, следовательно,

модуль вектора плотности тока $j = \frac{E_x}{\rho_x}$. Тогда

$$D_x = \epsilon_0 \epsilon_x E_x = \epsilon_0 \epsilon_x j \rho_x = \epsilon_0 \frac{I}{S} \epsilon_x \rho_x.$$

Так как в условии не указано, по какому закону изменяются диэлектрическая проницаемость и удельное сопротивление, выбираем простейший вариант – линейную зависимость $\epsilon = ax + b$ и $\rho = a_1 x + b_1$ и определяем коэффициенты.

Так как при $x = 0$, $\epsilon = \epsilon_1 = b$, а при $x = d$ (расстояние между пластинами) $\epsilon = \epsilon_2 = ad + b$, следовательно, $b = \epsilon_1$, $a = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{d}$ и диэлектрическая проницаемость $\epsilon = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{d} x + \epsilon_1$.

Аналогично получим для удельного сопротивления $\rho = \frac{\rho_2 - \rho_1}{d}x + \rho_1$.

Следовательно, $D_x = \varepsilon_0 \frac{I}{S} \varepsilon_x \rho_x = \frac{\varepsilon_0 I}{S} \left(\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{d}x + \varepsilon_1 \right) \left(\frac{\rho_2 - \rho_1}{d}x + \rho_1 \right)$ за-

висит только от x . Тогда

$$\rho_{\text{ср}} = \text{div} \vec{D} = \frac{dD}{dx} = \frac{\varepsilon_0 I}{S} \left(\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{d} \left(\frac{\rho_2 - \rho_1}{d}x + \rho_1 \right) + \left(\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{d}x + \varepsilon_1 \right) \frac{\rho_2 - \rho_1}{d} \right).$$

Для вычисления суммарного заряда выберем малый объем в виде тонкой пластины (см. рис. 50): $dV = Sdx$. Тогда суммарный заряд в данной

$$\text{среде } q = \iiint \rho_{\text{ср}} dV = \int_0^d \rho_{\text{ср}} S dx = \varepsilon_0 I (\varepsilon_2 \rho_2 - \varepsilon_1 \rho_1).$$

Задача 42. В схеме на рис. 51 ЭДС источников $\varepsilon_1 = 2$ В, $\varepsilon_2 = 3$ В, $\varepsilon_3 = 4$ В, их внутренние сопротивления $r_1 = 0,5$ Ом, $r_2 = 0,6$ Ом, $r_3 = 0,2$ Ом, сопротивления резисторов $R_1 = 3,5$ Ом, $R_2 = 1,8$ Ом. Найти силу тока, протекающего через второй источник.

Решение. Для того чтобы применить правила Кирхгофа, произвольно выбраны и указаны на рис. 51 направления токов и обозначены контуры, которые будем обходить по часовой стрелке.

Применяем первое правило Кирхгофа к узлу D : $I_1 + I_2 + I_3 = 0$, для второго узла A получится точно такое же выражение.

По второму правилу для контура $ABCD$: $I_1(r_1 + R_1) - I_2 r_2 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$, для контура $ADEK$: $I_2 r_2 - I_3(r_3 + R_2) = \varepsilon_2 - \varepsilon_3$.

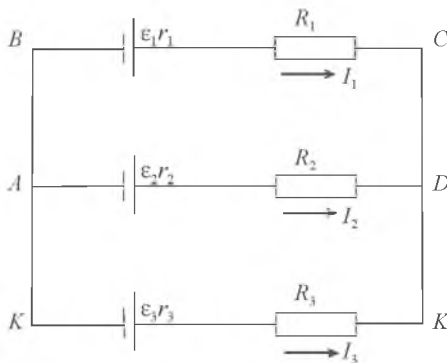


Рис. 51

Выражаем токи I_1 и I_3 , подставляем в уравнение для токов $\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + I_2 r_2}{r_1 + R_1} + I_2 + \frac{I_2 r_2 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3}{r_3 + R_2} = 0$ и находим ток $I_2 = -0,172... \approx -0,2$ А.

Знак «-» означает, что направление тока через второй источник противоположно указанному в схеме.

13. ТЕОРЕМА БИО – САВАРА – ЛАПЛАСА

В основе метода суперпозиции для расчета индукции магнитного поля лежит теорема Био – Савара – Лапласа и принцип суперпозиции магнитных полей.

I. Если магнитное поле создается тонким проводником с током, то для расчета магнитной индукции в заданной точке необходимо:

1) проводник с током представить как систему элементов с током $I d\vec{l}$;

2) записать формулу для индукции магнитного поля $d\vec{B} = k \frac{I d\vec{l} \vec{r}}{r^3}$ в заданной точке, создаваемой элементом с током;

3) провести радиус-вектор от элемента тока в заданную точку, построить в этой точке соответствующий вектор индукции $d\vec{B}$;

4) по принципу суперпозиции вектор результирующей индукции $\vec{B} = \sum_i^N d\vec{B}_i$. Так как сложить большое число векторов нелегко, следует вы-

брать систему отсчета, спроецировать вектор $d\vec{B}$ на оси и рассчитать, например, в декартовой системе координат $B_x = \int dB_x$, $B_y = \int dB_y$, $B_z = \int dB_z$ и $|\vec{B}| = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}$.

II. Если магнитное поле создается системой тонких проводников с током и известны формулы для расчета индукции этих полей, то результирующий вектор магнитной индукции наиболее рационально рассчитывать по принципу суперпозиции $\vec{B} = \sum_i^N \vec{B}_i$.

III. Если магнитное поле создается непрерывно распределенным током в некоторой области пространства, необходимо:

1) представить непрерывное распределение тока как систему тонких проводников с током dI ;

- 2) найти индукцию поля, создаваемого таким тонким проводом;
 3) рассчитать индукцию результирующего поля по принципу суперпозиции.

Задача 43. Рассчитать индукцию магнитного поля, создаваемого частью провода с током I , в точке на расстоянии r_0 от провода (рис. 52), если известны углы α_1, α_2 .

Решение. Провод представляет собой набор элементов тока. На рис. 52 показан элемент $I d\vec{l}$, проведен радиус-вектор от него в искомую точку, построен вектор $d\vec{B}$, направленный перпендикулярно плоскости, в которой расположен провод. Все элементы тока провода будут создавать в этой точке сонаправленные векторы, поэтому результирующий вектор индукции будет направлен по оси OZ , а его модуль равен $B = \int dB = \int \frac{I dl r \sin \alpha}{r^3}$, где r, dl, α – переменные величины.

В указанной на рис. 52 системе отсчета $dl = dx$, где x – координата элемента тока. Для перехода к одной переменной рассмотрим прямоугольный треугольник, образованный r_0, r и x : $\frac{r_0}{r} = \sin(180 - \alpha) = \sin \alpha$,

$$\frac{x}{r_0} = \operatorname{ctg}(180 - \alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha.$$

Тогда в подынтегральное выражение можно подставить $r = \frac{r_0}{\sin \alpha}$, значит, $dx = r_0 d(-\operatorname{ctg} \alpha) = -\frac{r_0 d\alpha}{\sin^2 \alpha}$, полученное выражение упрощаем и интегрируем по углу α от $(180 - \alpha_1)$ до $(180 - \alpha_2)$.

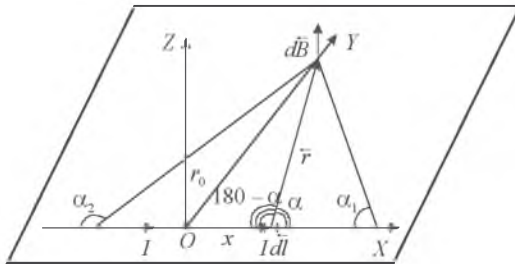


Рис. 52

Модуль индукции магнитного поля, создаваемого в указанной точке частью провода, равен

$$B = \int_{180-\alpha_1}^{180-\alpha_2} \frac{kI}{r_0} \sin \alpha d\alpha = -\frac{kI}{r_0} (\cos(180-\alpha_2) - \cos(180-\alpha_1)) = \\ = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2).$$

Задача 44. Рассчитать модуль индукции поля на расстоянии r_0 от провода с током I в случае: а) очень длинного провода; б) в точке возле одного из концов очень длинного провода.

Решение. Используем формулу, полученную в предыдущей задаче.

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0} (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_2).$$

В случае а), когда длина части провода очень большая по сравнению с расстоянием r_0 , его можно рассматривать как прямой бесконечный провод, при этом $\alpha_1 \approx 0$, $\alpha_2 \approx 180^\circ$ и модуль магнитной индукции равен

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_0}.$$

Во всех точках, расположенных на одинаковом расстоянии от провода, модуль вектора магнитной индукции одинаков, а направление в любой точке поля перпендикулярно направлению тока и r_0 (рис. 53).

Образованная равноудаленными от провода точками окружность – это линия магнитной индукции поля, создаваемого всем проводом.

В случае б) пусть точка находится на расстоянии r_0 на перпендикуляре, проведенном ко второму концу очень длинного провода. В этом случае $\alpha_1 \approx 0$, $\alpha_2 = 90^\circ$ и модуль магнитной индукции равен $B = \frac{\mu_0 I}{4\pi r_0}$. На-

правление этого вектора такое же, как и бесконечного провода.

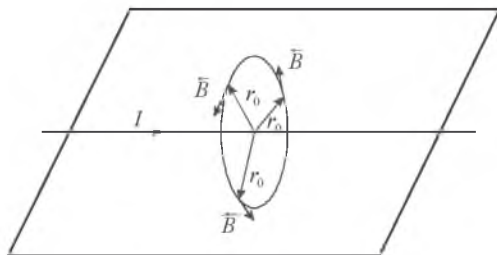


Рис. 53

Задача 45. Найти индукцию магнитного поля в точке O , если проводник с током $I = 8,0$ А имеет вид, показанный на рис. 54. Радиус изогнутой части проводника $R = 100$ мм, прямолинейные участки очень длинные.

Решение. Индукция магнитного поля в точке O по принципу суперпозиции $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3$.

Из результата предыдущей задачи следует, что модули магнитной индукции прямолинейных участков равны по модулю $B_1 = B_3 = \frac{\mu_0 I}{4\pi R}$, но направление этих векторов различно: $\vec{B}_1 \uparrow \downarrow$ оси OZ , $\vec{B}_2 \uparrow \downarrow$ оси OY .

Разобьем изогнутую часть на элементы тока Idl , каждый из них создает в точке O вектор $d\vec{B} \uparrow \downarrow$ оси OX . Модуль индукции равен

$$B_2 = \sum_i dB_i = \sum \frac{kI dLR \sin 90^\circ}{R^3} = \frac{kIL}{R^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R^2} \frac{3}{4} 2\pi R = \frac{3\mu_0 I}{8R}.$$

Так как все три вектора взаимно перпендикулярны, то модуль результирующего вектора магнитной индукции в точке O равен

$$|\vec{B}| = \sqrt{B_1^2 + B_2^2 + B_3^2} = \frac{\mu_0 I}{4R} \sqrt{2\left(\frac{1}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\mu_0 I}{8R\pi} \sqrt{8 + 9\pi^2}.$$

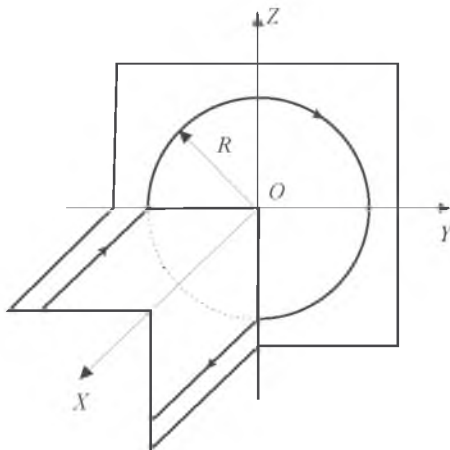


Рис. 54

Задача 46. По длинному прямому проводнику, сечение которого имеет форму тонкой дуги длиной L и радиусом R , течет постоянный ток I . Найти индукцию магнитного поля в точке O (рис. 55).

Решение. Представим проводник как систему тонких плотно уложенных бесконечных проводов с током $dl = idl$, где $i = \frac{I}{L}$ – линейная плотность тока; $dl = R d\alpha$.

Пусть ток течет от нас перпендикулярно (рис. 55), тогда вектор индукции магнитного поля тонкого провода с током dl в точке O направлен, как показано на рис. 55, и равен по модулю

$$dB = \frac{\mu_0 dl}{2\pi R} = \frac{\mu_0 i dl}{2\pi R} = \frac{\mu_0 IR d\alpha}{2\pi RL} = \frac{\mu_0 I d\alpha}{2\pi L}.$$

Найдем проекции этого вектора на оси указанной системы отсчета: $dB_x = \frac{\mu_0 I d\alpha}{2\pi L} \sin \alpha$, $dB_y = \frac{\mu_0 I d\alpha}{2\pi L} \cos \alpha$. Так как L и R заданы, то можно ввести центральный угол $\alpha_0 = \frac{L}{R}$ и интегрировать по углу α в пределах

$$-\frac{\alpha_0}{2} \leq \alpha \leq \frac{\alpha_0}{2}.$$

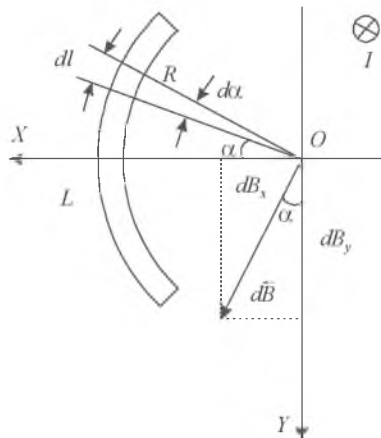


Рис. 55

Тогда

$$B_x = \int_{-\frac{\alpha_0}{2}}^{\frac{\alpha_0}{2}} \frac{\mu_0 I}{2\pi L} \sin \alpha d\alpha = -\frac{\mu_0 I}{2\pi L} \left(\cos \frac{\alpha_0}{2} - \cos \left(-\frac{\alpha_0}{2} \right) \right) = 0,$$

$$B_y = \int_{-\frac{\alpha_0}{2}}^{\frac{\alpha_0}{2}} \frac{\mu_0 I}{2\pi L} \cos \alpha d\alpha = \frac{\mu_0 I}{2\pi L} \left(\sin \frac{\alpha_0}{2} - \sin \left(-\frac{\alpha_0}{2} \right) \right) = \frac{\mu_0 I}{\pi L} \sin \frac{\alpha_0}{2} = \frac{\mu_0 I}{\pi L} \sin \frac{L}{2R},$$

т. е. результирующий вектор магнитной индукции сонаправлен с осью OY и равен по модулю $B = B_y = \frac{\mu_0 I}{\pi L} \sin \frac{L}{2R}$.

14. ТЕОРЕМА О ЦИРКУЛЯЦИИ ВЕКТОРА МАГНИТНОЙ ИНДУКЦИИ

Теорема (о циркуляции вектора магнитной индукции). Циркуляция вектора магнитной индукции по любому замкнутому контуру равна произведению магнитной постоянной на суммарный ток, охваченный этим контуром: $\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0 I = \mu_0 \iint_S \vec{j} d\vec{S}$.

Метод расчета индукции магнитного поля с использованием этой теоремы позволяет достаточно просто рассчитать индукцию магнитного поля по известному распределению токов, если можно выбрать контур, вдоль которого модуль вектора магнитной индукции имеет постоянную величину, а направление этого вектора известно.

Наиболее рационально выбрать контур, полностью совпадающий с линией магнитной индукции или с ее частью. Следовательно, при решении задач этим методом необходимо:

1) по заданному распределению тока представить вид магнитного поля с помощью линий магнитной индукции;

2) выбрать замкнутый контур, совпадающий с какой-либо линией магнитной индукции или ее частью. В этом случае $\vec{B} d\vec{l} = B dl \cos 0^\circ$, а модуль B – постоянная величина и левая часть, интеграл $\oint_L \vec{B} d\vec{l} = B \oint dl$;

3) вычислить, если не известен, суммарный ток в правой части теоремы;

4) приравнять друг другу левую и правую части и выразить модуль вектора магнитной индукции.

Задача 47. Двухпроводная система представляет собой длинный коаксиальный кабель, состоящий из цилиндрического центрального провода радиусом R_1 и окружающего его тонкостенного цилиндрического проводника радиусом R_2 . Найти индукцию магнитного поля в точках, расположенных от оси системы на расстояниях $R_1 < r < R_2$ и при $r > R_2$, если по обоим проводникам в противоположные стороны течет постоянный ток I (рис. 56). Магнитным полем внутри металла пренебречь.

Решение. Применять метод суперпозиции для расчета индукции в этой системе не рационально, но, используя метод суперпозиции, можно качественно представить результирующее магнитное поле.

Представим центральный цилиндрический провод как набор тонких очень длинных плотно расположенных проводов, по которым ток течет в одном направлении. Линии результирующего магнитного поля такого набора будут представлять собой окружности с центром на оси центрального провода.

Представим цилиндрический внешний проводник как набор тонких очень длинных плотно расположенных проводов на одинаковом расстоянии от оси системы, по которым ток течет в противоположном направлении. Линии результирующего магнитного поля и внешнего проводника будут представлять собой окружности с центром на оси центрального провода. Следовательно, линии результирующего магнитного поля кабеля также будут представлять собой окружности с центром на оси центрального провода.

Выберем замкнутый контур радиусом r ($R_1 < r < R_2$), совпадающий с какой-либо линией магнитной индукции результирующего поля, а направление обхода – с направлением линии поля. В этом случае $\vec{B} \uparrow \uparrow d\vec{l}$ в любой точке контура. Величина вектора индукции не известна, но вдоль его контура модуль постоянен и может быть вынесен из-под интеграла:

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = B \oint dl \cos 0^\circ = B 2\pi r.$$

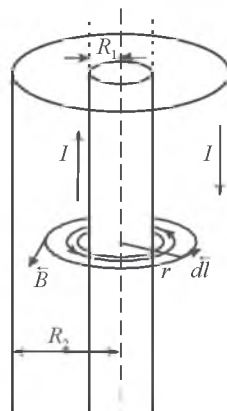


Рис. 56

При $R_1 < r < R_2$ контур охватывает только ток внутреннего проводника, поэтому $B2\pi r = \mu_0 I$ и модуль индукции в точках между центральным и внешним проводниками равен $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$.

Для расчета индукции магнитного поля вне кабеля выберем контур радиусом r , но $r > R_2$. Циркуляция вектора индукции вычисляется аналогично:

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = B \oint_L dl \cos 0^\circ = B2\pi r.$$

Но контур в этом случае охватывает равные по величине токи, текущие в противоположных направлениях, поэтому суммарный ток равен нулю, тогда $B2\pi r = 0$ и магнитная индукция поля в точках за пределами кабеля при $r > R_2$ равна $B = 0$.

Задача 48. По круглому однородному прямому проводу с радиусом сечения R течет постоянный ток плотностью \vec{j} . Найти вектор магнитной индукции в точке, положение которой относительно оси провода определяется радиус-вектором \vec{r} (рис. 57). Магнитную проницаемость везде считать равной единице.

Решение. Представим провод как набор тонких плотно расположенных проводов, симметричных относительно оси провода. Линии результирующего поля будут представлять собой окружности с центром, расположенным на оси провода.

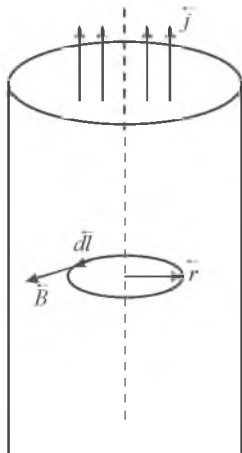


Рис. 57

Выберем контур в виде окружности радиусом $r < R$, направление обхода которого совпадает с направлением линии поля. Тогда $\vec{B} \uparrow \uparrow d\vec{l}$ в любой точке контура и

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = B \oint_L dl \cos 0^\circ = B2\pi r.$$

Ток, охваченный этим контуром: $I_r = j\pi r^2$. Приравняем обе части $B2\pi r = \mu_0 j\pi r^2$, модуль вектора индукции $B = \frac{\mu_0 j r}{2}$, т. е. линейно зависит от расстояния до оси провода. Так как векторы \vec{j} , \vec{B} , \vec{r} перпендикулярны друг другу, можно записать для вектора магнитной индукции $\vec{B} = \frac{\mu_0}{2} [\vec{j} \times \vec{r}]$ при $r < R$.

Аналогично действуя для точек поля, расположенных за пределами провода, при $r > R$, получим $\oint_L \vec{B} d\vec{l} = B \oint dl \cos 0^\circ = B 2\pi r$, а охваченный ток $I = j\pi R^2$.

Следовательно, $B 2\pi r = \mu_0 j\pi R^2$ и модуль индукции $B = \frac{\mu_0 j R^2}{2r}$ или для вектора магнитной индукции $\vec{B} = \frac{\mu_0 R^2}{2r^2} [\vec{j} \times \vec{r}]$ при $r > R$.

Задача 49. Определить модуль и направление вектора магнитного поля: а) безграничной плоскости, по которой течет ток с линейной плотностью \vec{i} , одинаковой во всех точках плоскости; б) двух параллельных безграничных плоскостей, по которым текут токи с линейными плотностями \vec{i} и $-\vec{i}$, одинаковыми во всех точках каждой плоскости.

Решение. В случае а) на рис. 58 показан кусочек безграничной плоскости с линейной плотностью тока \vec{i} . Разобьем плоскость на тонкие полоски очень малой толщины dl , по которым течет ток $dI = idl$. Тогда плоскость как бы представляет собой систему тонких плотно расположенных проводников. По этим проводникам течет ток в одном направлении, и каждый из них создает свое поле, линии которого являются окружностями. На рис. 59 показан торец плоскости и линии поля таких проводников. Результирующее поле плоскости, линии которого с двух сторон противоположны друг другу, изображено на рис. 60.

Выберем прямоугольный контур, две стороны которого $l_{41} = l_{23} = l$ расположены на одинаковых расстояниях от плоскости и параллельны линиям поля, а две другие $l_{12} = l_{34}$ перпендикулярны линиям поля (см. рис. 60).

Циркуляция вектора индукции по этому контуру:

$$\begin{aligned} \oint \vec{B} d\vec{l} &= \int_{12} B dl \cos 90^\circ + \int_{23} B dl \cos 0^\circ + \int_{34} B dl \cos 90^\circ + \int_{41} b dl \cos 0^\circ = \\ &= B l_{23} + B l_{41} = 2Bl. \end{aligned}$$

Ток, охваченный контуром, равен $I = il$, и модуль магнитной индукции $B = \frac{\mu_0 i}{2}$ соответствует однородному полю, линии которого противоположны с двух сторон плоскости.

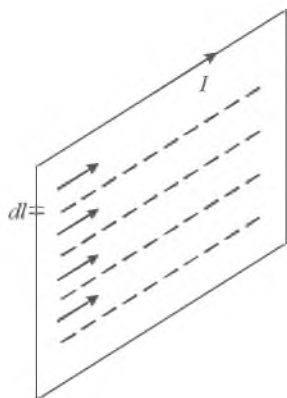


Рис. 58



Рис. 59

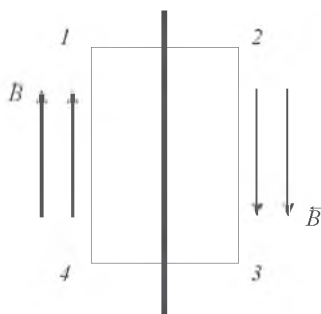


Рис. 60

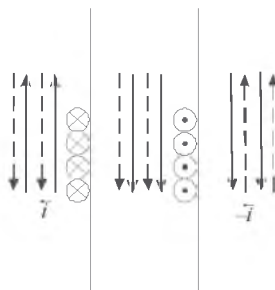


Рис. 61

В случае б) если две плоскости с противоположным направлением плотности тока расположены рядом, то возникает результирующее поле. На рис. 61 сплошными линиями показаны линии магнитной индукции плоскости с током \vec{i} , а пунктирными – линии магнитной индукции плоскости с током $-\vec{i}$.

В пространстве между плоскостями направление линий совпадает, модули индукции полей равны $B_i = \frac{\mu_0 j}{2} = B_{-i}$, и модуль индукции результирующего поля равен $B = \mu_0 j$.

В других областях линии полей направлены противоположно друг другу и результирующее поле равно нулю. Такая система двух плоско-

стей представляет собой как бы магнитный конденсатор, так как магнитное поле сосредоточено (сконденсировано) между плоскостями.

Задача 50. На рис. 62 показан кольцевой соленоид прямоугольного сечения. Найти магнитный поток через это сечение, если ток в обмотке $I = 1,6$ А, полное число витков $N = 1000$, отношение внешнего диаметра к внутреннему $\eta = 1,6$, толщина $h = 5,0$ см.

Решение. Магнитный поток рассчитывается по формуле $\Phi = \iint \vec{B} d\vec{S}$, т. е. сначала необходимо найти модуль магнитной индукции.

Каждый виток катушки создает магнитное поле, линии которого перпендикулярны плоскости витка. Следовательно, результирующее магнитное поле внутри катушки будет иметь линии в виде окружностей с центром в центре катушки. Пусть внутренний радиус соленоида R_1 , а внешний R_2 .

Выберем замкнутый контур радиусом $R_1 < r < R_2$, совпадающий с какой-либо линией магнитной индукции, циркуляция вектора магнитной индукции по этому контуру

$$\oint_L \vec{B} d\vec{l} = B \oint dl \cos 0^\circ = B 2\pi r.$$

Ток, охватываемый этим контуром, $I_{\text{оXB}} = NI$, так как контур охватывает все внутренние стороны витков катушки, по которым идет ток в одном направлении.

Тогда $B 2\pi r = \mu_0 NI$ и модуль $B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$ обратно пропорционален расстоянию до оси катушки.

Для расчета потока необходимо выбрать такой малый dS , чтобы в его пределах модуль магнитной индукции был практически постоянным. Следовательно, выбираем $dS = h dr$, так как на протяжении h при одном r модуль магнитной индукции не изменяется. Направление нормали к dS совпадает с направлением вектора магнитной индукции, тогда

$$\Phi = \iint \vec{B} d\vec{S} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu_0 NI h dr}{2\pi r} = \frac{\mu_0 NI h}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1},$$

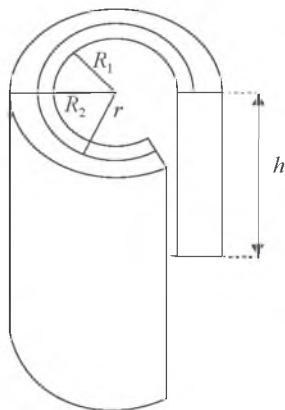


Рис. 62

так как отношение радиусов равно отношению диаметров $\frac{R_2}{R_1} = \frac{D_2}{D_1} = \eta$,

следовательно, $\Phi = \frac{\mu_0 N I h}{2\pi} \ln \eta$, или $\Phi = 7,5 \text{ мкВб}$.

15. СИЛА АМПЕРА. КОНТУР С ТОКОМ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Силой Ампера называется сила, действующая на элемент тока в магнитном поле $d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$.

Для расчета силы Ампера, действующей на контур с током, необходимо:

- 1) проводник с током представить как систему элементов тока $I d\vec{l}$;
- 2) записать формулу для силы, действующей на элемент тока, $d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$ и показать направление этого вектора;

3) по принципу суперпозиции найти вектор результирующей силы Ампера, действующей на весь контур, $\vec{F} = \sum_i^N d\vec{F}_i$. Так как сложить большое

число векторов нелегко, выбрать систему отсчета, спроецировать вектор $d\vec{F}$ на оси и рассчитать, например, в декартовой системе координат $F_x = \int dF_x$, $F_y = \int dF_y$, $F_z = \int dF_z$ и $|\vec{F}| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$.

Магнитный момент вводится для характеристики поведения в целом проводящего контура с током I в магнитном поле: $\vec{p}_m = IS\vec{n}$, где S – площадь, ограниченная контуром, а направление нормали \vec{n} связано правилом правого винта с направлением тока в контуре.

Задача 51. Тонкий проводник в виде полуокружности радиусом R , по которому течет ток I , расположен в однородном магнитном поле, линии которого перпендикулярны плоскости проводника, а модуль индукции B (рис. 63). Определить силу, действующую на проводник.

Решение. Представим проводник в виде системы элементов тока. На рис. 63 показан вектор силы Ампера, действующей на некоторый элемент тока. Модуль этой силы равен $dF = BI dl \sin 90^\circ$. Проекция вектора dF на оси координат $dF_x = -BI dl \cos \alpha$, $dF_y = -BI dl \sin \alpha$, где $dl = R d\alpha$.

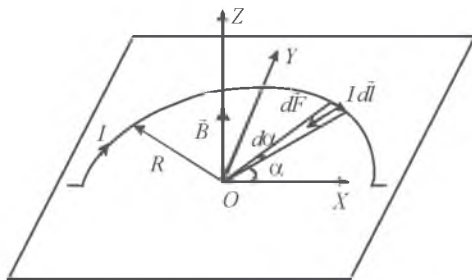


Рис. 63

Проекции результирующей силы:

$$F_x = -\int_0^\pi BIR \cos \alpha d\alpha = 0,$$

$$F_y = -\int_0^\pi BIR \sin \alpha d\alpha = BIR(\cos \pi - \cos 0^\circ) = -2BIR.$$

Следовательно, вектор результирующей силы направлен противоположно оси OY и равен по модулю $F = 2BIR$.

Задача 52. Медный провод сечением $s = 2,5 \text{ мм}^2$, согнутый в виде трех сторон квадрата, может поворачиваться вокруг горизонтальной оси OO' . Провод находится в однородном вертикально направленном магнитном поле. Найти индукцию поля, если при пропускании по данному проводу тока $I = 16 \text{ А}$ угол отклонения рамки от вертикали $\beta = 30^\circ$ (рис. 64).

Решение. При пропускании тока поворот контура относительно оси OO' происходит под действием вращательных моментов силы тяжести и сил Ампера до тех пор, пока сумма этих моментов не станет равной нулю: $\vec{M}_{mg} + \vec{M}_A = 0$ или модули этих величин будут равны: $M_{mg} = M_A$.

Для вычисления модулей моментов сил необходимо знать точки их приложения.

Найдем точку приложения силы тяжести – центр тяжести контура. Так как все стороны контура из одного провода и одной длины, например L , следовательно, центр тяжести каждой стороны массой m находится в ее середине. Заменим контур тремя точками C_1 , C_2 и C_3 – центрами тяжести сторон (рис. 65). Центр тяжести двух противоположных сторон C_{13} расположен посередине контура, а общий центр тяжести контура делит расстояние между точками C_{13} и C_2 на расстояния, обратно пропорциональные массам

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{2m}{m} = 2. \text{ Из рис. 65 } r_1 + r_2 = \frac{L}{2} \text{ и } r_2 = \frac{L}{3}.$$

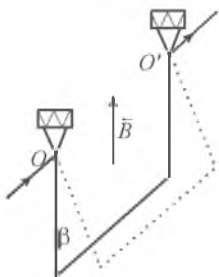


Рис. 64

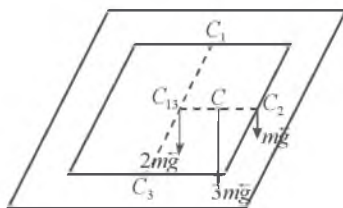


Рис. 65

Найдем точку приложения результирующей силы Ампера. Так как контур с током I находится в однородном магнитном поле, а длины его сторон равны, модули сил Ампера, действующие на противоположные стороны контура, также равны: $F_{A1} = F_{A3}$. Поскольку в противоположных сторонах контура токи текут в противоположные стороны, силы Ампера $\vec{F}_{A1} = -\vec{F}_{A3}$ и результирующая сила Ампера $\vec{F}_A = \vec{F}_{A1} + \vec{F}_{A2} + \vec{F}_{A3} = \vec{F}_{A2}$ равна силе Ампера, действующей на горизонтальную сторону контура, и приложена в точке на ее середине, точке C_2 .

Так как направление тока в горизонтальной стороне перпендикулярно вектору магнитной индукции, то модуль силы

$$F_{A2} = \int_0^L I dl B \sin 90^\circ = IBL.$$

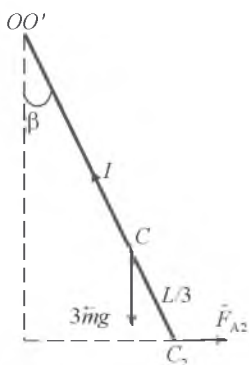


Рис. 66

На рис. 66 показан вид на контур сбоку. Модуль момента силы тяжести

$$M_{mg} = 3mg \frac{2}{3} L \sin \beta = 2\rho SL^2 \sin \beta,$$

где ρ – плотность меди.

Модуль момента силы Ампера

$$M_A = F_{A2} L \cos \beta = BIL^2 \cos \beta.$$

Приравняем полученные выражения:

$$2\rho SL^2 \sin \beta = BIL^2 \cos \beta,$$

тогда модуль индукции магнитного поля равен

$$B = \frac{2\rho Sg}{I} \operatorname{tg} \beta, \quad B = 16 \text{ мТл.}$$

Задача 53. Заряд q равномерно распределен по объему однородного шара массой m и радиусом R , который вращается вокруг оси, проходящей через его центр, с угловой скоростью ω . Найти соответствующий магнитный момент шара.

Решение. Представим шар как систему зарядов dq , вращающихся с одинаковой угловой скоростью вокруг оси шара (рис. 67). Введем объемную плотность заряда $\rho = \frac{3q}{4\pi R^3}$, $dq = \rho dV$, где в сферической системе отсчета $dV = r^2 dr \sin\theta d\theta d\phi$.

Вращающийся заряд создает элементарный ток $dI = \frac{dq}{T} = \frac{dq}{2\pi} \omega$ и соответствующий модуль магнитного момента элементарного тока $dp = dIS$, где $S = \pi(r \sin\theta)^2$. Выразим

$$dp = dIS = \frac{dq}{2\pi} \omega \pi (r \sin\theta)^2 = \frac{\omega \rho}{2} r^4 dr \sin^3 \theta d\theta d\phi.$$

Все моменты dp направлены в одну сторону, поэтому модуль магнитного момента шара можно получить интегрированием:

$$p = \iiint dp = \frac{\omega \rho}{2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R r^4 dr \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{\omega \rho \pi R^5}{5} \int_0^\pi (-\sin^2 \theta d(\cos \theta)).$$

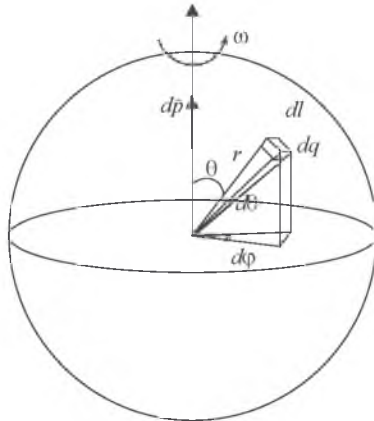


Рис. 67

Так как $-\sin^2 \theta = \cos^2 \theta - 1$, то интеграл $\int_0^\pi (\cos^2 \theta - 1) d(\cos \theta) = \frac{4}{3}$. Под-

ставим выражение для объемной плотности заряда и получим модуль магнитного момента шара $p = \frac{\omega \pi R^5}{5} \frac{4}{3} \frac{3q}{4\pi R^3} = \frac{\omega q R^2}{5}$.

Задача 54. Проводящую плоскость с током поместили во внешнее однородное магнитное поле. В результате индукция магнитного поля с одной стороны плоскости оказалась B_1 , а с другой $-B_2$ (рис. 68). Найти магнитную силу, действующую на единицу поверхности плоскости.

Решение. Сила, которую необходимо найти, – это сила Ампера, поэтому следует представить плоскость как систему тонких расположенных вплотную друг к другу проводников с током $I_i = i dl_i$, где i – линейная плотность тока на плоскости. Тогда сила Ампера $d\vec{F} = I_i d\vec{l} \times \vec{B}$, где элемент тока на плоскости можно записать $I_i d\vec{l} = dl_i d\vec{l}_i$; \vec{B} – индукция внешнего магнитного поля, в котором находится плоскость. Тогда сила, действующая на единицу поверхности плоскости, $\frac{d\vec{F}}{dl_i dl} = \vec{i} \times \vec{B}$. Следова-

тельно, для вычисления силы необходимо определить модуль и направление линейной плотности тока и индукции внешнего поля.

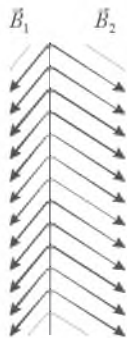


Рис. 68

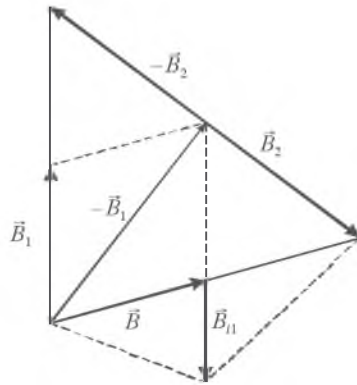


Рис. 69

Заданные в условии величины индукции результирующего магнитного поля по принципу суперпозиции можно записать как $\vec{B}_1 = \vec{B} + \vec{B}_i$, $\vec{B}_2 = \vec{B} + \vec{B}_{i1}$, где, как показано в задаче 48, векторы магнитной индукции поля по разные стороны плоскости перпендикулярны векторам линейной плотности тока и противоположны друг другу: $\vec{B}_i = -\vec{B}_{i1}$, а их модули $B_i = B_{i1} = \frac{\mu_0 I}{2}$.

Сложим и вычтем два выражения для результирующего поля:

$$\vec{B}_1 + \vec{B}_2 = 2\vec{B} \quad \text{и} \quad \vec{B} = \frac{\vec{B}_1 + \vec{B}_2}{2},$$

$$\vec{B}_1 - \vec{B}_2 = 2\vec{B} \quad \text{и} \quad \vec{B}_i = \frac{\vec{B}_1 - \vec{B}_2}{2}, \quad i = \frac{2}{\mu_0} \left| \frac{\vec{B}_1 - \vec{B}_2}{2} \right| = \frac{1}{\mu_0} |\vec{B}_1 - \vec{B}_2|.$$

Так как плотность линий вектора \vec{B}_1 больше, чем плотность линий вектора \vec{B}_2 , модуль $B_1 > B_2$. С учетом этого в масштабе на рис. 68 построен вектор индукции внешнего поля \vec{B} как половина вектора суммы $\vec{B}_1 + \vec{B}_2$, а также построен вектор индукции поля плоскости \vec{B}_i как половина вектора разности $\vec{B}_1 - \vec{B}_2 = \vec{B}_1 + (-\vec{B}_2)$.

Как видно из рис. 69 и векторных сумм $\vec{B}_1 = \vec{B} + \vec{B}_i$, $\vec{B}_2 = \vec{B} + \vec{B}_{i1}$, поле плоскости слева направлено вверх, а справа – вниз. Следовательно, на рис. 68 ток течет от нас в плоскость рисунка.

Сила, действующая на единицу поверхности, $\frac{d\vec{F}}{dl_1 dl} = \vec{i} \times \vec{B}$, как векторное произведение, перпендикулярна вектору плотности тока и вектору индукции внешнего поля, а по модулю равна

$$\frac{dF}{dl_1 dl} = iB \sin 90^\circ = \frac{1}{\mu_0} |\vec{B}_1 - \vec{B}_2| \left| \frac{\vec{B}_1 + \vec{B}_2}{2} \right| = \frac{B_1^2 - B_2^2}{2\mu_0}.$$

Задача 55. Прямой бесконечный провод с током I_1 и прямоугольная рамка со сторонами l и b ($l < b$) расположены в одной плоскости так, что сторона l параллельна проводу и отстоит от него на расстояние r . Какую работу нужно совершить, чтобы повернуть рамку вокруг оси OO_1 , параллельной проводу и проходящей через середины противоположных сторон рамки b ?

Решение. Работа по изменению положения контура с током равна $A = I_2 \Delta \Phi = I_2 (\Phi_2 - \Phi_1)$, где $\Delta \Phi$ – изменение магнитного потока поля, создаваемого прямым проводом через поверхность контура.

Магнитный поток Φ_1 в первом положении рамки $\Phi_1 = \iint \vec{B} d\vec{S}$, где \vec{B} – индукция магнитного поля прямого провода. Для вычисления интеграла необходимо выбрать такое $d\vec{S}$, чтобы в его пределах индукция магнитного поля была практически постоянной. Этому соответствует узкая полоска, величина площади которой равна $dS = l dx$ (рис. 70).

Вектор $d\vec{S}$ направлен по нормали к контуру, которая по правилу правого винта выходит из плоскости рисунка на нас. Вектор \vec{B} направлен в противоположную сторону, т. е. угол между этими векторами равен 180° . Модуль индукции магнитного поля прямого провода в пределах этой полоски $B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x}$, где x – расстояние до провода. Следовательно:

$$\Phi_1 = \iint B dS \cos 180^\circ = -\frac{\mu_0 I_1 l}{2\pi} \int_r^{r+b} \frac{dx}{x} = -\frac{\mu_0 I_1 l}{2\pi} \ln \frac{r+b}{r}.$$

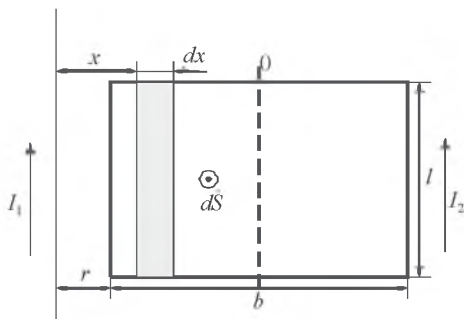


Рис. 70

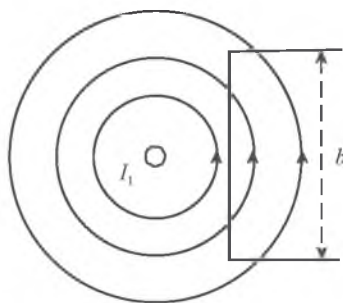


Рис. 71

При повороте на 90° рамка становится в положение, при котором ее плоскость параллельна проводу, а провод расположен напротив середины рамки. На рис. 71 показан вид на систему сверху и наглядно видно, что в этом случае линия магнитной индукции поля, которая пересекла площадь рамки один раз, обязательно пересечет ее и второй раз. Поэтому при таком положении рамки поток через ее поверхность равен $\Phi_2 = 0$.

$$\text{Искомая работа } A = I_2 (\Phi_2 - \Phi_1) = \frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi} \ln \frac{r+b}{r}.$$

16. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ В ВЕЩЕСТВЕ

Всякое вещество является *магнетиком*, т. е. под действием внешнего (созданного токами проводимости) магнитного поля \vec{B}_0 вещество способно намагничиваться и таким образом становится источником магнитного поля \vec{B}' , создаваемого токами намагничивания. Распределение этих токов зависит от природы и концентрации магнетика, а также от конфигурации магнитного поля токов проводимости. Поэтому в веществе возникает результирующее магнитное поле $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'$.

Циркуляция результирующего вектора \vec{B} теперь будет определяться как $\oint \vec{B} d\vec{l} = \mu_0(I + I')$, где I и I' – токи проводимости и намагничивания соответственно, охватываемые заданным контуром. В общем случае нахождение токов I' является сложной задачей (исключение составляет случай, когда все пространство заполнено однородным изотропным магнетиком). Поэтому задача о нахождении результирующего поля \vec{B} в магнетике в общем случае не может быть решена.

Однако можно ввести вектор \vec{H} – вектор напряженности магнитного поля, который выполняет в теории магнитного поля такую же роль, как и вектор \vec{D} в теории электрического поля. Поэтому решение практически любой задачи начинается с расчета вектора \vec{H} по теореме о циркуляции $\oint \vec{H} d\vec{l} = I$, а затем, используя связь между векторами \vec{B} и \vec{H} , которая в случае однородного изотропного магнетика выглядит как $\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}$, находят \vec{B} .

Для однородных изотропных магнетиков зависимость вектора намагничивания \vec{J} от напряженности имеет линейный характер $\vec{J} = \chi\vec{H}$, где χ – магнитная восприимчивость, которая имеет связь с магнитной проницаемостью как $\chi = \mu - 1$.

Для нахождения токов намагничивания I' (как $I'_{\text{объем}}$ и $I'_{\text{поверх}}$) можно воспользоваться теоремой о циркуляции вектора \vec{J} в виде $\oint \vec{J} d\vec{l} = I'$, где I' – алгебраическая сумма токов намагничивания, охватываемая контуром.

Задача 56. Прямой тонкий проводник током I расположен по оси цилиндра из однородного изотропного парамагнетика радиусом R . Определить зависимости $H = f(r)$ и $B = f(r)$, где r – расстояние от оси цилиндра.

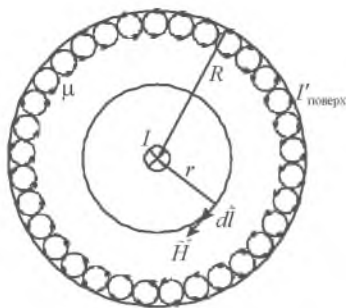


Рис. 72

Решение. Для решения задачи четко разделим области исследования: $r < R$, т. е. в магнетике, $r > R$, т. е. в вакууме. Первоначально в области $r < R$ выберем в качестве контура окружность радиусом r , центр которой совпадает с осью цилиндра. Укажем направление \vec{H} и $d\vec{l}$ (рис. 72) и применим теорему о циркуляции $\oint \vec{H} d\vec{l} = H 2\pi r = I$. Следовательно, в этой области справедливы зависимости

$$H(r) = \frac{I}{2\pi r} \text{ и } B(r) = \frac{I\mu\mu_0}{2\pi r}.$$

Затем в области $r \geq R$ поступим аналогично и получим зависимости $H(r) = \frac{I}{2\pi r}$; $B(r) = \frac{I\mu_0}{2\pi r}$. Для наглядного представления данных зависимостей построим графики зависимости $H = f(r)$ и $B = f(r)$, учитывая, что $\mu > 1$, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Гн}}{\text{м}}$ (рис. 73).

Следует обратить внимание, что на границе магнетик – вакуум магнитная индукция \vec{B} претерпевает резкое изменение, в отличие от напряженности \vec{H} , что еще раз подтверждает зависимость B не только от тока проводимости I , но и от токов намагничивания (в данном случае поверхностных).

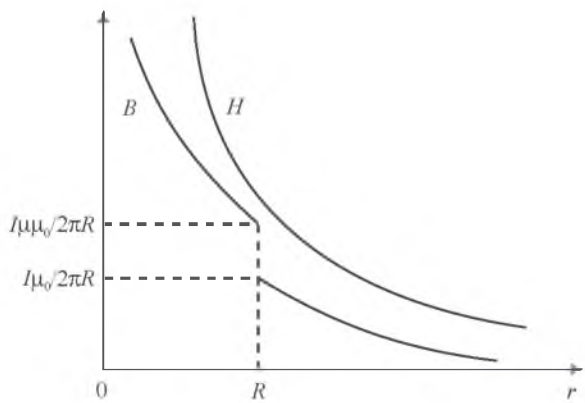


Рис. 73

Задача 57. Поверхностный ток проводимости I течет вдоль длинного однородного цилиндрического провода круглого сечения радиусом R . Материал провода – парамагнетик с магнитной восприимчивостью χ . Найти: а) зависимости $H = f(r)$, $B = f(r)$, $J = f(r)$; б) плотность тока намагничивания j' ; в) поверхностный молекулярный ток $I'_{\text{поверх}}$, объемный молекулярный ток $I'_{\text{объем}}$.

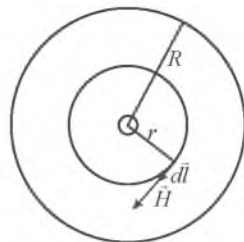


Рис. 74

Решение. В случае а) исследуем область $r < R$ и найдем по теореме о циркуляции зависимость $H = f(r)$. Выберем в качестве контура окружность радиусом r (рис. 74) и, считая, что ток проводимости на рисунке течет от нас, получим выражение $H 2\pi r = \frac{I}{\pi R^2} \pi r^2$, где $\frac{I}{\pi R^2} = j$ – плотность тока проводимости, $I_{\text{охв. контуром}} = j S_n$. Тогда $H(r) = \frac{I r}{2\pi R^2}$, следовательно, в этой области $B(r) = \frac{\mu \mu_0 I r}{2\pi R^2} (1 + \chi)$, а $J(r) = \chi H = \chi \frac{I r}{2\pi R^2}$, считая парамагнетик изотропным и однородным.

Рассуждая таким же последовательным образом в области $r > R$, получим соотношения: $H(r) = \frac{I}{2\pi r}$, $B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$, $J(r) = 0$.

В случае б) для нахождения плотности тока намагничивания j' воспользуемся теоремой о циркуляции для вектора \vec{J} в дифференциальной форме: $\vec{\nabla} \times \vec{J} = j'$ или $\text{rot } \vec{J} = \vec{j}'$.

Используя формулу связи $\vec{J} = \chi \vec{H}$ и выражение теоремы о циркуляции в дифференциальной форме для \vec{H} ($\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}$), после преобразования имеем $\vec{j}' = \chi \vec{j}$, т. е. численно плотность тока намагничивания пропорциональна плотности тока проводимости, т. е. $\vec{j}' = \chi \frac{I}{\pi R^2}$.

Заметим, что плотность тока намагничивания – величина постоянная, поэтому объемный молекулярный ток найдем как $I'_{\text{объем}} = j' \pi R^2 = \chi I$. Это выражение можно было бы получить другим способом, применяя теорему о циркуляции для вектора \vec{J} по контуру $r = R$ (внутри магнетика):

$$\oint \vec{J} d\vec{l} = I'_{\text{объем}} = \chi \oint \vec{H} d\vec{l} = \chi I.$$

В случае в) проводник является магнетиком, поэтому в нем протекают токи намагничивания как объемные, так и поверхностные. Рассмотрим контур в виде окружности, охватывающий проводник снаружи (непосредственно вблизи его поверхности). По теореме о циркуляции для вектора \vec{J} , поскольку во всех точках контура $J = 0$, алгебраическая сумма токов намагничивания (объемных и поверхностных) равна нулю: $I' = I'_{\text{объем}} + I'_{\text{поверх}} = 0$. Отсюда следует, что $I'_{\text{объем}} = -I'_{\text{поверх}}$, где знак «-» показывает, что токи намагничивания противоположны по направлению. Следовательно, численное значение $I'_{\text{поверх}} = \chi I$.

Задача 58. Длинный соленоид заполнен неоднородным парамагнетиком, восприимчивость которого зависит только от расстояния r до оси цилиндра как $\chi = \alpha r^2$, где α – постоянная. На оси индукция магнитного поля равна B_0 . Найти плотность тока намагничивания внутри магнетика $j'(r)$.

Решение. Рассмотрим точки на оси соленоида. Так как при этом $r = 0$, значит, $\chi = 0$, следовательно, $\mu = 1 + \chi = 1$. Поэтому, используя связь между векторами \vec{B}_0 и \vec{H}_0 , получаем соотношение $H_0 = \frac{B_0}{\mu_0}$.

В данном случае во всех других точках внутри соленоида $H = H_0$ (т. е. не зависит от r), это непосредственно следует из циркуляции вектора \vec{H} (т. е. $\oint \vec{H} d\vec{l} = I$) по контурам, указанным на рис. 75. Тогда можно записать, что намагниченность как функция расстояния r внутри цилиндра равна $J(r) = \alpha r^2 \frac{B_0}{\mu_0}$.

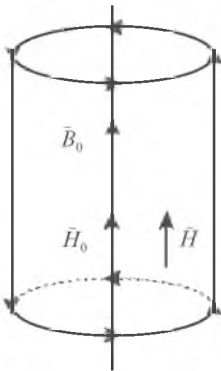


Рис. 75

Для нахождения плотности молекулярного тока существует несколько способов. Воспользуемся одним из них, который основывается на дифференциальной форме теоремы Остроградского – Гаусса для вектора \vec{J} , т. е. $\vec{\nabla} \times \vec{J} = \vec{j}'$ или $\text{rot } \vec{J} = \vec{j}'$. Замечая, что намагниченность зависит только от r , математически целесообразно выразить оператор $\vec{\nabla}$ в цилиндрической системе координат.

Так как векторы \vec{J} и \vec{H} сонаправлены, то вектор намагничивания можно записать как $\vec{J}(r) = \alpha r^2 \frac{B_0}{\mu_0} \vec{k}$.

Поэтому из всех компонент и производных вектора \vec{J}

отлична от нуля только величина $\frac{\partial J_z}{\partial r}$, следовательно, $\vec{\nabla} \times \vec{J} = -\frac{\partial J_z}{\partial r} \vec{e}_\varphi = -\vec{j}'$.

Выполняя расчет, получим, что $\vec{j}'(r) = -2\alpha r \frac{B_0}{\mu_0} \vec{e}_\varphi$. Следовательно, плотность молекулярного тока численно равна $j' = \frac{2\alpha B_0}{\mu_0} r$.

Задача 59. В точке 2 (рис. 76) вблизи границы раздела *магнетик – вакуум* вектор магнитной индукции \vec{B}_2 в вакууме составляет угол α_2 с нормалью к границе раздела, восстановленной в данной точке. Магнитная проницаемость магнетика – μ . Найти соотношение $\frac{\text{tg } \alpha_1}{\text{tg } \alpha_2}$, где α_1 – угол, который составляет вектор магнитной индукции \vec{B}_1 с нормалью в точке 1 на границе *магнетик – вакуум*.

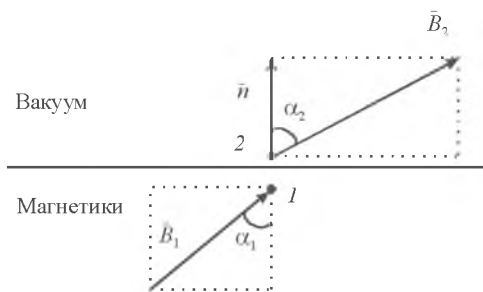


Рис. 76

Решение. Решим задачу в общем случае, когда граница раздела соответствует двум магнетикам с магнитной проницаемостью μ_1 и μ_2 соответственно. Согласно граничным условиям для вектора \vec{B} его нормальные составляющие оказываются одинаковыми по обе стороны границы раздела, т. е. $B_{1n} = B_{2n}$, а тангенциальные составляющие находятся в соотношении $\frac{B_{1\tau}}{\mu_1} = \frac{B_{2\tau}}{\mu_2}$. Последнее равенство является следствием граничного условия $H_{1\tau} = H_{2\tau}$, если на границе раздела двух однородных диэлектриков нет токов проводимости.

Так как $\text{tg } \alpha_1 = \frac{B_{1\tau}}{B_{1n}}$, а $\text{tg } \alpha_2 = \frac{B_{2\tau}}{B_{2n}}$, получим соотношение $\frac{\text{tg } \alpha_1}{\text{tg } \alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$.

Если вторая среда – вакуум ($\mu_2 = 1$), то $\frac{\text{tg } \alpha_1}{\text{tg } \alpha_2} = \mu$.

Задача 60. Прямой бесконечно длинный проводник с током I лежит в плоскости раздела двух магнетиков с проницаемостями μ_1 и μ_2 соответственно. Найти модуль вектора индукции магнитного поля во всем пространстве как функцию расстояния r до провода. Считать, что линии вектора \vec{B} являются окружностями на оси проводника.

Решение. На границе раздела магнетиков выделим точки 1 и 2, для которых справедливо граничное условие $B_{1n} = B_{2n}$. Так как в этих точках тангенциальные составляющие отсутствуют, это позволяет утверждать, что $B_1 = B_2$ (рис. 77).

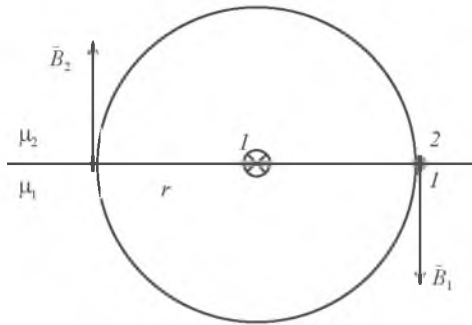


Рис. 77

Тогда можно определить, что $H_1 = \frac{B_1}{\mu_0 \mu_1}$ и $H_2 = \frac{B_2}{\mu_0 \mu_2}$.

Линии вектора \vec{H} также являются окружностями, центр которых совпадает с центром проводника. Поэтому в качестве контура интегрирования выберем окружность радиусом r и согласно теореме о циркуляции запишем $\oint \vec{H} d\vec{l} = I$, т. е. $H_1 \pi r + H_2 \pi r = I$.

Подставляя в это выражение вышеуказанные формулы, получим соотношение $\frac{B \pi r}{\mu_0} \left(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \right) = I$, из которого следует, что модуль индукции магнитного поля во всем пространстве зависит от расстояния r до провода как $\frac{I \mu_0 \mu_1 \mu_2}{\pi r (\mu_1 + \mu_2)} = B(r)$.

Ферромагнетиками называются вещества, которые в отсутствие внешнего магнитного поля обладают спонтанной намагниченностью. Типичным представителем ферромагнетиков является железо. Основная особенность ферромагнетиков – сложная нелинейная зависимость $B(H)$. Поэтому для ферромагнетиков нельзя ввести магнитную проницаемость как определенную постоянную величину, характеризующую магнитные свойства ферромагнетика.

Для каждого ферромагнетика экспериментально можно построить кривую Столетова, которая соответствует зависимости $\mu(H)$.

Задача 61. Тонкое железное кольцо со средним диаметром $d = 50$ см имеет на себе обмотку из $N = 800$ витков с током силой $I = 3,0$ А. В кольце есть поперечная прорезь шириной $b = 2,0$ мм (рис. 78). Пренебрегая рассеянием магнитного потока на краях зазора, найти с помощью графика (рис. 79) магнитную проницаемость железа в этих условиях.

Решение. Магнитную проницаемость железного кольца при условиях, указанных в задаче, можно рассчитать используя основную кривую намагничивания технически чистого железа (рис. 80).

Отсутствие рассеяния магнитного поля на краях зазора позволяет утверждать, что $B_1 = B_2 = B$, где B_1 – модуль индукции магнитного поля в железном кольце; B_2 – модуль индукции магнитного поля в зазоре.

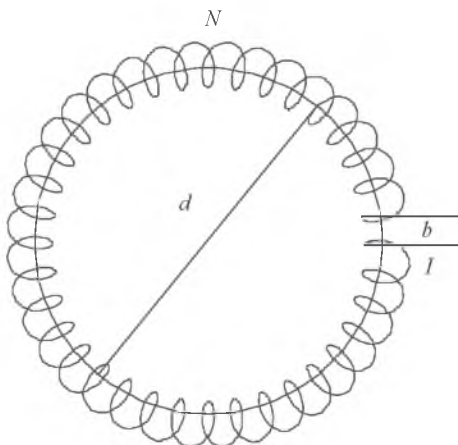


Рис. 78

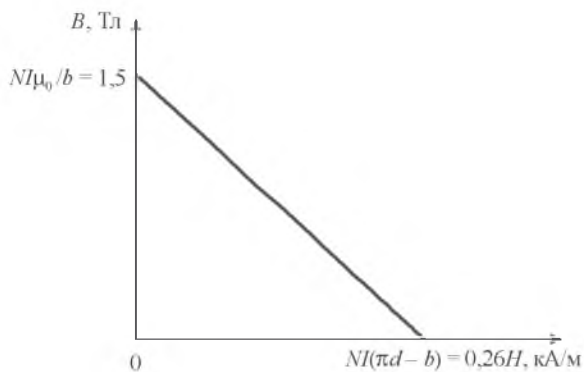


Рис. 79

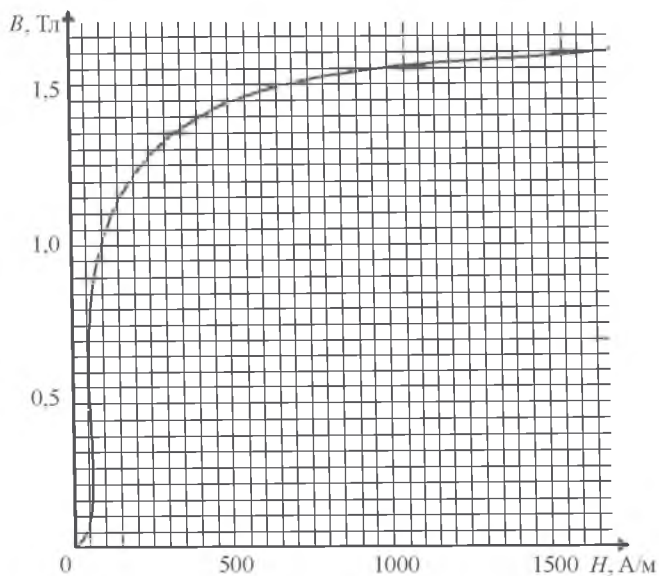


Рис. 80

Согласно теореме Остроградского – Гаусса о циркуляции вектора \vec{H} по контуру в виде окружности (см. рис. 78) диаметром d можно утверждать, что $H(\pi d - b) + H_0 b = NI$, где H и H_0 – модули вектора напряженности в железе и зазоре соответственно. Воспользуемся соотношени-

ем $H_0 = \frac{B}{\mu_0}$ и получим уравнение, выражающее связь между B и H :

$H(\pi d - b) + \frac{B}{\mu} b = NI$, которое после преобразования примет вид линей-

ной функции: $B = \frac{NI\mu_0}{b} - \frac{\mu_0(\pi d - b)H}{b}$. При подстановке численных значений функция представлена как аналитически: $B = 1,5 - 0,99H$ Тл, так и графически (см. рис. 79). Кроме этого, зависимость $B(H)$ представлена на графике (см. рис. 80). Искомые H и B должны удовлетворять обеим зависимостям.

Находим точки пересечения двух графиков, получаем для условий задачи $B = 1,25$ Тл, $H = 0,26 \frac{\text{кА}}{\text{м}}$. Для расчета магнитной проницаемости

железа при этих условиях используем формулу $\mu = \frac{B}{\mu_0 H} = 3,8 \cdot 10^3$.

17. ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

Задача 62. Длинный прямой проводник с током I и П-образный проводник с подвижной перемычкой расположены в одной плоскости (рис. 81). Перемычку, длина которой l , перемещают с постоянной скоростью v . Найти ЭДС индукции в контуре как функцию расстояния r .

Решение. Рассмотрим перемещение перемычки в течение времени dt . Площадь контура, которую заметает перемычка за это время, равна $dS = l dt$ (рис. 81). Определяем модуль и направление вектора магнитной индукции поля, создаваемого длинным прямым током. По теореме о циркуляции по контуру в виде окружности r , центр которой совпадает с центром прямого провода, имеем $B2\pi r = \mu_0 I$. Следовательно, модуль вектора магнитной индукции как функция расстояния r равен $B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$. Причем в пределах выделенного элемента dS поле можно считать однородным.

Направление вектора \vec{B} определяем как направление касательной к силовой линии поля, созданного прямым током I (в соответствии с правилом правого винта) (см. рис. 81). Выбираем сонаправлено с вектором \vec{B} направление единичной нормали \vec{n} к контуру.

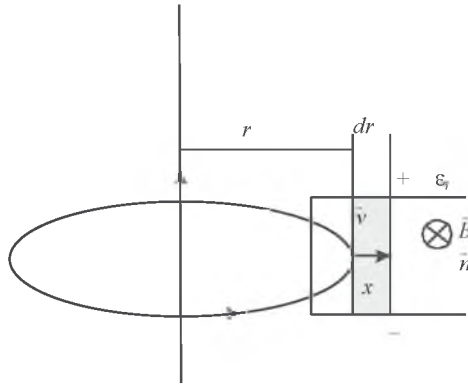


Рис. 81

Рассчитываем элементарный магнитный поток через выделенный контур как $d\Phi = \vec{B}d\vec{S} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dr$. Применяя закон Фарадея для электромаг-

нитной индукции, получим выражение $\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi r} lv$, где $v = \frac{dr}{dt}$.

Знак «-» определяет полярность ε_i или (согласно правилу Ленца) направление индукционного тока в перемычке.

Задача 63. По двум гладким медным шинам, установленным под углом α к горизонту, скользит под действием силы тяжести медная перемычка массой m . Шины замкнуты на конденсатор C . Расстояние между шинами l . Система находится в однородном магнитном поле с индукцией \vec{B} , перпендикулярном плоскости, в которой перемещается перемычка (рис. 82). Сопротивление шин, перемычки и скользящих контактов, а также самоиндукция контура пренебрежимо малы. Найти ускорение перемычки.

Решение. Изменение магнитного потока через контур площадью $dS = ldx$ обусловлено движением перемычки в течение времени dt . Выбираем \vec{n} к контуру сонаправлено с \vec{B} . Тогда изменение магнитного потока $d\Phi = BdS = Bl dx$. По закону Фарадея находим

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -Bl \frac{dx}{dt} = -Blv,$$

где $v = \frac{dr}{dt}$ – мгновенная скорость перемычки. Знак «-» определяет полярность ε_i или (согласно правилу Ленца) направление индукционного тока в перемычке.

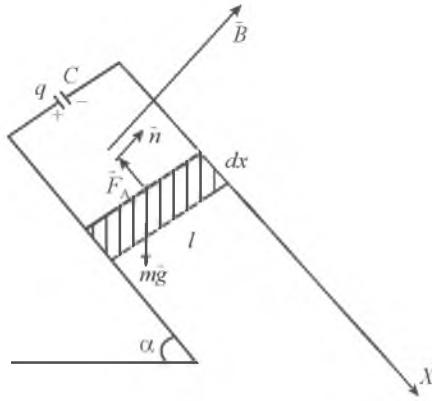


Рис. 82

Найдем силу индукционного тока. Для этого воспользуемся определением $I = \frac{dq}{dt}$, где dq – изменение заряда на обкладках конденсатора за время dt .

Так как движущаяся перемычка замкнута на конденсатор, в каждый момент времени справедливо равенство $\varepsilon_i = U_c$, где U_c – напряжение на конденсаторе, которое равно $U_c = \frac{q}{C}$. Следовательно, заряд на обкладках конденсатора можно выразить как $q = C\varepsilon_i = CBlv$, а силу индукционного тока I как $I = CB l \frac{dv}{dt}$.

Применим теперь основное уравнение динамики $m \frac{d\vec{v}}{dt} = \sum \vec{F}_{\text{внеш}}$ для поступательного движения перемычки. На перемычку действуют две силы: сила тяжести $m\vec{g}$ и сила Ампера \vec{F}_A , которая действует со стороны магнитного поля на перемычку с индукционным током.

По закону Ампера $\vec{F}_A = I [\vec{l} \times \vec{B}]$, т. е. численно равна

$$F_A = IlB = CB^2 l^2 \frac{dv}{dt},$$

направлена так, что тормозит движение перемычки (см. рис. 82). В проекции на ось OX получим

$$mg \sin \alpha - CB^2 l^2 \frac{dv}{dt} = m \frac{dv}{dt}.$$

Следовательно, ускорение перемычки равно $a = \frac{dv}{dt} = \frac{mg \sin \alpha}{m + CB^2 l^2}$.

Задача 64. На длинный прямой соленоид, имеющий диаметр сечения d и содержащий N витков на единицу длины, плотно надет круговой виток из медного провода с поперечным сечением S . Найти силу индукционного тока в витке, если ток в обмотке соленоида увеличивается с постоянной скоростью $\frac{dI_0}{dt}$ (рис. 83).

Решение. По закону Ома силу индукционного тока в витке можно определить как $I = \frac{\varepsilon_i}{R}$, где R – сопротивление витка; ε_i – ЭДС индукции, появившаяся в витке вследствие применения магнитного потока через его контур.

Сопротивление медного витка $R = \rho \frac{\pi d}{S}$, где ρ – удельное сопротивление меди; $l = \pi d$ – длина витка.

ЭДС индукции можно определить по закону Фарадея:

$$\varepsilon_i = - \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{dB}{dt} \frac{\pi d^2}{4}.$$

Изменение потока магнитной индукции через контур кругового медного витка происходит за счет изменения поля соленоида, которое можно задать как $\frac{dB}{dt} = \mu_0 n \frac{dI_0}{dt}$.

Выполняя соответствующие подстановки, получим, что сила индукционного тока $I = \frac{\mu_0 n d S}{4\rho} \frac{dI_0}{dt}$. Направление индукционного тока согласно правилу Ленца будет такое, чтобы созданное индукционным током магнитное поле \vec{B}_i препятствовало нарастанию поля \vec{B} в соленоиде.

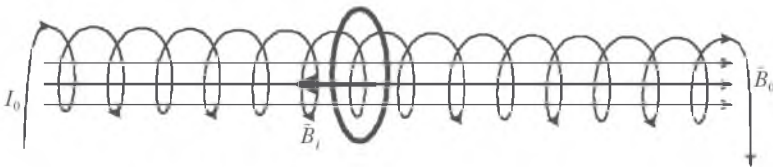


Рис. 83

Задача 65. Контур находится в однородном магнитном поле с индукцией B . Верхнюю часть контура – провод в виде полуокружности радиусом a – вращают с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси OO' . Сопротивление контура R . В момент $t = 0$ магнитный поток через контур – максимальный. Пренебрегая магнитным полем индукционного тока, найти среднюю мощность, выделяемую в контуре (рис. 84).

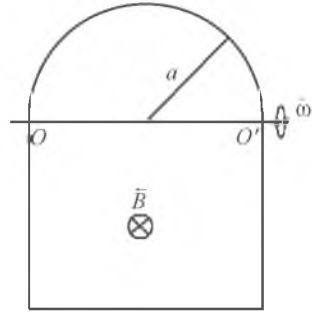


Рис. 84

Решение. Причина изменения потока магнитной индукции через контур при вращении провода в виде полуокружности – изменение угла α между векторами \vec{B} и \vec{n} (единичной нормали к контуру) по закону $\alpha = \omega t$.

Учитывая начальные условия ($t = 0, \Phi_{\max}$), запишем магнитный поток как функцию t : $\Phi(t) = BS \cos \omega t$, где $S = \frac{\pi a^2}{2}$ – площадь той части контура, через которую изменяется магнитный поток. По закону Фарадея

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} = BS\omega \sin \omega t,$$

т. е. ЭДС изменяется по гармоническому закону с периодом $T = \frac{2\pi}{\omega}$. Следовательно, по закону Ома сила индукционного тока $I = \frac{\varepsilon_i}{R} = \frac{BS\omega}{R} \sin \omega t$ также является гармонической функцией t . Среднюю мощность индукционного тока за период T можно рассчитать, используя закон Джоуля – Ленца:

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T I^2 R dt = \frac{1}{T} \int_0^T \left(\frac{B\pi a^2 \omega}{2R} \right)^2 R \sin^2 \omega t dt.$$

Интеграл вычислим как $\int_0^T \sin^2 \omega t dt = \frac{1}{2} \int_0^T (1 - \cos 2\omega t) dt = \frac{T}{2}$. Следовательно, средняя за период T тепловая мощность индукционного тока

$$\text{равна } \langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T I^2 R dt = \frac{1}{T} \frac{(B\pi a^2 \omega)^2}{8R}.$$

Задача 66. Металлический диск радиусом R вращают с постоянной угловой скоростью ω вокруг его оси. Найти ЭДС индукции, действующую между центром и ободом диска, если: а) внешнего поля нет; б) имеется перпендикулярное к диску внешнее однородное магнитное поле с индукцией \vec{B} .

Решение. Для случая а) рассмотрим первоначально причины возникновения ЭДС между центром и ободом вращающегося металлического диска. При вращении металлического диска на носители электрического тока – электроны – начинает действовать сила инерции, которая будет перемещать их к ободу диска. Перераспределившиеся электроны создадут электрическое поле \vec{E}^* . Найдем ЭДС индукции, действующую между центром и ободом диска, $\varepsilon_i = \int_0^R \vec{E}^* d\vec{r}$.

Рассмотрим электрон массой m , который находится на расстоянии r от центра диска (рис. 85). На него при вращении диска с угловой скоростью ω действует центробежная сила инерции $F_{ц.б} = m\omega^2 r$, которая выполняет роль сторонней силы. Соответствующее электрическое поле $E = \frac{F_{ц.б}}{e}$, где e – заряд электрона. Тогда при вращении диска ЭДС, дей-

ствующая между его центром и ободом, равна $\varepsilon_i = \int_0^R \frac{m\omega^2 r}{e} dr = \frac{m\omega^2 R^2}{2e}$.

Значение ЭДС индукции очень мало, даже при достаточно больших размерах диска и большой угловой скорости его вращения. Например, при $R = 25$ см и $\omega = 130 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$, $\varepsilon_i = 3,0$ нВ.

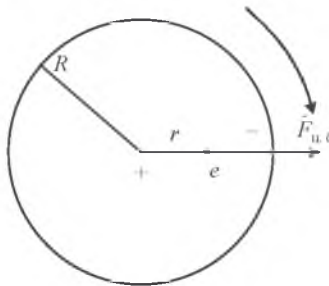


Рис. 85

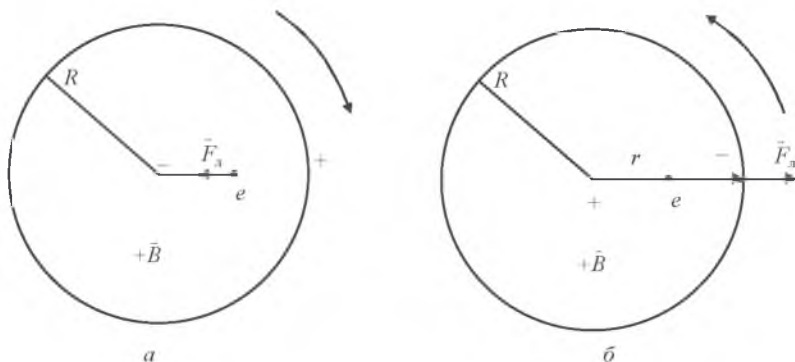


Рис. 86

Следует также заметить, что величина ЭДС и ее полярность от направления вращения диска (по или против часовой стрелки) не зависит.

В случае б) если вращающийся металлический диск находится в перпендикулярном плоскости диска магнитном поле, то на электроны, кроме центробежной силы инерции, действует сила Лоренца: $\vec{F}_Л = e[\vec{v} \times \vec{B}]$ (рис. 86), направление которой существенно зависит от направления вращения диска и модуль которой значительно превышает численное значение центробежной силы инерции даже при полях с индукцией $B = 0,5$ мТл. Поэтому в дальнейшем расчете будем учитывать только силу Лоренца, воздействие которой на электрон будет определяющим. Выполним преобразования, учитывая, что $\vec{v} = [\vec{\omega} \times \vec{r}]$, $\vec{B} \parallel \vec{\omega}$, $\vec{B} \perp \vec{r}$, $\vec{\omega} \perp \vec{r}$. Тогда

$$\vec{F}_Л = -e[[\vec{\omega} \times \vec{r}] \times \vec{B}] = e[\vec{B} \times [\vec{\omega} \times \vec{r}]] = e(\vec{\omega}(\vec{B}\vec{r}) - \vec{r}(\vec{B}\vec{\omega})) = \pm eB\omega\vec{r}.$$

Знак «+» соответствует случаю, когда диск вращается против часовой стрелки (т. е. $\vec{B} \uparrow \downarrow \vec{\omega}$) (см. рис. 86, б), знак «-» – вращению по часовой стрелке (т. е. $\vec{B} \uparrow \uparrow \vec{\omega}$) (см. рис. 86, а).

Магнитная сила – сила Лоренца – выполняет роль сторонней, ей соответствует поле $\vec{E}^* = \frac{\vec{F}_Л}{-e} = \mp \omega B \vec{r}$. Возникающая ЭДС индукции между центром и ободом вращающегося диска

$$\varepsilon_i = \int_0^R \vec{E}^* d\vec{r} = \int_0^R \mp \omega B \vec{r} d\vec{r} = \mp \frac{\omega B R^2}{2}.$$

Знак « \mp » определяет полярность ЭДС индукции между центром и ободом вращающегося диска в направлении против часовой стрелки и по часовой стрелке. Численное значение ЭДС индукции при $B = 5,0$ мТл, $\omega = 130 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$ и $R = 25$ см равно $\varepsilon_i = 20$ мВ (т. е. ЭДС индукции, возникающая вследствие воздействия на электроны силы Лоренца, превышает ЭДС, возникающую под воздействием центробежной силы инерции $\sim 10^6$ раз).

В итоге можно утверждать, что возбуждение ЭДС индукции в движущихся проводниках в магнитном поле объясняется действием магнитной силы Лоренца $\sim [\vec{v} \times \vec{B}]$ на электроны и, следовательно, их дальнейшим перераспределением в проводнике.

Задача 67. Непроводящее тонкое кольцо массой m , имеющее заряд q , может свободно вращаться вокруг своей оси. В начальный момент кольцо покоилось и магнитное поле отсутствовало. Затем включили однородное магнитное поле, перпендикулярное к плоскости кольца, которое начало нарастать во времени по некоторому закону $\vec{B}(t)$. Найти угловую скорость $\vec{\omega}$ кольца в зависимости от индукции $\vec{B}(t)$.

Решение. Первоначально выясним причины, которые вызвали вращение непроводящего покоящегося заряженного кольца. Согласно теории Максвелла изменяющееся во времени магнитное поле порождает вихревое электрическое поле независимо от наличия проводящего контура. Уравнение, выражающее связь между вихревым электрическим и вихревым магнитным полями, имеет вид $[\vec{\nabla} \times \vec{E}] = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$. При этом циркуляция вектора

\vec{E} по любому неподвижному контуру определяется как $\oint \vec{E} d\vec{l} = \varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}$.

т. е. закон электромагнитной индукции справедлив, когда магнитный поток сквозь контур меняется за счет изменения во времени магнитного поля. Если в области возникновения вихревого электрического поля \vec{E} находится заряд q , то на него воздействует сила $\vec{F} = q\vec{E}$, которая при определенных условиях создает вращающий момент силы \vec{M} , относительно некоторой оси вращения, что свидетельствует о возможности возникновения вращательного движения.

Для описания вращения кольца вокруг своей оси используем основное уравнение вращательного движения: $I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{M}_{\text{внеш}}$, где $I = mr^2$ – момент

инерции кольца радиусом r (рис. 87); $\vec{M}_{\text{рез}}$ – результирующий момент сил, действующих на заряженное кольцо со стороны возникающего электрического поля.

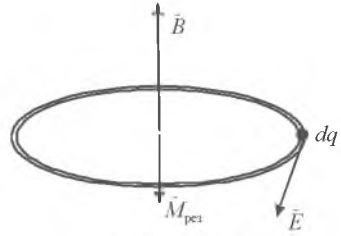


Рис. 87

Для расчета $\vec{M}_{\text{рез}}$ мысленно выделим элемент кольца с зарядом dq и определим элементарный вращающий момент относительно оси кольца, который создает сила $d\vec{F} = \vec{E}dq$, как $d\vec{M} = [\vec{r} \times d\vec{F}]$. Учитывая, что $\vec{r} \perp \vec{E}$ для каждого элемента кольца, получим, что численное значение $M_{\text{рез}} = qEr$. Вектор $\vec{M}_{\text{рез}}$ направлен по оси кольца так, что вызывает его вращение по часовой стрелке. Далее для расчета E используем теорему о циркуляции по контуру в виде окружности радиусом r . Запишем $\oint \vec{E} d\vec{l} = \epsilon_i$, т. е. $E2\pi r = \epsilon_i$, откуда следует, что $E = \frac{\epsilon_i}{2\pi r}$.

Для расчета ϵ_i используем закон Фарадея: $\epsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{dB}{dt}\pi r^2$. Следовательно, $E = -\frac{dB}{dt} \frac{r}{2}$, а $M_{\text{рез}} = -\frac{dB}{dt} \frac{qr^2}{2}$. Знак « \rightarrow » показывает, что линии вихревого электрического поля, индуцированного изменением поля \vec{B} , образуют с вектором $\frac{d\vec{B}}{dt}$ левовинтовую систему.

Подставляя полученное выражение в основное уравнение динамики для вращательного движения, имеем $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = -\frac{q}{2m} \frac{d\vec{B}}{dt}$, или $\vec{\omega}(t) = -\frac{q}{2m} \vec{B}(t)$.

18. САМОИНДУКЦИЯ. ИНДУКТИВНОСТЬ. ВЗАИМНАЯ ИНДУКЦИЯ

Задача 68. Катушку индуктивности L и сопротивление R подключили к источнику постоянного напряжения. Через какое время ток через катушку достигнет η (%) установившегося значения?

Решение. В момент времени $t = 0$ быстро повернем ключ K из верхнего положения в нижнее (рис. 88), т. е. мы подключим к катушке индуктивности источник ЭДС ϵ . Ток в цепи начинает нарастать, и в катушке возникает

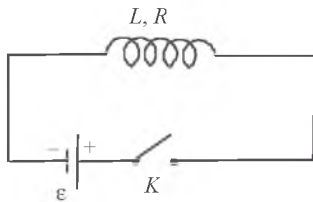


Рис. 88

переменное магнитное поле, которое через витки катушки создает переменный магнитный ток. Это изменение (нарастание) магнитного потока является причиной порождения ЭДС самоиндукции ε_S , противодействующей в конечном итоге появлению в цепи электрического тока. Согласно закону Ома в любой момент времени справедливо

$$\text{равенство } I = \frac{\varepsilon + \varepsilon_S}{R}.$$

Воспользовавшись законом самоиндукции $\varepsilon_S = -L \frac{dI}{dt}$, получим выражение $RI = \varepsilon - L \frac{dI}{dt}$, где $\frac{dI}{dt}$ – скорость нарастания тока в цепи. Преобразуем данное уравнение к виду, удобному для интегрирования. Для этого введем новую переменную $U = RI - \varepsilon$, для которой $dU = R dI$, и величину $\tau = \frac{L}{R}$ – постоянную времени (время релаксации). После преобразования получим выражение $\frac{dU}{U} = -\frac{dt}{\tau}$, которое проинтегрируем в пределах по переменной от $-\varepsilon$ до $RI - \varepsilon$ и по времени t от 0 до t .

Полученное соотношение имеет вид $\ln \frac{RI - \varepsilon}{-\varepsilon} = -\frac{t}{\tau}$. Отсюда следует, что сила тока в цепи нарастает по закону $I = I_0(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$, где $I_0 = \frac{\varepsilon}{R}$ представляет собой величину силы установившегося тока. Величина τ характеризует быстроту установления тока. График возрастания силы тока в цепи от времени представлен на рис. 89. Используя условие задачи, что $I = \eta I_0$, получим $\eta I_0 = I_0(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$, откуда следует, что время, через которое ток в катушке достигнет указанного значения I , равно $t = -\frac{L}{R} \ln(1 - \eta)$.

Аналогичные рассуждения можно провести для процесса исчезновения тока при размыкании цепи. Так как в этом случае ток через катушку начинает убывать, возникающая ЭДС самоиндукции будет препятствовать исчезновению силы тока в цепи по закону $I = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$, где τ теперь будет характеризовать скорость убывания тока в цепи (τ – время, в течение которого сила тока уменьшается в e раз).

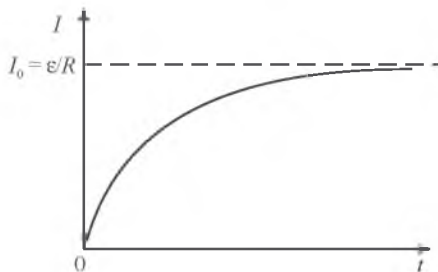


Рис. 89

Задача 69. Определить индуктивность тороидального соленоида из N витков, внутренний радиус которых R , а поперечное сечение имеет форму квадрата со стороной a . Внутри соленоида пространство заполнено изотропным магнетиком с магнитной проницаемостью μ .

Решение. Известно, что индуктивность L как характеристика контура зависит от формы и размеров, а также от магнитных свойств окружающей среды и не зависит от силы тока I , протекающего в контуре.

Поэтому пропустим по виткам тороидального соленоида ток I . Тогда полный магнитный поток через поперечное сечение соленоида будет прямо пропорционален силе тока и можно записать, что $\Phi = LI$, где L – индуктивность соленоида.

Следовательно, задача сводится к нахождению полного магнитного потока Φ через поперечное сечение соленоида. Для этого выделим в поперечном сечении соленоида элементарную площадку $dS = adr$ (рис. 90). Элементарный магнитный поток через эту площадку равен $d\Phi = \vec{B}d\vec{S} = Badr$, считая, что $\vec{B} \uparrow \uparrow \vec{n}$.

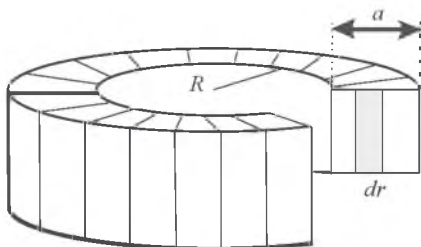


Рис. 90

Для дальнейшего решения необходимо найти B как функцию расстояния r от центра симметрии тороидального соленоида. Но так как пространство внутри соленоида заполнено магнетиком, первоначально определяем значение H по теореме о циркуляции по контуру в виде окружности радиусом r , т. е. $H2\pi r = NI$, а затем модуль вектора индукции как $B(r) = \mu_0 H = \mu_0 \frac{NI}{2\pi r}$.

Тогда элементарный магнитный поток через выделенную площадку численно равен $d\Phi = \mu_0 \frac{NI}{2\pi r} a dr$. Магнитный поток через поперечное сечение одного витка соленоида равен

$$\Phi_1 = \int_R^{R+a} \mu_0 \frac{NI}{2\pi r} a dr = \mu_0 \frac{NI}{2\pi r} \ln \frac{R+a}{a}.$$

Полный магнитный поток через поперечное сечение N витков соленоида равен $\Phi = N\Phi_1$, или $\Phi = \mu_0 \frac{N^2 I a}{2\pi} \ln \frac{R+a}{a}$.

В итоге находим индуктивность тороидального соленоида:

$$L = \frac{\Phi}{I} = \mu_0 \frac{N^2 a}{2\pi} \ln \frac{R+a}{a}.$$

Задача 70. Тонкое кольцо из магнетика имеет средний диаметр d и несет на себе обмотку из N витков. Площадь поперечного сечения кольца – S . В кольце сделана поперечная прорезь длиной b . Когда по обмотке течет ток I , магнитная проницаемость магнетика – μ . Пренебрегая рассеянием магнитного потока на краях зазора, найти индуктивность системы (рис. 78).

Решение. Данную задачу можно решить двумя способами: определить индуктивность системы через полный поток и через энергию. Так как первый способ аналогичен решению предыдущей задачи, мы воспользуемся вторым способом, в основе которого будет использована формула

$$L = \frac{1}{I^2} = \int \frac{B^2}{\mu_0} dV.$$

По условию задачи рассеянием магнитного потока на краях зазора следует пренебречь. Данное условие позволяет утверждать, что $B_1 = B_2 = B$, где B_1 и B_2 – модули магнитной индукции в магнетике и зазоре. Тогда в области прорези $H_0 = \frac{B}{\mu_0}$, в области магнетика $H = \frac{B}{\mu}$. Применим тео-

рему о циркуляции для \vec{H} по контуру в виде окружности диаметром d , тогда получим $(\pi d - b)H + H_0 b = NI$, или $(\pi d - b)\frac{B}{\mu\mu_0} + \frac{B}{\mu_0}b = NI$.

Из данного выражения находим $B = \frac{NI\mu\mu_0}{(\pi d - b) + \mu b} \approx \frac{NI\mu\mu_0}{\pi d + \mu b}$, учитывая здесь и в дальнейшем, что $b \ll d$.

Тогда найдем индуктивность системы:

$$L = \frac{1}{I^2} \left(\frac{B^2}{\mu\mu_0} S(\pi d - b) + \frac{B^2}{\mu_0} Sb \right) \approx \frac{\mu N^2 S}{\left(\frac{\pi d}{\mu} + b \right)}.$$

Задача 71. Рамка и прямой провод лежат в одной плоскости, причем ближайшая к проводу сторона рамки длиной b параллельна проводу и отстоит от него на расстояние l (рис. 91). Вычислить взаимную индуктивность прямого длинного провода и прямоугольной рамки со сторонами a и b .

Решение. Пропустим по прямому длинному проводу ток силой I , создающий в окружающем пространстве неоднородное поле, модуль вектора индукции \vec{B} которого является функцией расстояния r от провода до точки наблюдения как $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ (согласно теореме о циркуляции вектора \vec{B} по контуру в виде окружности радиусом r). Тогда через элементарную площадку площадью $dS = b dr$ поле создает элементарный магнитный поток $d\Phi = \frac{\mu_0 I b dr}{2\pi r}$.

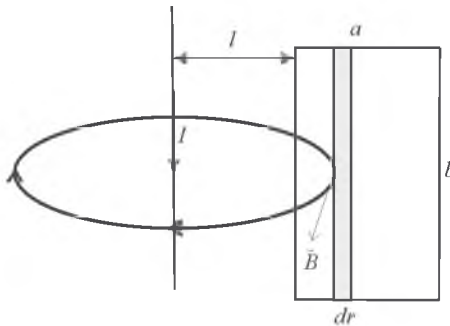


Рис. 91

Полный магнитный поток через площадь всей рамки равен

$$\Phi = \int_R^{l+a} \mu_0 \frac{Ib}{2\pi r} dr = \mu_0 \frac{Ib}{2\pi} \ln \frac{l+a}{l}.$$

Из теории известно, что полный магнитный поток через площадь рамки прямо пропорционален силе тока I , текущего в проводнике, т. е. $\Phi = L_{12}I$, где L_{12} – коэффициент пропорциональности, который называют *взаимной индуктивностью рамки и прямого провода*. Следовательно, $L_{12} = \mu_0 \frac{b}{2\pi} \ln \frac{l+a}{l}$. Из ответа видно, что взаимная индуктивность зависит от формы, размеров и взаимного расположения прямого провода и рамки, а также от магнитной проницаемости окружающей среды ($\mu = 1$).

19. ЭНЕРГИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Задача 72. Ток I течет по длинному прямому проводнику круглого сечения с магнитной проницаемостью μ . Найти энергию магнитного поля внутри провода в расчете на единицу его длины.

Решение. Для расчета энергии магнитного поля, заключенной внутри проводника, воспользуемся формулой $W = \int w dW$, где w – объемная плотность энергии магнитного поля. Из теории известно, что эту величину можно задать как функцию расстояния r от оси провода по формуле $w(r) = \frac{B^2}{2\mu_0}$, где B – модуль магнитной индукции как функция расстояния r от оси провода.

Так как провод выполнен из магнетика, для определения B воспользуемся сначала теоремой о циркуляции \vec{H} по контуру радиусом r , проведенному внутри проводника (рис. 92), причем ток, охватываемый контуром, можно рассчитать как $I = \oint \vec{H} d\vec{r} = H 2\pi r$, $I = \frac{I}{\pi R^2} \pi r^2$, где $j = \frac{I}{\pi R^2}$ – плотность тока; R – радиус провода.

В итоге получается, что модуль H как функция расстояния r от оси провода имеет вид $H = \frac{Ir}{2\pi R^2}$.

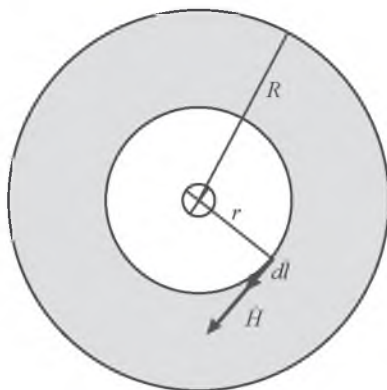


Рис. 92

Следовательно, искомая величина $B = \mu\mu_0 H = \frac{\mu\mu_0 I r}{2\pi R^2}$. Выразим объемную плотность энергии магнитного поля внутри провода как $w = \frac{\mu\mu_0 I^2 r^2}{8\pi^2 R^4}$.

Рассчитаем энергию, заключенную внутри провода в расчете на единицу его длины l . При расчете используем выражение объема элементарного цилиндра единичной длины $dV = 2\pi r dr$. Получаем, что

$$W_1 = \int_0^R \frac{\mu\mu_0 I^2 r^2}{8\pi^2 R^4} 2\pi r dr = \frac{\mu\mu_0 I^2}{16\pi}$$

Задача 73. Тонкое кольцо из магнетика имеет средний диаметр d и несет на себе обмотку из N витков. Площадь поперечного сечения кольца – S . В кольце сделана поперечная прорезь длиной b . Когда по обмотке течет ток I , магнитная проницаемость магнетика – μ . Пренебрегая рассеянием магнитного потока на краях зазора, найти отношение магнитной энергии, заключенной в зазоре, к магнитной энергии, заключенной в магнетике.

Решение. По условию задачи рассеянием магнитного потока на краях зазора можно пренебречь, следовательно, можно утверждать, что $B_1 = B_2 = B$, где B_1 и B_2 – модули индукции магнитного поля в магнетике и в прорези соответственно. Тогда в области прорези $H_0 = \frac{B}{\mu_0}$, в области магнетика $H_0 = \frac{B}{\mu\mu_0}$.

Применим теорему о циркуляции для \vec{H} по контуру в виде окружности диаметром d (рис. 93).

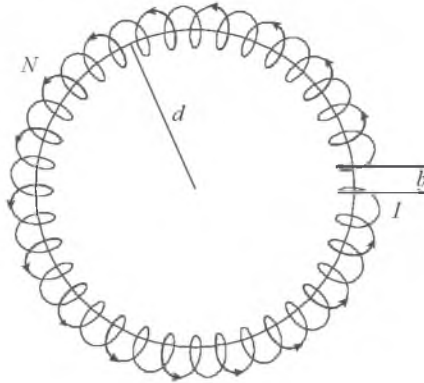


Рис. 93

Тогда получим $(\pi d - b)H + H_0 b = NI$, или $(\pi d - b)\frac{B}{\mu\mu_0} + \frac{B}{\mu_0}b = NI$. Из данного выражения находим $B = \frac{NI\mu\mu_0}{(\pi d - b) + \mu b} \approx \frac{NI\mu\mu_0}{\pi d + \mu b}$, здесь и в дальнейшем учитываем, что $b \ll d$. Энергию магнитного поля, заключенную в прорези, найдем как $W_1 = \int w_1 dV$, где $w_1 = \frac{B^2}{2\mu_0}$ – объемная плотность энергии в прорези.

Энергию магнитного поля, заключенную в магнетике, найдем аналогично: $W_2 = \int w_2 dV$, где $w_2 = \frac{B^2}{2\mu\mu_0}$ – объемная плотность энергии в магнетике. В результате получим выражения для энергии W_1 , заключенной в прорези, и W_2 , заключенной в магнетике соответственно:

$$W_1 = \frac{\mu\mu_0 N^2 I^2 b S}{(\pi d + \mu b)^2}, \quad W_2 = \frac{\mu^2 \mu_0 N^2 I^2 (\pi d - b) S}{2(\pi d + \mu b)^2}.$$

В итоге получим отношение величин: $\frac{W_1}{W_2} \approx \frac{\mu b}{\pi d}$.

Задача 74. Найти энергию взаимодействия двух контуров с токами I_1 и I_2 , если контуры имеют вид окружностей с радиусами a и b (причем $a \ll b$). Центры этих контуров находятся в одной точке, плоскости контуров составляют друг с другом угол α .

Решение. Из теории известно, что взаимная энергия контуров с токами I_1 и I_2 определяется по формуле $W_{12} = L_{12}I_1I_2$, где L_{12} – взаимная индуктивность контуров. Для расчета L_{12} используем формулу $\Phi_1 = L_{12}I_1$, где Φ_1 – полный магнитный поток через площадь первого контура, вызванный магнитным полем, созданным вторым контуром.

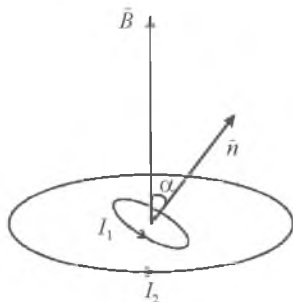


Рис. 94

Магнитная индукция \vec{B} , которую в центре витка создает круговой ток I_2 , численно равна $B = \frac{\mu_0 I_2}{2b}$ (рис. 94).

При условии, что $a \ll b$ и что плоскости контуров составляют друг с другом угол α , запишем полный магнитный поток:

$$\Phi_1 = \frac{\mu_0 I_2}{2b} \pi a^2 \cos \alpha.$$

Тогда взаимная индукция контуров равна $L_{12} = \frac{\mu_0 \pi a^2 \cos \alpha}{2b}$.

В итоге получаем, что энергия взаимодействия контуров с токами равна $W_{12} = \frac{\mu_0 \pi a^2 I_1 I_2}{2b} \cos \alpha$.

20. ЦЕПИ ПЕРЕМЕННОГО ТОКА

В значительной части цепей переменного тока протекающие токи можно считать квазистационарными. Для конденсаторов и катушек индуктивности с заданными параметрами при постоянной частоте тока емкостное и индуктивное сопротивления постоянны. Поэтому в таких цепях для амплитудных и действующих значений тока и напряжения выполняется закон Ома.

При расчете последовательной цепи переменного тока необходимо:

1) рассчитать сопротивления: индуктивное $x_L = \omega L$, емкостное $x_C = \frac{1}{\omega C}$, реактивное $x = x_L - x_C$, полное (импеданс) $Z = \sqrt{R^2 + (x_L - x_C)^2}$;

2) сдвиг фаз между током и напряжением $\operatorname{tg} \varphi = \frac{x_L - x_C}{R}$;

3) использовать закон Ома для амплитудных $I_0 = \frac{U_0}{Z}$ или действующих значений тока и напряжения $I = \frac{U}{Z}$;

4) потребляемую цепью мощность и коэффициент полезного действия цепи рассчитывать по формулам $S = IU$ и $\eta = \cos \varphi$ соответственно.

При расчете цепи переменного тока, состоящей из параллельных участков, рационально использовать метод проводимостей:

1) рассчитать активную $g_i = \frac{R_i}{Z_i^2}$, реактивную $b_i = \frac{X_i}{Z_i^2}$ проводимости каждой из параллельных ветвей;

2) рассчитать активную $g = \sum_i g_i$, реактивную $b = \sum_i b_i$ и полную $\Lambda = \sqrt{g^2 + b^2}$ проводимости всей цепи;

3) рассчитать действующее значение силы тока в магистрали $i = U \Lambda$;

4) найти сдвиг фаз между напряжением и мгновенным током в цепи $\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{g}$;

5) потребляемую цепью мощность и коэффициент полезного действия цепи рассчитать по формулам $S = IU = U^2 \Lambda$ и $\eta = \cos \varphi$ соответственно.

Задача 75. Последовательный участок цепи переменного тока состоит из резистора сопротивлением $R = 53,3$ Ом, конденсатора емкостью $C = 21,0$ мкФ и катушки с индуктивностью $L =$ мГн. Частота переменного тока $\nu = 50,0$ Гц, сила тока зависит от времени по закону $i = 2,94 \sin \omega t$ (А). Найти зависимость от времени напряжения на данном участке, коэффициент полезного действия цепи, потребляемую мощность.

Решение. Если ток зависит от времени по гармоническому закону, то в цепи с постоянными параметрами напряжение также изменяется от времени по гармоническому закону с той же частотой $\nu = U_0 \sin(\omega t + \varphi)$.

Так как амплитуда силы тока задана в условии, следовательно, $U_0 = I_0 Z$.

Для расчета импеданса вычислим индуктивное и емкостное сопротивления:

$$x_L = \omega L = 2\pi\nu L = 6,28 \cdot 50 \cdot 0,19 = 59,66 \text{ Ом.}$$

$$x_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi\nu C} = \frac{10^6}{6,28 \cdot 50 \cdot 21} = 151,7 \text{ Ом.}$$

Так как это промежуточные результаты вычислений, они округлены с одной запасной цифрой.

Значение

$$Z = \sqrt{R^2 + (x_L - x_C)^2} = \sqrt{53,2^2 + (59,66 - 151,7)^2} \approx 106,5 \text{ Ом.}$$

Амплитудное значение напряжения

$$U_0 = I_0 Z = 2,94 \cdot 106,5 \approx 313 \text{ В.}$$

Сдвиг фаз между током и напряжением

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{x_L - x_C}{R} = \frac{-92,04}{53,5} \approx -1,720, \quad \varphi = -59^\circ 50' \approx -0,332 \text{ рад.}$$

Отрицательное значение сдвига фаз между током и напряжением означает, что мгновенное напряжение отстает по фазе на 0,332 рад от мгновенной силы тока.

Зависимость напряжения от времени

$$u = U_0 \sin(\omega t + \varphi) = 313 \sin(314t - 0,322).$$

Коэффициент полезного действия определяется косинусом сдвига фаз между током и напряжением: $\eta = \cos \varphi = 0,865$.

Потребляемая цепью, или полная, мощность равна

$$S = IU = \frac{I_0 U_0}{2} = \frac{2,94 \cdot 313}{2} \approx 460 \text{ Вт.}$$

Задача 76. Участок цепи из двух параллельных ветвей подключен к источнику переменного напряжения, зависящего от времени по закону

$u = U_0 \sin(\omega t + \varphi)$, где $U_0 = 100 \text{ В}$; $\omega = 1000 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$. В первой ветви последо-

вательно включены резистор сопротивлением $R_1 = 40 \text{ Ом}$ и конденсатор емкостью $C = 150 \text{ мкФ}$. Во второй ветви последовательно включены резистор сопротивлением $R_2 = 40 \text{ Ом}$ и катушка с индуктивностью $L = 60 \text{ мГн}$. Найти зависимость силы магистрального тока, коэффициента полезного действия цепи и потребляемой ею мощности от времени.

Решение. Магистральным называется ток, проходящий по цепи до разветвления (рис. 95). Если напряжение изменяется по

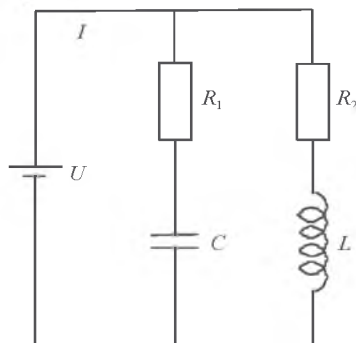


Рис. 95

гармоническому закону, то и ток будет зависеть от времени по закону $i = I_0 \sin(\omega t + \varphi)$. Так как амплитудное значение напряжения задано в условии, $I_0 = U_0 \Lambda$.

Для расчета проводимости всей цепи, рассчитываем сначала активную и реактивную проводимости первой ветви:

$$g_1 = \frac{R_1}{Z_1^2} = \frac{R_1}{R_1^2 + (\omega C)^{-2}} = \frac{40}{1600 + 6,67^2} \approx 0,024 \text{ Ом}^{-1};$$

$$b_1 = \left(\frac{Z_1^2}{\omega C} \right)^{-1} = \frac{6,67}{1600 + 6,67^2} \approx 0,004 \text{ Ом}^{-1}.$$

Так как это промежуточные результаты вычислений, они округлены с одной запасной цифрой. Аналогично рассчитываем активную и реактивную проводимости второй ветви:

$$g_2 = \frac{R_2}{Z_2^2} = \frac{R_2}{R_2^2 + (\omega L)^2} = \frac{30}{900 + 60^2} \approx 0,007 \text{ Ом}^{-1},$$

$$b_2 = \frac{\omega l}{Z_2^2} = \frac{60}{900 + 60^2} \approx 0,013 \text{ Ом}^{-1}.$$

Активная проводимость всей цепи $g = g_1 + g_2 = 0,031 \text{ Ом}^{-1}$, реактивная проводимость всей цепи $b = b_1 + b_2 = 0,017 \text{ Ом}^{-1}$. Полная проводимость $\Lambda = \sqrt{g^2 + b^2} = \sqrt{0,031^2 + 0,017^2} = 0,035 \text{ Ом}^{-1}$.

Амплитудное значение силы тока $I_0 = U_0 \Lambda = 100 \cdot 0,035 = 3,5 \text{ А}$.

Тангенс сдвига фаз между током и напряжением

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{g} = \frac{0,017}{0,031} = 0,548, \quad \varphi = -28^\circ 40' \approx 0,50 \text{ рад.}$$

и ток в магистрали зависят от времени по закону $i = 3,5 \sin(1000t + 0,50)$. В этом выражении рассчитанные величины поставлены с двумя значащими цифрами, так как минимальное число значащих цифр в условии два.

Коэффициент полезного действия $\eta = \cos \varphi = 0,877 \approx 0,88$. Потребляемая цепью мощность

$$S = U^2 \Lambda = \frac{U_0^2}{2} \Delta = \frac{100^2}{2} \cdot 0,035 = 175 \text{ Вт} \approx 0,18 \text{ кВт.}$$

21. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА. ДВИЖЕНИЕ ЧАСТИЦ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ И МАГНИТНОМ ПОЛЯХ

Использование уравнений Максвелла при решении 10 различных задач показано в учебном пособии И. Е. Иродова «Основные законы электромагнетизма», поэтому рассмотрим одну задачу, решение которой основано на свойствах электромагнитных волн, вытекающих из уравнений Максвелла:

1) электромагнитные волны поперечные, т. е. колебания векторов напряженностей электрического и магнитного полей происходят в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны. В любой момент времени эти векторы и вектор скорости распространения волны взаимно перпендикулярны: $\vec{E} \perp \vec{H} \perp \vec{v}$;

2) колебания векторов \vec{E} и \vec{H} совпадают по фазе (синфазны);

3) объемные плотности энергии электрического и магнитного полей волны в любой момент времени равны;

4) для характеристики переноса энергии электромагнитной волной вводится вектор Умова – Пойтинга $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \vec{w}v$, определяющий плотность потока электромагнитной энергии через поверхность, которую проходит электромагнитная волна.

При движении нерелятивистской заряженной частицы со скоростью \vec{v} относительно какой-либо инерциальной системы отсчета в пространстве, в котором существуют стационарные электрическое и магнитное поля, на частицу действует сила Лоренца $\vec{F} = q\vec{E} + q(\vec{v} \times \vec{B})$. Расчет каких-либо характеристик движения можно проводить используя основные законы классической механики.

Задача 77. Плоская синусоидальная электромагнитная волна с частотой $\nu = 10$ кГц и амплитудой напряженности электрического поля $E_0 = 0,5 \frac{\text{мВ}}{\text{м}}$ распространяется в воздухе. Определить: а) какую энергию переносит волна через поверхность площадью $s = 1 \text{ см}^2$, расположенную перпендикулярно направлению распространения волны за промежуток времени $t = 1$ с; б) как изменится ответ при тех же данных, если волна будет распространяться в стекле с диэлектрической проницаемостью $\epsilon = 6$ и магнитной проницаемостью $\mu \approx 1$.

Решение. В случае а) энергия, переносимая электромагнитной волной за промежуток времени dt через поверхность, перпендикулярную направ-

лению распространения волны ds_n , определяется модулем вектора Умова –

Пойтинга $S = \frac{dW}{dt ds_n}$, а вектор – векторным произведением $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$.

Следовательно, искомая энергия $W = \int_0^t \left(\iint S ds \right) dt$.

В плоской электромагнитной волне колебания напряженности электрического поля и напряженности магнитного поля происходят в одной фазе, поэтому можно записать для мгновенных значений этих величин: $E = E_0 \sin \omega t$, $H = H_0 \sin \omega t$, где $\omega = 2\pi\nu$.

Кроме того, в любой момент времени векторы полей взаимно перпендикулярны: $\vec{E} \perp \vec{H}$, поэтому модуль вектора Умова – Пойтинга

$$S = EH \sin 90^\circ = E_0 \sin \omega t H_0 \sin \omega t = E_0 H_0 \sin^2 \omega t.$$

Найдем амплитуду вектора напряженности магнитного поля из соотношения для объемной плотности энергии электромагнитной волны:

$w_э = w_м$ или $\frac{\epsilon_0 \epsilon E_0^2}{2} = \frac{\mu_0 \mu H_0^2}{2}$. Для воздуха диэлектрическая проницаемость $\epsilon \approx 1$ и магнитная проницаемость $\mu \approx 1$, поэтому $H_0 = E_0 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}$.

Так как волна распространяется перпендикулярно поверхности с заданной величиной площади, интеграл

$$\iint \vec{S} ds^* = \iint S ds \cos 0^\circ = H_0 E_0 \sin^2 \omega t \iint ds = E_0^2 S \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \sin^2 \omega t.$$

Тогда энергия, проходящая через заданную поверхность:

$$W = \int_0^t E_0^2 S \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \frac{1 - \cos 2\omega t}{2} dt =$$

$$= E_0^2 S \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \left(t - \int_0^t \frac{\cos 2\omega t}{4\omega} d(2\omega t) \right) = E_0^2 S \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \left(t - \frac{\sin 2\omega t}{4\omega} \right),$$

$$W = (0,5 \cdot 10^{-3})^2 10^{-4} \sqrt{\frac{8,85 \cdot 10^{-12}}{12,56 \cdot 10^{-7}}} \left(1 - \frac{\sin 4\pi \cdot 10^4}{4\pi \cdot 10^4} \right) \approx$$

$$\approx 0,066 \cdot 10^{-13} \approx 7 \cdot 10^{-15} \text{ Дж.}$$

В случае б) при распространении в стекле в соответствии с формулой $\frac{\epsilon_0 \epsilon E_0^2}{2} = \frac{\mu_0 \mu H_0^2}{2}$ изменится амплитудное значение вектора напряженности магнитного поля. Так как для стекла $\epsilon \neq 1$, а $\mu \approx 1$, следовательно,

$H_0 = E_0 \sqrt{\frac{\epsilon_0 \epsilon}{\mu_0}}$ и переносимая энергия больше, чем в воздухе, в $\sqrt{\epsilon}$ раз:

$$W = E_0^2 S \sqrt{\frac{\epsilon_0 \epsilon}{\mu_0}} \left(t - \frac{\sin 2\omega t}{4\omega} \right) \approx 16 \cdot 10^{-15} \approx 2 \cdot 10^{-14} \text{ Дж.}$$

Не противоречит ли полученный результат тому, что скорость распространения в стекле в $\sqrt{\epsilon}$ раз меньше? Используем для проверки выражение для вектора Умова – Пойтинга $\vec{S} = w\vec{v}$, где $w = w_3 + w_M$ – объемная плотность энергии электромагнитной волны. Так как $w_3 = w_M$, значит, $w = 2w_3$, тогда в простейшем случае модуль вектора Умова – Пойтинга

$$S = \frac{\epsilon \epsilon_0 E_0^2}{2} \frac{1}{\sqrt{\epsilon \epsilon_0 \mu \mu_0}} = E_0^2 \sqrt{\frac{\epsilon \epsilon_0}{\mu_0}}, \text{ т. е. скорость распространения уменьшается в } \sqrt{\epsilon} \text{ раз, а объемная плотность энергии увеличивается в } \epsilon \text{ раз.}$$

В чем физический смысл увеличения переносимой энергии? Дело в том, что в воздухе, если принимается величина диэлектрической проницаемости $\epsilon = 1,000\,58 \approx 1$, не учитываются колебания зарядов вещества. При распространении электромагнитной волны в стекле этим нельзя пренебрегать, так как энергия электромагнитной волны не только энергия электромагнитного поля, но и энергия колебаний зарядов в веществе.

Задача 78. Протон, ускоренный разностью потенциалов U , попадает в однородное электрическое поле плоского конденсатора, длина пластин которого в направлении движения равна l . Напряженность поля меняется во времени как $E = bt$, где b – постоянная. Считая протон нерелятивистским, найти угол между направлениями его движения до и после пролета конденсатора, если протон попадает в поле в момент $t = 0$. Краевыми эффектами пренебречь.

Решение. Фраза «ускоренный разностью потенциалов» означает, что до влета в конденсатор протон побывал в другом электрическом поле. А работа этого электрического поля пошла на сообщение протону кинетической энергии, т. е. $A = qU = \frac{mv_0^2}{2}$, откуда $v_0 = \sqrt{\frac{2qU}{m}}$ – скорость протона в момент начала движения в конденсаторе.

Согласно условию протон влетает в пространство конденсатора параллельно пластинам, т. е. перпендикулярно вектору напряженности электрического поля. Так как масса частицы $m \approx 1,67 \cdot 10^{-27}$ кг, а заряд $q \approx 1,60 \cdot 10^{-19}$ Кл, модуль электрической силы много больше модуля силы тяжести $qE \gg mg$. Силами сопротивления движению по умолчанию можно пренебречь. Поэтому движение протона можно рассматривать только под действием электрической силы, которая направлена перпендикулярно начальной скорости протона (рис. 96).

В указанной системе отсчета движение протона вдоль оси OX равномерное со скоростью v_0 .

По второму закону Ньютона проекция ускорения протона на ось OY

$a_y = \frac{F}{m} = \frac{qE}{m} = \frac{qbt}{m}$. С другой стороны, $a_y = \frac{dv_y}{dt}$ и проекция скорости

протона на ось OY $v_y = \int_0^t a_y dt$.

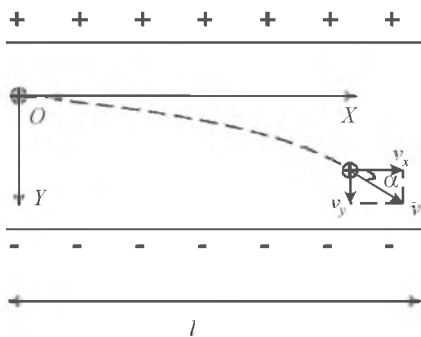


Рис. 96

К моменту вылета из конденсатора вдоль оси OX протон пролетит расстояние, равное длине пластин $l = v_0 t$, и время движения в поле $t = \frac{l}{v_0}$.

К моменту вылета проекция скорости протона на ось OY

$$v_y = \int_0^t a_y dt = \frac{qb}{m} \int_0^{\frac{l}{v_0}} t dt = \frac{qb}{m} \frac{l^2}{2v_0^2}.$$

Так как проекция скорости на ось OX постоянна ($v_0 = v_x$), а проекция скорости на ось OY зависит от времени, следовательно, частица движется по криволинейной траектории. Направление движения в любой момент времени указывает вектор мгновенной скорости.

Первоначальное направление движения было вдоль оси OX (см. рис. 96). Тогда угол между направлением движения протона до и после пролета конденсатора – угол между мгновенной скоростью и осью OX .

$$\text{Тангенс этого угла: } \operatorname{tg} \alpha = \frac{v_y}{v_0} = \frac{qbl^2}{2mv_0^3} = \frac{qbl^2}{2m} \sqrt{\left(\frac{m}{2qU}\right)^3} = \frac{bl^2}{4} \sqrt{\frac{m}{2qU^3}}.$$

Соответственно, величина угла между направлением движения протона до и после пролета конденсатора $\alpha = \operatorname{arctg} \left(\frac{bl^2}{4} \sqrt{\frac{m}{2qU^3}} \right)$.

Задача 79. Частица с удельным зарядом $\frac{q}{m}$ движется прямолинейно под действием электрического поля $E = E_0 - bx$, где b – положительная постоянная; x – расстояние до точки, в которой частица первоначально покоилась. Найти расстояние, пройденное частицей до точки, где она остановилась, и ускорение частицы в этой точке.

Решение. Как и в предыдущей задаче, считаем, что движение частицы происходит только под действием силы со стороны электрического поля.

Так как первоначально частица покоилась, она начинает движение с ускорением, проекция которого на направление движения

$$a_x = \frac{F}{m} = \frac{qE}{m} = \frac{q(E_0 - bx)}{m}$$

зависит от пройденного расстояния x . Хотя проекция ускорения с увеличением x убывает, скорость частицы возрастает. В момент, когда $E = E_0 - bx = 0$ и $x = \frac{E_0}{b}$, проекция ускорения $a_x = 0$, скорость частицы имеет максимальное значение.

При прохождении частицей малого расстояния dx работа электрического поля идет на возрастание ее кинетической энергии:

$$dW_x = dA = Fdx = ma_x dx.$$

На рис. 97 показан график зависимости произведения массы частицы на ее ускорение от x . Изменение кинетической энергии $dW_x = ma_x dx$ на этом графике равно малому элементу площади под графиком. Тогда мак-

симальная кинетическая энергия частицы численно равна площади под графиком до момента, когда ускорение частицы $a_x = 0$. В этот момент расстояние частицы от начальной точки $x = \frac{E_0}{b}$.

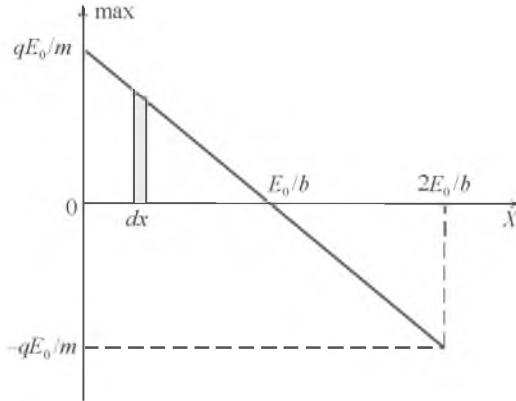


Рис. 97

При $x > \frac{E_0}{b}$ проекция ускорения на направление движения становится отрицательной, т. е. ускорение направлено противоположно скорости частицы, которая начинает убывать, и в какой-то момент частица остановится. Убывание кинетической энергии частицы до нуля соответствует такой же по величине площади под графиком. Следовательно, частица остановится, когда пройдет расстояние $x = 2\frac{E_0}{b}$, а ее ускорение в этот момент равно по модулю $a = \frac{qE_0}{m}$.

Задача 80. Из начала координат O области, где созданы однородные параллельные оси OY , электрическое и магнитное поля с напряженностью E и индукцией B (рис. 98), вылетает в направлении оси OX частица с удельным зарядом $\frac{q}{m}$. Начальная скорость частицы равна v_0 . Найти для нерелятивистского случая координату y_n частицы в момент, когда она n -й раз пересечет ось OY , и угол между скоростью частицы и осью OY в этот момент.

Решение. Электрическое и магнитное поля действуют на частицу с силой Лоренца

$$\vec{F} = \vec{F}_э + \vec{F}_м = q\vec{E} + q[\vec{v} \times \vec{B}].$$

Пусть частица имеет положительный заряд. Направление сил, действующих на положительную частицу, показано на рис. 98. Действием сил тяжести и сопротивления можно пренебречь.

Ускорение частицы под действием электрического поля $\vec{a}_э = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{q\vec{E}}{m}$

в любой момент направлено вдоль оси OY и постоянно по модулю. Скорость частицы по направлению OY равна $\vec{v}_y = \frac{q\vec{E}}{m}t$.

Ускорение частицы под действием магнитного поля в начальный момент времени $\vec{a}_м = \frac{\vec{F}_м}{m} = \frac{q[\vec{v}_0 \times \vec{B}]}{m}$ направлено вдоль оси OZ и перпендикулярно начальной скорости, т. е. является центростремительным (нормальным). В этом случае модуль скорости в любой момент остается постоянным и равен $v = v_0$, а направление непрерывно изменяется, поэтому возникает

движение по окружности в плоскости ZOX . Тогда $a_m = \frac{v_0^2}{R} = \frac{qv_0 B \sin 90^\circ}{m}$

и радиус окружности, по которой движется частица, $R = \frac{mv_0}{qB}$.

Частица одновременно участвует в двух движениях: под действием электрического поля ускоряется вдоль оси OY , а под действием магнитного поля движется по окружности в плоскости ZOX .

Кинематический закон движения вдоль оси OY : $y = \frac{a_э t^2}{2} = \frac{qE}{2m} t^2$.

Если частица движется по окружности из начала координат, то она будет пересекать ось OY после каждого полного оборота, т. е. через время, равное периоду $T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{qB}$. Тогда частица пересечет ось OY n -й раз через время $t = nT$ и координата частицы

$$y = \frac{qE}{2m} (nT)^2 = \frac{qEn^2 4\pi^2 m^2}{2mq^2 B^2} = \frac{2\pi^2 n^2 mE}{qB^2}.$$

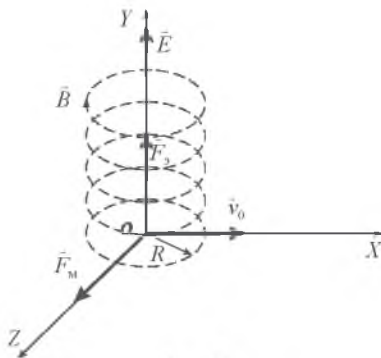


Рис. 98

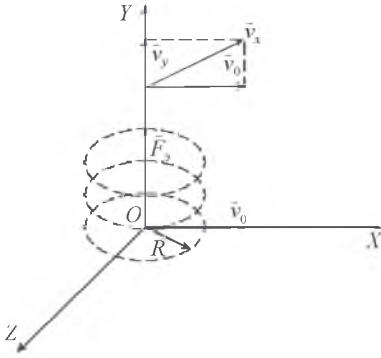


Рис. 99

Мгновенная скорость частицы, участвующей в двух движениях, равна $\vec{v}_t = \vec{v}_y + \vec{v}_0 = \frac{q\vec{E}}{m}t + \vec{v}_0$, причем в любой момент времени $\vec{v}_y \perp \vec{v}_0$ (рис. 99). Тангенс угла между мгновенной скоростью и осью OY $\operatorname{tg} \alpha = \frac{v_y}{v_0}$. При пере-

сечении оси OY в n -й раз

$$v_y = \frac{qE}{m}nT = \frac{qEn}{m} \frac{2m\pi}{qB} = \frac{2\pi nE}{B},$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{Bv_0}{2\pi nE},$$

соответственно, угол $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{Bv_0}{2\pi nE}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Беликов, Б. С.* Решение задач по физике / Б. С. Беликов. М., 1986.
- Иродов, И. Е.* Задачи по общей физике / И. Е. Иродов. 3-е изд. М., 2002.
- Иродов, И. Е.* Электромагнетизм. Основные законы / И. Е. Иродов. М., 2009.
- Сборник задач по общему курсу физики : в 5 т. / С. П. Стрелков [и др.]. М., 2006. Т. 3. Электричество и магнетизм.
- Трофимова, Т. И.* Сборник задач по курсу физики с решениями / Т. И. Трофимова, З. Г. Павлова. М., 1999.

Учебное издание

Кембровская Наталья Геннадьевна
Медведь Ирина Николаевна
Жолнеревич Иван Иванович

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

Пособие

Редактор *А. Г. Терехова*
Художник обложки *Т. Ю. Таран*
Технический редактор *Т. К. Раманович*
Компьютерная верстка *А. А. Микулевича*
Корректор *М. А. Подголина*

Подписано в печать 18.04.2013. Формат 60×84/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 6,27. Уч.-изд. л. 6,5. Тираж 150 экз. Заказ

Белорусский государственный университет.
ЛИ № 02330/0494425 от 08.04.2009.
Пр. Независимости, 4, 220030, Минск.

Республиканское унитарное предприятие
«Издательский центр Белорусского государственного университета».
ЛП № 02330/0494178 от 03.04.2009.
Ул. Красноармейская, 6, 220030, Минск.