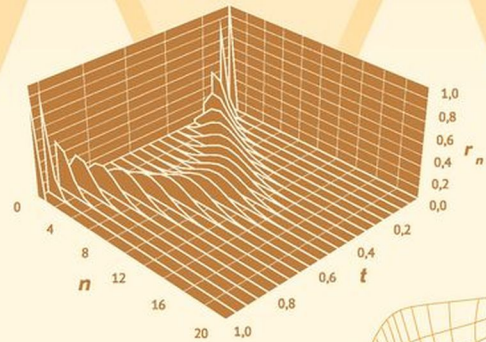


Н. Г. Абрашина-Жадаева, В. И. Зеленков,
И. А. Тимощенко

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ



ISBN 978-985-586-565-1



9 789855 865651

Н. Г. Абрашина-Жадаева, В. И. Зеленков,
И. А. Тимощенко

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

*Допущено Министерством образования
Республики Беларусь в качестве учебного пособия
для студентов учреждений высшего образования
по физическим специальностям*

Минск
РИВШ
2022

УДК 51-73(075.8)

ББК 22.311я73

A16

Р е ц е н з е н т ы :

кафедра информатики и методики преподавания информатики
ГУО «Белорусский государственный педагогический
университет имени Максима Танка»;
профессор кафедры математического анализа
и дифференциальных уравнений ГУО «Гомельский государственный
университет имени Франциска Скорины»,
доктор физико-математических наук, профессор *А. П. Старовойтов*

Абрашина-Жадаева, Н. Г.

A16 Математическое моделирование физических процессов :
учебное пособие / Н. Г. Абрашина-Жадаева, В. И. Зеленков,
И. А. Тимощенко. – Минск : РИВШ, 2022. – 176 с.
ISBN 978-985-586-565-1.

Учебное пособие составлено на основе курса лекций «Математическое моделирование физических процессов», читаемого студентам старших курсов физического факультета Белорусского государственного университета. Рассмотрены задачи популяционной динамики, мониторинга окружающей среды, метод подобия, задача Стефана о фазовом переходе, задачи гидродинамики, задача о течении грунтовых вод, эпидемические волны, динамика многоуровневых систем, нелинейная теплопроводность и горение, а также дробное интегро-дифференцирование и математическое моделирование аномальной диффузии. Представлены математические модели и принципы их построения, описаны методы их решения. Содержит перечень лабораторных заданий, где дается общая информация, основное задание, порядок выполнения лабораторной работы, а также контрольные вопросы для самопроверки знаний и умений.

Адресовано студентам старших курсов УВО, магистрантам, аспирантам и инженерам с повышенной математической подготовкой.

УДК 51-73(075.8)

ББК 22.311я73

ISBN 978-985-586-565-1

© Абрашина-Жадаева Н. Г., Зеленков В. И.,
Тимощенко И. А., 2022

© Оформление. ГУО «Республиканский
институт высшей школы», 2022

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ	7
Раздел I. ОСНОВЫ ТЕОРИИ	9
1. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ.....	9
1.1. Основные этапы построения математической модели.....	9
1.2. Типы математических моделей.....	10
1.3. Универсальность математических моделей. Принцип аналогий.....	10
1.4. Иерархия моделей.....	11
1.5. Линейные и нелинейные модели. Линеаризация.....	11
2. ЗАДАЧИ ПОПУЛЯЦИОННОЙ ДИНАМИКИ.....	12
2.1. Модель неограниченного роста.....	12
2.2. Модель ограниченного роста: учет внутривидового взаимодействия.....	13
2.3. Взаимодействие двух видов.....	15
2.4. Модель Вольтерра – Лотки с трофическими функциями.....	21
2.5. Управление динамикой биоценоза.....	23
2.6. Учет возрастной структуры популяции: задачи с запаздыванием.....	26
2.7. Учет возрастной структуры популяции: модель с дискретным временем.....	29
3. ЗАДАЧИ МОНИТОРИНГА ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЫ.....	31
3.1. Уравнения переноса и диффузии примесей в атмосфере.....	31
3.2. Сопряженные уравнения переноса и диффузии.....	36
4. ЭПИДЕМИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ.....	40
4.1. Постановка задачи.....	40
4.2. Простая волна.....	41
4.3. Сложная волна.....	42
4.4. Графический анализ.....	43
5. ДИНАМИКА МНОГОУРОВНЕВЫХ СИСТЕМ.....	45
5.1. Ветвящийся процесс.....	45
5.2. Процессы рождения и гибели.....	45

5.3. Многоуровневые квантовые системы	46
5.4. Свойства ортогональных полиномов, используемые при решении задач динамики.....	48
5.5. Интегральное преобразование для решения уравнений динамики.....	50
5.6. Системы с медленно растущим дипольным моментом: полиномы Гегенбауэра	52
5.7. Системы с конечным числом уровней: полиномы Кравчука....	55
5.8. Другие квантовые системы	60
6. ЗАДАЧА СТЕФАНА О ФАЗОВОМ ПЕРЕХОДЕ	62
6.1. Понятие о методе подобия. Автомодельные решения	62
6.2. Задача Стефана о фазовом переходе	63
7. УСТАНОВИВШЕЕСЯ ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ. УРАВНЕНИЯ НАВЬЕ – СТОКСА	66
7.1. Вывод уравнений	66
7.2. Нестационарное течение вязкой однородной жидкости в трубе с круговым сечением. Профиль Пуазейля	68
7.3. Понятие о комплексном потенциале	70
7.4. Обтекание кругового цилиндра.....	73
8. НЕУСТОЙЧИВОСТИ В ГИДРОДИНАМИКЕ.....	75
8.1. Основные уравнения.....	75
8.2. Неустойчивость Кельвина – Гельмгольца	78
8.3. Неустойчивость Рэлея – Тейлора	78
8.4. Эффекты, затрудняющие развитие неустойчивости Кельвина – Гельмгольца и неустойчивости Рэлея – Кельвина	79
8.5. Неустойчивость Рэлея – Плато	79
9. ЗАДАЧА О ТЕЧЕНИИ ГРУНТОВЫХ ВОД.....	82
9.1. Уравнение Буссинеска.....	82
9.2. Иерархия моделей	85
9.3. Одномерный случай	86
9.4. Метод малого параметра.....	87
9.5. Задача о наводнении.....	88
9.6. Гидрологический барьер.....	90
10. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПРОЦЕССОВ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ И ГОРЕНИЯ.....	92
10.1. Квазилинейное уравнение теплопроводности.....	92
10.2. Модель Большого взрыва.....	96
10.3. Режимы с обострением	98
10.4. Нелинейные модели горения	101
10.5. Уравнение Колмогорова – Петровского – Пискунова	105

11. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ О ДРОБНОМ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИИ	110
11.1. Для чего это нужно?.....	110
11.2. Дробный интеграл Римана – Лиувилля.....	110
11.3. Дробная производная Римана – Лиувилля.....	112
11.4. Дробная производная Герасимова – Капуто.....	114
11.5. Дробная производная Грюнвальда – Летникова.....	115
11.6. Интегральные преобразования.....	116
12. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ АНОМАЛЬНОЙ ДИФФУЗИИ	119
12.1. От обычной диффузии – к суб- и супердиффузии	119
12.2. Субдиффузия на оси.....	120
12.3. Субдиффузия на полуоси.....	122
12.4. Супердиффузия.....	123
Раздел II. ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ.....	125
Лабораторная работа 1. Задачи популяционной динамики	125
1. Взаимодействие нескольких видов.....	125
2. Задача с запаздыванием	126
3. Модель с дискретным временем.....	127
<i>Контрольные вопросы</i>	<i>128</i>
Лабораторная работа 2. Уравнение теплопроводности.....	129
1. Уравнение теплопроводности	129
2. Метод конечных разностей	129
3. Сетки.....	130
4. Аппроксимация дифференциальных операторов	130
5. Аппроксимация граничных условий	131
6. Разностные схемы для уравнения теплопроводности.....	133
7. Порядок выполнения работы	134
8. Суперзадание.....	135
<i>Контрольные вопросы</i>	<i>135</i>
Лабораторная работа 3. Моделирование распространения инфекционных заболеваний	136
1. Модель SIR.....	136
2. Модель SEIRS	137
3. Ход выполнения работы.....	139
4. Рекомендации по работе с Wolfram Language.....	140
<i>Контрольные вопросы</i>	<i>141</i>
Лабораторная работа 4. Задача Стефана	141
1. Классическая задача Стефана	141
2. Модельная однофазная одномерная задача Стефана	142

3. Метод выпрямления фронта	143
4. Разностная схема.....	144
5. Порядок выполнения работы	146
<i>Контрольные вопросы</i>	146
Лабораторная работа 5. Течение грунтовых вод	149
1. Рекомендации по применению численных методов	149
2. Порядок выполнения работы	150
<i>Контрольные вопросы</i>	151
Лабораторная работа 6. Квазилинейное уравнение теплопроводности	151
1. Постановка задачи	151
2. Расчетная задача с выпрямлением фронта	153
3. Формулировка разностных схем	153
4. Методы решения	154
5. Пример построения расчетной процедуры	155
6. Порядок выполнения работы	156
<i>Контрольные вопросы</i>	157
Лабораторная работа 7. Уравнения Навье – Стокса	158
1. Уравнение Бюргерса	158
2. Уравнение Пуассона.....	159
3. Уравнения Навье – Стокса	160
4. Задача о течении в каверне	162
5. Течение в плоском канале	162
6. Баротропная неустойчивость	163
<i>Контрольные вопросы</i>	164
Лабораторная работа 8. Математическое моделирование аномальной диффузии	164
1. Аппроксимация дробных производных.....	164
2. Порядок выполнения работы	166
<i>Контрольные вопросы</i>	167
ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ	168
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	170

ПРЕДИСЛОВИЕ

Философия написана в грандиозной книге – Вселенной, которая открыта нашему пристальному взгляду. Но понять эту книгу может лишь тот, кто научился понимать ее язык и знаки, которыми она изложена. Написана же она на языке математики.

Галилео Галилей

Математическое моделирование является одной из дисциплин, составляющих физическое образование. Именно моделирование наиболее тесно связано с методами математической физики и без этих двух предметов невозможно рассматривать задачи физических процессов, проводить анализ и делать прогноз явления. Поэтому в пособии материал нацелен на формирование у студентов знания средств и методов моделирования физических процессов, а также умения ставить, решать и анализировать математические модели. В книге основными математическими методами изучения физических процессов, как в основном принято, является моделирование этих процессов в виде дифференциальных уравнений.

Пособие предназначено в качестве основного материала для самоподготовки по курсу «Математическое моделирование физических процессов», а также может быть рекомендовано для использования в качестве раздаточного материала, облегчающего труд студентов на лекциях и лабораторных занятиях. Курс разбит на главы, каждая из которых начинается с формулировок определений и основных утверждений. Приведены наиболее часто используемые уравнения математической физики и представлены методы решения этих уравнений. Завершает пособие перечень лабораторных заданий, где дается общая информация, основное задание, порядок выполнения лабораторной работы и, как правило, контрольные вопросы для самопроверки знаний и умений.

Авторы в равной степени внесли вклад при написании книги, которая является кратким изложением лекций по курсу «Математическое моделирование физических процессов», читаемых в течение ряда лет студентам физического факультета Белорусского государственного университета. Оно возникло на основе известных учебников и рассчитано на студентов старших

курсов, магистрантов, аспирантов и инженеров с повышенной математической подготовкой.

Авторы будут признательны за пожелания и замечания, которые можно направлять по адресу: кафедра высшей математики и математической физики, физический факультет, Белорусский государственный университет, проспект Независимости, 4, Минск, 220030, Республика Беларусь; e-mail – zelenkovvi@bsu.by. Авторы также выражают благодарность А. С. Федотову, разработавшему лабораторную работу «Уравнения Навье – Стокса».