ISSN 1561-2430 (Print)
ISSN 2524-2415 (Online)
УДК 517.954
https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-2-148-155

Поступила в редакцию 30.03.2021
Received 30.03.2021

В. И. Корзюк[1,2], О. А. Ковнацкая[1]

[1]*Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь*
[2]*Институт математики Национальной академии наук Беларуси, Минск, Беларусь*

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С УСЛОВИЯМИ НА ХАРАКТЕРИСТИКАХ

Аннотация. Получено классическое решение одномерного волнового уравнения с условиями на характеристиках для разных областей, в которых рассмотрены эти задачи. Аналитическое решение строится методом характеристик. Кроме этого, доказана и единственность полученного решения. Доказаны необходимость и достаточность условий согласования для заданных функций задачи, при выполнении которых классическое решение существует при наличии гладкости заданных функций.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения с частными производными, гиперболические уравнения, задача Гурса, условия согласования, классическое решение, метод характеристик

Для цитирования. Корзюк, В. И. Решения задач для волнового уравнения с условиями на характеристиках / В. И. Корзюк, О. А. Ковнацкая // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2021. – Т. 57, № 2. – С. 148–155. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-2-148-155

Viktor I. Korzyuk[1,2], Olga A. Kovnatskaya[1]

[1]*Belarusian State University, Minsk, Belarus*
[2]*Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus, Minsk, Belarus*

SOLUTIONS OF PROBLEMS FOR THE WAVE EQUATION WITH CONDITIONS ON THE CHARACTERISTICS

Abstract. In this paper we obtain a classical solution of the one-dimensional wave equation with conditions on the characteristics for different areas this problem is considered in. The analytical solution is constructed by the method of characteristics. In addition, the uniqueness of the obtained solution is proved. The necessity and sufficiency of the matching conditions for given functions of the problem are proved. When these conditions are satisfied and the given functions are smooth enough, the classical solution of the considered problem exists.

Keywords: partial differential equations, hyperbolic equations, Goursat problem, agreement condition, classical solution, method of characteristics

For citation: Korzyuk V. I., Kovnatskaya O. A. Solutions of problems for the wave equation with conditions on the characteristics. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2021, vol. 57, no. 2, pp. 148–155 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2021-57-2-148-155

Введение. Задача с условиями на характеристиках для гиперболических уравнений рассматривалась и ранее [1–6, 8]. В [7, 8] с помощью методов функционального анализа и операторов осреднения с переменным шагом доказаны теоремы существования и единственности сильного решения задачи Коши и Гурса для гиперболических уравнений. В [8] методом последовательных приближений получено классическое решение для гиперболического уравнения, записанного во втором каноническом виде в случае двух независимых переменных. Однако здесь не исследована зависимость гладкости решения от заданных функций в точках их соприкосновения, как это сделано для других задач в случае нахождения классических решений [8–12].

Наша цель состоит в том, чтобы найти классическое решение рассматриваемых здесь задач Гурса и доказать необходимое и достаточное условия согласования для заданных функций помимо их гладкости, чтобы решение было классическим. Кроме того, изучается классическое решение задачи для одномерного волнового уравнения, которое задано на всей плоскости.

1. Задача Г-1. На плоскости $\mathbb{R}^2$ переменных $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ рассмотрим область Q, которая находится между прямыми $x_2 = \pm a x_1$, $a > 0$, для $x_1 > 0$ (рис. 1). Заметим, что линии $x_2 = \pm a x_1$ являются характеристиками одномерного волнового уравнения

$$\mathcal{L}u = (\partial_{x_1}^2 u - a^2 \partial_{x_2}^2 u)(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}), \tag{1}$$

где $\partial_{x_j}^2$ – операторы дифференцирования второго порядка по переменным x_j, $j = 1,2$.

Формулировка задачи Г-1. *Найти решение* $u : \boldsymbol{x} \to u(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$ *в области Q уравнения* (1)*, которое на характеристиках $x_2 = \pm a x_1$, $x_1 > 0$, удовлетворяет граничным условиям*

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2 = a x_1) &= \varphi^{(1)}(x_1), \quad x_1 > 0, \\ u(x_1, x_2 = -a x_1) &= \varphi^{(2)}(x_1), \quad x_1 > 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Обозначим через $\overline{Q}$ замыкание области Q. Находить решение задачи (1), (2) будем из класса дважды непрерывно дифференцируемых функций $C^2(\overline{Q})$, которое удовлетворяет уравнению (1) и условиям (2). Чтобы искомая функция u была из $C^2(\overline{Q})$, необходимо потребовать достаточные условия гладкости заданных функций f и $\varphi^{(j)}$, $j = 1,2$, а также определить необходимые и достаточные условия согласования на функции f, $\varphi^{(j)}$ в точке $O = (0,0) = (x_1 = 0, x_2 = 0)$.

Решение задачи Г-1. Предположим, что функции f и $\varphi^{(j)}$ ($j = 1,2$) достаточно гладкие, гладкость которых уточним ниже.

Решение задачи Г-1 будем находить из общего решения уравнения (1), которое определяется, как известно [8], в виде суммы общего решения $u^{(0)}$ однородного уравнения (1) и какого-нибудь частного v_p неоднородного уравнения (1), т. е.

$$u(\boldsymbol{x}) = u^{(0)}(\boldsymbol{x}) + v_p(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \overline{Q}, \tag{3}$$

где

$$u^{(0)}(\boldsymbol{x}) = g^{(1)}(x_2 - a x_1) + g^{(2)}(x_2 + a x_1),$$

произвольные функции $g^{(j)}$ ($j = 1,2$), определенные на $\mathbb{R}$, из класса C^2. Если $\boldsymbol{x} \in \overline{Q}$, то области определения $\mathcal{D}(g^{(1)}) = (-\infty, 0]$, $\mathcal{D}(g^{(2)}) = [0, \infty)$ и $(x_2 - a x_1) \in \mathcal{D}(g^{(1)})$, $(x_2 + a x_1) \in \mathcal{D}(g^{(2)})$.

Из условий Гурса (2) следует необходимое и достаточное условие согласования

$$\varphi^{(1)}(0) = \varphi^{(2)}(0), \tag{4}$$

чтобы решение задачи Г-1 было из класса непрерывных функций $C(\overline{Q})$.

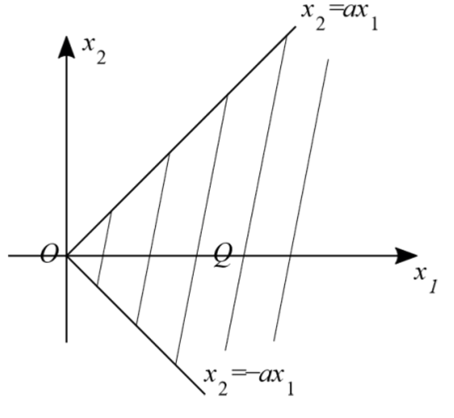

Рис. 1

Fig. 1

Интегрируя уравнение (1) [8], представим общее решение его в виде

$$u(\boldsymbol{x}) = g^{(1)}(x_2 - ax_1) + g^{(2)}(x_2 + ax_1) - \frac{1}{4a^2}\int\limits_0^{x_2 - ax_1} dy \int\limits_0^{x_2 + ax_1} f\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right) dz. \tag{5}$$

Здесь частное решение v_p определяется формулой

$$v_p(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{4a^2}\int\limits_0^{x_2 - ax_1} dy \int\limits_0^{x_2 + ax_1} f\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right) dz. \tag{6}$$

Из формулы (6) следует: если $f \in C^1(\overline{Q})$, то $v_p \in C^2(\overline{Q})$ и

$$v_p\Big|_{\boldsymbol{x} \in \partial\overline{Q}} = 0, \tag{7}$$

т. е. значение функции v_p равно нулю на всей границе ∂Q области $\overline{Q}$.

Общее решение u уравнения (1), представленное формулой (5), удовлетворяем условиям Гурса (2). В результате получим соотношения

$$\begin{aligned} &u(x_1, 2ax_1) = g^{(1)}(0) + g^{(2)}(2ax_1) = \varphi^{(1)}(x_1),\ x_1 > 0, \\ &u(x_1, 0) = g^{(1)}(-2ax_1) + g^{(2)}(0) = \varphi^{(2)}(x_1),\ x_1 > 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Из системы (8) находим значения $g^{(j)}(z)$, $j = 1,2$, функций $g^{(j)}$ на областях определения их $\mathcal{D}(g^{(j)})$. Полученные соотношения подставляем в представление (5). В результате, учитывая условие (4), получаем решение задачи (1), (2), которое определяется формулой

$$u(\boldsymbol{x}) = \varphi^{(1)}\left(\frac{x_2 + ax_1}{2a}\right) + \varphi^{(2)}\left(\frac{ax_1 - x_2}{2a}\right) - \varphi^{(1)}(0) - \frac{1}{4a^2}\int\limits_0^{x_2 - ax_1} dy \int\limits_0^{x_2 + ax_1} f\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right) dz,\ \boldsymbol{x} \in \overline{Q}. \tag{9}$$

Предполагаем, что $\varphi^{(j)} \in C^2([0,\infty))$, $j = 1,2$, $f \in C^1(\overline{Q})$. При указанных условиях гладкости на заданные функции задачи (1), (2) формула (9) представляет собой функцию из класса $C^2(\overline{Q})$, является решением уравнения (1) и удовлетворяет условиям (2).

Действительно, вычислим частные производные по x_1 и x_2 первого и второго порядков на множестве $\overline{Q}$. В результате получим соотношения

$$\begin{gathered} \frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{1}{2} d\varphi^{(1)}\left(\frac{x_2 + ax_1}{2a}\right) + \frac{1}{2} d\varphi^{(2)}\left(\frac{ax_1 - x_2}{2a}\right) + \\ + \frac{1}{4a}\int\limits_0^{x_2 + ax_1} f\left(\frac{z - (x_2 - ax_1)}{2a}, \frac{z + (x_2 - ax_1)}{2}\right) dz - \frac{1}{4a}\int\limits_0^{x_2 - ax_1} f\left(\frac{(x_2 + ax_1) - y}{2a}, \frac{(x_2 + ax_1) + y}{2}\right) dy, \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{1}{2a} d\varphi^{(1)}\left(\frac{x_2 + ax_1}{2a}\right) - \frac{1}{2a} d\varphi^{(2)}\left(\frac{ax_1 - x_2}{2a}\right) - \\ - \frac{1}{4a^2}\int\limits_0^{x_2 + ax_1} f\left(\frac{z - (x_2 - ax_1)}{2a}, \frac{z + (x_2 - ax_1)}{2}\right) dz - \frac{1}{4a^2}\int\limits_0^{x_2 - ax_1} f\left(\frac{(x_2 + ax_1) - y}{2a}, \frac{(x_2 + ax_1) + y}{2}\right) dy, \end{gathered} \tag{10}$$

$$\begin{gathered} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = \frac{1}{4} d^2\varphi^{(1)}\left(\frac{x_2 + ax_1}{2a}\right) + \frac{1}{4} d\varphi^{(2)}\left(\frac{ax_1 - x_2}{2a}\right) + \frac{1}{2} f\left(x_1, x_2\right) + \\ + \frac{1}{4a}\int\limits_0^{x_2 + ax_1} \left(\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y_1}\left(\frac{z - (x_2 - ax_1)}{2a}, \frac{z + (x_2 - ax_1)}{2}\right) - \frac{a}{2}\frac{\partial f}{\partial y_2}\left(\frac{z - (x_2 - ax_1)}{2a}, \frac{z + (x_2 - ax_1)}{2}\right)\right) dz - \\ - \frac{1}{4a}\int\limits_0^{x_2 - ax_1} \left(\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y_1}\left(\frac{(x_2 + ax_1) - y}{2a}, \frac{(x_2 + ax_1) + y}{2}\right) + \frac{a}{2}\frac{\partial f}{\partial y_2}\left(\frac{(x_2 + ax_1) - y}{2a}, \frac{(x_2 + ax_1) + y}{2}\right)\right) dy, \end{gathered}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{1}{4a} d^2\varphi^{(1)}\left(\frac{x_2+ax_1}{2a}\right) + \frac{1}{4a} d\varphi^{(2)}\left(\frac{ax_1-x_2}{2a}\right) +$$
$$+\frac{1}{4a}\int_0^{x_2+ax_1}\left(\left(-\frac{1}{2a}\right)\frac{\partial f}{\partial y_1}\left(\frac{z-(x_2-ax_1)}{2a}, \frac{z+(x_2-ax_1)}{2}\right) +\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y_2}\left(\frac{z-(x_2-ax_1)}{2a}, \frac{z+(x_2-ax_1)}{2}\right)\right)dz - \tag{11}$$
$$-\frac{1}{4a}\int_0^{x_2-ax_1}\left(\frac{1}{2a}\frac{\partial f}{\partial y_1}\left(\frac{(x_2+ax_1)-y}{2a}, \frac{(x_2+ax_1)+y}{2}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y_2}\left(\frac{(x_2+ax_1)-y}{2a}, \frac{(x_2+ax_1)+y}{2}\right)\right)dy,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = \frac{1}{4a^2} d^2\varphi^{(1)}\left(\frac{x_2+ax_1}{2a}\right) + \frac{1}{4a^2} d\varphi^{(2)}\left(\frac{ax_1-x_2}{2a}\right) + \frac{1}{2a^2} f\left(x_1, x_2\right) -$$
$$-\frac{1}{4a^2}\int_0^{x_2+ax_1}\left(\left(-\frac{1}{2a}\right)\frac{\partial f}{\partial y_1}\left(\frac{z-(x_2-ax_1)}{2a}, \frac{z+(x_2-ax_1)}{2}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y_2}\left(\frac{z-(x_2-ax_1)}{2a}, \frac{z+(x_2-ax_1)}{2}\right)\right)dz -$$
$$-\frac{1}{4a^2}\int_0^{x_2-ax_1}\left(\frac{1}{2a}\frac{\partial f}{\partial y_1}\left(\frac{(x_2+ax_1)-y}{2a}, \frac{(x_2+ax_1)+y}{2}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial y_2}\left(\frac{(x_2+ax_1)-y}{2a}, \frac{(x_2+ax_1)+y}{2}\right)\right)dy.$$

Из формул (10) и (11) видно, что они представляют собой функции из класса $C(\overline{Q})$. Производные второго порядка (11) удовлетворяют уравнению (1), функция (9) удовлетворяет условиям (2) при выполнении условия согласования (4).

Кроме того, из представления функции (9) и ее производных (10), (11) следует, что только условие (4) является единственным необходимым и достаточным условием согласования для того, чтобы решение (9) было из класса $C^2(\overline{Q})$ задачи (1), (2), если $\varphi^{(j)} \in C^2([0,\infty))$, $j = 1,2$; $f \in C^1(\overline{Q})$.

Т е о р е м а 1. *Пусть функции* $\varphi^{(j)} \in C^2([0,\infty))$, $j = 1,2$; $f \in C^1(\overline{Q})$. *Тогда функция* (9) *есть функция из класса* $C^2(\overline{Q})$ *и является единственным решением задачи* (1), (2) *тогда и только тогда, когда выполняется условие* (4).

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из предыдущих рассуждений. Единственность доказывается методом от противного. Для разности двух решений получаем однородное уравнение (1) и однородные условия (2), из которых, согласно (9), следует только нулевое решение. Теорема 1 доказана.

2. Задача Г-2. На плоскости $\mathbb{R}^2$ переменных $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ рассмотрим область $Q^{(2)}$, представленную на рис. 2, границей которой является характеристика $x_2 + ax_1 = 0$, $a > 0$, и точки $\boldsymbol{x}$ плоскости $\mathbb{R}^2$ принадлежат $Q^{(2)}$, если $x_2 + ax_1 > 0$.

Задача Г-2 состоит в том, что уравнение (1) задается на замыкании $\overline{Q^{(2)}}$ области $Q^{(2)}$, а решение его удовлетворяет условиям

$$u(x_1, x_2 = ax_1) = \varphi^{(1)}(x_1), \quad x_1 \in [0,\infty),$$
$$u(x_1, x_2 = -ax_1) = \varphi^{(2)}(x_1), \quad x_1 \in \mathbb{R}. \tag{12}$$

Формулировка задачи Г-2. *Найти решение* $u : \boldsymbol{x} \to u(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$ *на* $\overline{Q^{(2)}}$ *уравнения* (1), *удовлетворяющее условиям* (12).

Решение задачи Г-2. Для нахождения решения задачи Г-2 будем использовать представление (5) решения уравнения (1) и на множестве $\overline{Q^{(2)}}$. Удовлетворяя соотношение (5) условиям (12), получим

$$u(x_1, x_2 = ax_1) = g^{(1)}(0) + g^{(2)}(2ax_1) = \varphi^{(1)}(x_1),\ x_1 \in [0,\infty),$$
$$u(x_1, x_2 = -ax_1) = g^{(1)}(-2ax_1) + g^{(2)}(0) = \varphi^{(2)}(x_1),\ x_1 \in \mathbb{R}. \tag{13}$$

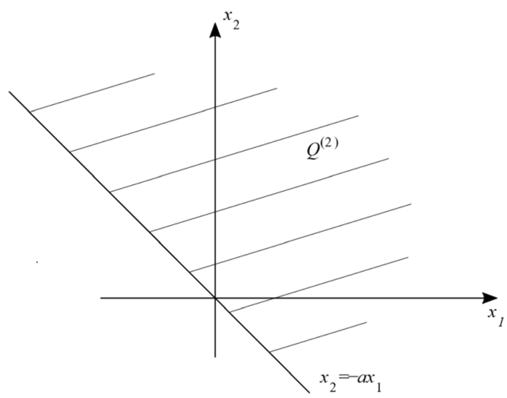

Рис. 2

Fig. 2

Из соотношений (13) имеем

$$g^{(1)}(x_2 - ax_1) = \varphi^{(2)}\left(\frac{ax_1 - x_2}{2a}\right) - g^{(2)}(0),$$
$$g^{(2)}(x_2 + ax_1) = \varphi^{(1)}\left(\frac{x_2 + ax_1}{2a}\right) - g^{(1)}(0),\ \boldsymbol{x} \in \overline{Q^{(2)}}. \tag{14}$$

Из этих же соотношений имеем

$$g^{(1)}(0) + g^{(2)}(0) = \varphi^{(1)}(0). \tag{15}$$

Определенные значения функций $g^{(j)}$, $j = 1,2$, по формулам (14) и (15) подставляем в (5). В результате получаем решение

$$u(\boldsymbol{x}) = \varphi^{(1)}\left(\frac{x_2 + ax_1}{2a}\right) + \varphi^{(2)}\left(\frac{ax_1 - x_2}{2a}\right) - \varphi^{(1)}(0) - \frac{1}{4a^2}\int\limits_0^{x_2 - ax_1} dy \int\limits_0^{x_2 + ax_1} f\left(\frac{z - y}{2a}, \frac{z + y}{2}\right)dz,\quad \boldsymbol{x} \in \overline{Q^{(2)}} \tag{16}$$

задачи Г-2.

Из условий (12) следует условие согласования

$$\varphi^{(1)}(0) = \varphi^{(2)}(0), \tag{17}$$

чтобы решение (16) задачи (1), (12) принадлежало классу $C(\overline{Q^{(2)}})$.

Для задачи Г-2 справедлива

Т е о р е м а 2. *Пусть функции* $\varphi^{(1)} \in C^2([0,\infty))$, $\varphi^{(2)} \in C^2(\mathbb{R})$, $f \in C^1(\overline{Q^{(2)}})$. *Функция* (16) *есть функция из класса* $C^2(\overline{Q^{(2)}})$ *и является единственным решением задачи* (1), (12) *тогда и только тогда, когда выполняется условие* (17).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если выполнены условия теоремы гладкости заданных функций задачи Г-2, то формула (16) представляет собой функцию из класса $C^2(\overline{Q^{(2)}})$. Путем вычисления первых и вторых производных этой функции (формулы, аналогичные формулам (10), (11)) можно убедиться, что они являются непрерывными на множестве $\overline{Q^{(2)}}$ и функция (16) удовлетворяет уравнению (1) и условиям (12) при выполнении условия согласования (17). Кроме того, из формул (16) и (10), (11) следует, что только условие (17) является единственным необходимым и достаточным условием согласования для того, чтобы решение (16) было из класса $C^2(\overline{Q^{(2)}})$ задачи (1), (12), если $\varphi^{(1)} \in C^2([0,\infty))$, $\varphi^{(2)} \in C^2(\mathbb{R})$, $f \in C^1(\overline{Q^{(2)}})$.

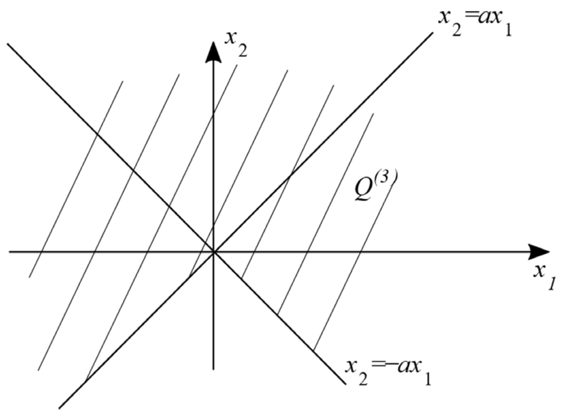

Рис. 3

Fig. 3

Единственность доказывается аналогично тому, как это было сделано при доказательстве теоремы 1. Теорема 2 доказана.

3. Задача Г-3. На плоскости $\mathbb{R}^2$ переменных $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ рассмотрим область $Q^{(3)}$, представленную на рис. 3, границей которой являются характеристики $x_2 - ax_1 = 0$, $a > 0$, для $x_1 < 0$ и $x_2 + ax_1 = 0$ для $x_1 > 0$, и области $Q^{(3)}$ принадлежат все точки, кроме тех точек $\boldsymbol{x}$ плоскости $\mathbb{R}^2$, для которых $x_2 \pm ax_1 < 0$.

Формулировка задачи Г-3. *Найти решение* $u : \boldsymbol{x} \to u(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$ *на* $\overline{Q^{(3)}}$ *уравнения* (1)*, удовлетворяющее условиям*

$$u(x_1, x_2 = ax_1) = \varphi^{(1)}(x_1),\ x_1 \in \mathbb{R},$$
$$u(x_1, x_2 = -ax_1) = \varphi^{(2)}(x_1),\ x_1 \in \mathbb{R}. \tag{18}$$

Решение задачи Г-3. Решение задачи Г-3 будем искать подобно тому, как это было сделано для задач Г-1 и Г-2. Интегрируя уравнение (1) и удовлетворяя полученное общее решение условиям (18), получим его решение в виде

$$u(\boldsymbol{x}) = \varphi^{(1)}\left(\frac{x_2 + ax_1}{2a}\right) + \varphi^{(2)}\left(\frac{ax_1 - x_2}{2a}\right) - \varphi^{(1)}(0) - \frac{1}{4a^2}\int_0^{x_2 - ax_1} dy \int_0^{x_2 + ax_1} f\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right) dz, \tag{19}$$

а также условие согласования

$$\varphi^{(1)}(0) = \varphi^{(2)}(0). \tag{20}$$

При достаточной гладкости функций f и $\varphi^{(j)}$ ($j = 1,2$) (см. теорему 3) условие (20) является необходимым и достаточным для того, чтобы решение (19) было из класса $C^2(\mathbb{R}^2)$. Таким образом, для задачи Г-3 справедлива

Т е о р е м а 3. *Пусть функции* $\varphi^{(j)} \in C^2(\mathbb{R}),\ j = 1,2;\ f \in C^1(\mathbb{R}^2)$. *В этом случае гладкости заданных функций функция* (19) *есть функция из класса* $C^2(\overline{Q^{(3)}})$ *и является единственным решением задачи* (1), (18) *тогда и только тогда, когда выполняется условие* (20).

Доказательство теоремы 3 аналогично доказательству теорем 1 и 2.

4. Задача Г-4. Рассмотрим уравнение (1) на всей плоскости $\mathbb{R}^2$ вещественных переменных $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ (рис. 4). На характеристиках $x_2 = \pm ax_1$, $a > 0$, уравнения (1) зададим условия

$$u(x_1, x_2 = ax_1) = \varphi^{(1)}(x_1), \quad x_1 \in \mathbb{R},$$
$$u(x_1, x_2 = -ax_1) = \varphi^{(2)}(x_1), \quad x_1 \in \mathbb{R}. \tag{21}$$

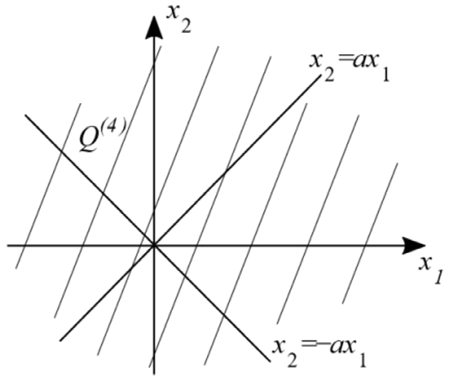

Рис. 4

Fig. 4

Формулировка задачи Г-4. *Задача Г-4 состоит в том, чтобы найти решение* $u : \boldsymbol{x} \to u(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$ *уравнения* (1) *на всей плоскости* $\mathbb{R}^2$, *удовлетворяющее условиям* (21).

Решение задачи Г-4. Интегрируя уравнение (1) и удовлетворяя полученное общее решение условиям (21), получим его решение в виде

$$u(\boldsymbol{x}) = \varphi^{(1)}\left(\frac{x_2 + ax_1}{2a}\right) + \varphi^{(2)}\left(\frac{ax_1 - x_2}{2a}\right) - \varphi^{(1)}(0) - \frac{1}{4a^2}\int_0^{x_2 - ax_1} dy \int_0^{x_2 + ax_1} f\left(\frac{z-y}{2a}, \frac{z+y}{2}\right) dz, \qquad (22)$$

а также условие согласования

$$\varphi^{(1)}(0) = \varphi^{(2)}(0). \qquad (23)$$

Далее аналогично теоремам 1 и 2 доказываем теорему 4.

Т е о р е м а 4. *Пусть функции* $\varphi^{(j)} \in C^2(\mathbb{R})$, $j = 1,2$; $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$. *При указанных условиях гладкости заданных функций f,* $\varphi^{(j)}$, *j* = 1,2, *функция* (22) *есть функция из класса* $C^2(\mathbb{R}^2)$ *и является единственным решением задачи* (1), (21) *тогда и только тогда, когда выполняется условие* (23).

Заключение. Таким образом, получены формулы классических решений задач для одномерного волнового уравнения с условиями на характеристиках. Доказано, что эти задачи имеют единственное решение тогда и только тогда, когда выполняются в угловых точках заданной области изменения независимых переменных условия согласования для заданных функций уравнения и условий. Следует отметить, что эти условия являются необходимыми и достаточными.

Особый интерес представляет задача Г-4, где волновое уравнение задано на всей плоскости.

Список использованных источников

1. Корзюк, В. И. Задача Гурса для уравнения четвертого порядка с биволновым оператором / В. И. Корзюк, Е. С. Чеб // Дифференц. уравнения. – 2009. – Т. 45, № 10. – С. 1435–1440.

2. Андреев, А. А. Задача типа Гурса для гиперболического уравнения и для одной системы гиперболических уравнений третьего порядка / А. А. Андреев, Ю. О. Яковлева // Вестн. Самар. гос. техн. ун-та. Сер.: физ.-мат. науки. – 2019. – Т. 23, № 1. – С. 186–194.

3. Карачик, В. В. Задачи Коши и Гурса для уравнения 3-го порядка / В. В. Карачик // Вестн. ЮУрГУ. Сер. Математика. Механика. Физика. – 2015. – Т. 7, № 2. – С. 31–43.

4. Аттаев, А. Х. Характеристическая задача для нагруженного вдоль одной из своих характеристик гиперболического уравнения второго порядка / А. Х. Аттаев // Вестн. КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. – 2018. – № 3. – С. 14–18. https://doi.org/10.18454/2079-6641-2018-23-3-14-18

5. Асанова, А. Т. Нелокальная задача с интегральными условиями для системы гиперболических уравнений в характеристическом прямоугольнике / А. Т. Асанова // Изв. вузов. Математика. – 2017. – № 5. – С. 11–25.

6. Кечина, О. М. О разрешимости нелокальной задачи для уравнения третьего порядка / О. М. Кечина // Вестн. Самар. ун-та. Естеств.-науч. сер. – 2017. – Т. 23, № 1. – С. 15–20.

7. Корзюк, В. И. Метод энергетических неравенств и операторов осреднения. Граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными / В. И. Корзюк. – Минск: Изд. центр БГУ, 2013. – 460 с.

8. Корзюк, В. И. Уравнения математической физики / В. И. Корзюк. – М.: Ленанд, 2021. – 480 с.

9. Корзюк, В. И. Классическое решение первой смешанной задачи для гиперболического уравнения третьего порядка с волновым оператором / В. И. Корзюк, А. А. Мандрик // Дифференц. уравнения. – 2014. – Т. 50, № 4. – С. 492–504.

10. Корзюк, В. И. Классическое решение задачи с интегральным условием для одномерного биволнового уравнения / В. И. Корзюк, Нгуен Ван Винь // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2016. – № 3. – С. 16–29.

11. Корзюк, В. И. Классическое решение смешанной задачи для уравнения типа Клейна – Гордона – Фока с характеристическими косыми производными в граничных условиях / В. И. Корзюк, И. И. Столярчук // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2019. – Т. 55, № 1. – С. 7–21. https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-1-7-21

12. Корзюк, В. И. Классическое решение в криволинейной полуполосе первой смешанной задачи для волнового уравнения / В. И. Корзюк, И. С. Козловская, С. Н. Наумовец // Дифференц. уравнения. – 2020. – Т. 56, № 1. – С. 99–109.

References

1. Korzyuk V. I., Cheb E. S. Goursat problem for a fourth-order equation with the biwave operator. *Differential Equations*, 2009, vol. 45, no. 10, pp. 1467–1472. https://doi.org/10.1134/s0012266109100097

2. Andreev A. A., Yakovleva J. O. The Goursat-type problem for a hyperbolic equationand system of third order hyperbolic equations. *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: fiziko-matematicheskie nauki = Journal of Samara State Technical University, Series Physical and Mathematical Sciences*, 2019, vol. 23, no 1, pp. 186–194 (in Russian). https://doi.org/10.14498/vsgtu1666.

3. Karachik V. V. Cauchy and Goursat problems for differential equation of third order. *Vestnik Yuzhno-Ural'skogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya Matematika. Mekhanika. Fizika = Bulletin of the South Ural State University. Series Mathematics. Mechanics. Physics*, 2015, vol. 7, no. 2, pp. 31–43 (in Russian).

4. Attaev A. Kh. The characteristic problem for the second-order hyperbolic equation loaded along one of its characteristics. *Vestnik KRAUNTs. Fiziko-matematicheskie nauki = Bulletin of KRAESC. Physical & Mathematical Sciences*, 2018, no. 3, pp. 14–18 (in Russian). https://doi.org/10.18454/2079-6641-2018-23-3-14-18

5. Assanova A. T. Nonlocal problem with integral conditions for a system of hyperbolic equations in characteristic rectangle. *Russian Mathematics*, 2017, vol. 61, no. 5, pp. 7–20. https://doi.org/10.3103%2FS1066369X17050024

6. Ketchina O. M. On solvability of nonlocal problem for third-order equation. Vestnik Samarskogo universiteta. *Estestvenno-nauchnaya seriya = Samara University Bulletin. Natural Science Series*, 2017, vol. 23, no. 1, pp. 15–20 (in Russian).

7. Korzyuk V. I. *Method of energy inequalities and averaging operators. Boundary value problems for partial differential equations*. Minsk, BSU Publ. Center, 2013, 460 p. (in Russian).

8. Korzyuk V. I. *Equations of mathematical physics*. Moscow, Lenand Publ., 2021, 480 p. (in Russian).

9. Korzyuk V. I., Mandrik A. A. Classical solution of the first mixed problem for a third-order hyperbolic equation with the wave operator. *Differential Equations*, 2014, vol. 50, no. 4, pp. 489–201. https://doi.org/10.1134/s0012266114040077

10. Korzyuk V. I. Nguyen Van Vinh. Classical solution of a problem with an integral condition for the one-dimensional biwave equation. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2016, no. 3, pp. 16–29 (in Russian).

11. Korzyuk V. I., Stolyarchuk I. I. Classical solution of the mixed problem for the Klein–Gordon–Fock type equation with characteristic oblique derivatives at boundary conditions. *Vestsi Natsyianal'nai akademii navuk Belarusi. Seryia fizika-matematychnykh navuk = Proceedings of the National Academy of Sciences of Belarus. Physics and Mathematics series*, 2019, vol. 55, no. 1, pp. 7–21 (in Russian). https://doi.org/10.29235/1561-2430-2019-55-1-7-21

12. Korzyuk V. I., Kozlovskaya I. S., Naumavets S. N. Classical solution of the first mixed problem for the wave equation in a curvilinear half-strip. *Differential equations*, 2020, vol. 56, no. 1, pp. 98–108. https://doi.org/10.1134/s0012266120010115

Информация об авторах

Корзюк Виктор Иванович – академик Национальной академии наук Беларуси, доктор физико-математических наук, профессор, Институт математики Национальной академии наук Беларуси (ул. Сурганова, 11, 220072, г. Минск, Республика Беларусь); Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: korzyuk@bsu.by

Ольга Анатольевна Ковнацкая – кандидат физико-математических наук, Белорусский государственный университет (пр. Независимости, 4, 220030, г. Минск, Республика Беларусь). E-mail: Kovnatskaya@bsu.by

Information about the authors

Viktor I. Korzyuk – Academician of the National Academy of Sciences of Belarus, Dr. Sc. (Physics and Mathematics), Professor, Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (11, Surganov Str., 220072, Minsk, Republic of Belarus); Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: korzyuk@bsu.by

Olga A. Kovnatskaya – Ph. D. (Physics and Mathematics), Belarusian State University (4, Nezavisimosti Ave., 220030, Minsk, Republic of Belarus). E-mail: Kovnatskaya@bsu.by