ИССЛЕДОВАНИЕ НЕРАЗЛОЖИМЫХ ОБЪЕКТОВ В КАТЕГОРИИ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ЧАСТИЧНО УПОРЯДОЧЕННЫХ МНОЖЕСТВ НАД КОЛЬЦОМ ВЫЧЕТОВ ПО МОДУЛЮ, ЯВЛЯЮЩЕМУСЯ ПРОИЗВЕДЕНИЕМ РАЗЛИЧНЫХ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

И.Б. Просвирнина

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы, Гродно, Беларусь
i.prosvirnina@grsu.by

Пусть $(I, \leqslant)$—конечное частично упорядоченное множество, состоящее из r элементов и пусть K—поле.

Введем множество $\mathrm{Mat}\,(I)$ всех матричных K-представлений $A = (A_1, A_2, \ldots, A_r)$ частично упорядоченного множества I в смысле [1] и множество $T(I)$ элементарных преобразований следующих типов:

1) одновременные элементарные преобразования строк блочной матрицы A;

2) элементарные преобразования столбцов внутри каждого блока блочной матрицы A;

3) для каждой пары $i, j : i \leqslant j$, элементарные преобразования, прибавляющие любой столбец i-го блока к любому столбцу j-го блока блочной матрицы A.

Тем самым, после введения операции прямого суммирования в множестве $\mathrm{Mat}\,(I)$ определена матричная задача $(\mathrm{Mat}\,(I), T(I))$ классификации неразложимых объектов в фактор-множестве $\mathrm{Mat}\,(I)/\sim T(I)$ [1,2]. Обозначим через $\mathrm{cdn}\,(A)$ координатный вектор $(s_1, \ldots \ldots, s_r, s_{r+1})$, где $s_1, s_2, \ldots, s_r$ — число столбцов матриц $A_1, A_2, \ldots, A_r$, соответственно, s_{r+1} — число строк блочной матрицы A; будем также писать: $(\mathrm{cdn}\,A)(j) = s_j$.

Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_l$— различные простые числа. Для каждого p_i определим матричную задачу $(\mathrm{Mat}^{\,i}(I), T^i(I))$ над полем Z_{p_i}. Набор $A^i = (A^i_1, A^i_2, \ldots, A^i_r)$ матричных Z_{p_i}-представлений частично упорядоченного множества I, $i = 1, \ldots, l$, будем называть правильным, если сумма $(\mathrm{cdn}\,A^i)(1) + (\mathrm{cdn}\,A^i)(2) + \ldots + (\mathrm{cdn}\,A^i)(r)$ не зависит от i. Для правильного набора A^i, $i = 1, 2, \ldots, l$, построим матрицу $B = B(A^1, A^2, \ldots, A^l) = A^1 \oplus A^2 \oplus \ldots \oplus A^l$ над кольцом $S = Z_{p_1} \oplus Z_{p_2} \oplus \ldots \oplus Z_{p_l}$. Матрицу $B = B(A^1, A^2, \ldots, A^l)$ назовем представлением частично упорядоченного множества I над кольцом S. Координатный вектор обобщенного представления определяется по аналогии с данным выше определением координатного вектора матричного K-представления. Неразложимое представление $B = B(A^1, A^2, \ldots, A^l)$ частично упорядоченного множества I над кольцом S назовем стандартно неразложимым, если хотя бы одно соответствующее ему представление $A^i = (A^i_1, A^i_2, \ldots, A^i_r)$ является неразложимым представлением частично упорядоченного множества I над соответствующим полем Z_{p_i}. Неразложимое представление $B = B(A^1, A^2, \ldots, A^l)$ частично упорядоченного множества I над кольцом S назовем нестандартно неразложимым, если все соответствующие ему представления $A^i = (A^i_1, A^i_2, \ldots, A^i_r)$ являются разложимыми представлениями частично упорядоченного множества I над соответствующим полями $Z_{p_1}, Z_{p_2}, \ldots, Z_{p_l}$.

Рассмотрим кольцо $T = Z_{p_1} \oplus Z_{p_2}$.

Для частично упорядоченного множества F конечного типа по векторам размерностей неразложимых представлений в классификации Рингеля построим системы диофантовых уравнений с расширенными матрицами вида

$$\left(\begin{array}{ccc|c} Q & O & O & I_1 \\ O & Q & O & I_2 \end{array}\right)$$

Обозначим матрицы коэффициентов через W. Решения систем находятся в биективном соответствии с термами $x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$ из кольца $P = \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_n]$ степени $(1, 1, \ldots, 1)_m$ относительно градуировки, заданной матрицей W, где n— число переменных системы, m—число

строк матрицы W. Вычислим ряд Гильберта кольца P относительно введенной градуировки, по которому построим все неразложимые представления частично упорядоченного множества F. Анализ построенных объектов приводит к следующему результату.

Теорема. *Компоненты координатных векторов стандартно разложимых и нестандартно неразложимых обобщенных представлений частично упорядоченного множества F конечного типа над кольцом $S = Z_{p_1} \oplus Z_{p_2} \oplus \ldots \oplus Z_{p_l}$ не возрастают при росте l.*

Литература

1. Назарова Л.А., Ройтер А.В. *Представления частично упорядоченных множеств* // Записки науч. семинара Ленинградского отд. мат. инст. им. Стеклова (ЛОМИ). 1972. Т. 28. С. 5–31.

2. Дрозд Ю.А. *Матричные задачи и категории матриц* // Записки науч. семинара Ленинградского отд. мат. инст. им. Стеклова (ЛОМИ). 1972. Т. 28. С. 144–153.

3. Sturmfels B. *Algorithms in invariant theory.* Wien, New York: Springer-Verlag, 1993.

О τ-ЗАМКНУТЫХ n-КРАТНО ω-НАСЫЩЕННЫХ ФОРМАЦИЯХ НИЛЬПОТЕНТНОГО ДЕФЕКТА 1

А.И. Рябченко

Гомельский технический университет им. П. О. Сухого
пр. Октября 48, 246746 Гомель, Беларусь
1479892@gmail.com

В работе рассматриваются только конечные группы. Определения иобозначения можно найти в [1–3]. Напомним некоторые из них.

Пусть ω — некоторое непустое множество простых чисел, ω' — дополнение к ω во множестве всех простых чисел. Отображение $f : \{\omega\} \cup \{\omega'\} \to$ {формации групп} называют ω-локальным спутником. Через $LF_\omega(f)$ обозначают класс таких групп G, что $G/G_{\omega d} \in f(\omega')$ и $G/F_p(G) \in f(p)$ для всех $p \in \omega \cap \pi(G)$, где f — ω-локальный спутник, $G_{\omega d}$ — наибольшая нормальная в G подгруппа, у которой для всех композиционных факторов H/K пересечение $\pi(H/K) \cap \omega \neq \varnothing$. Если формация $\mathfrak{F} = LF_\omega(f)$, то ее называют ω-локальной формацией. Формацию $\mathfrak{F}$ называют ω-насыщенной, если ей принадлежит всякая группа G, для которой $G/O_\omega \cap \Phi(G) \in \mathfrak{F}$.

Широкое применение в различных приложениях теории классов групп нашли ω-насыщенные формации, замкнутые относительно систем подгрупп.

Напомним, что подгрупповой функтор τ сопоставляет каждой группе G такую систему ее подгрупп $\tau(G)$, что выполняются следующие условия:

1) $G \in \tau(G)$ для любой группы G;

2) для любого эпиморфизма $\varphi : A \to B$ и для любых групп $H \in \tau(A)$ и $T \in \tau(B)$ имеет место $H^\varphi \in \tau(B)$ и $T^{\varphi^{-1}} \in \tau(A)$.

Формацию $\mathfrak{F}$ называют τ-замкнутой, если $\tau(G) \subseteq \mathfrak{F}$ для всех групп $G \in \mathfrak{F}$.

Всякую формацию считают 0-кратно ω-насыщенной. При $n \geqslant 1$ формацию $\mathfrak{F}$ называют τ-замкнутой n-кратно ω-насыщенной, если $\mathfrak{F} = LF_\omega(f)$, где все значения f являются τ-замкнутыми ($n-1$)-кратно ω-насыщенными формациями.

τ-замкнутую n-кратно ω-насыщенную формацию $\mathfrak{F}$ называют минимальной τ-замкнутой n-кратно ω-насыщенной ненильпотентной формацией, если $\mathfrak{F} \nsubseteq \mathfrak{N}$, но все собственные τ-замкнутые n-кратно ω-насыщенные подформации из $\mathfrak{F}$ содержатся в $\mathfrak{N}$.

Длину решетки τ-замкнутых n-кратно ω-насыщенных формаций, содержащихся между $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F} \cap \mathfrak{N}$ называют $\mathfrak{N}_\tau^{\omega_n}$-дефектом формации $\mathfrak{F}$.

В настоящей работе доказана следующая