УДК 519.63

СОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ РАСЧЕТА ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ С УРАВНЕНИЕМ ВЛАГОПЕРЕНОСА

Н.Г. Абрашина-Жадаева

Беларусь, Минск zhadaeva282@gmail.com

Обсуждается новый класс численных методов для решения задач математической физики, возникающих в теории влагопереноса, в том числе и учитывающих фрактальные свойства среды. Исследована корректность метода построения разностных задач в классе достаточно гладких решений рассматриваемых уравнений.

***Ключевые слова*:** Уравнение влагопереноса; корректность; априорная оценка.

IMPROVEMENT OF NUMERICAL METHODS FOR CALCULATING MATHEMATICAL PHYSICS PROBLEMS WITH THE HEAT-MOISTURE TRANSFER EQUATION

N.G. Abrashina-Zhadaeva

Minsk, Belarus zhadaeva282@gmail.com

A new class of numerical methods for solving problems of mathematical physics arising in the theory of moisture transfer, including taking into account the fractal properties of the medium, is discussed. The correctness of the method of constructing difference problems in the class of sufficiently smooth solutions of the equations under consideration is investigated.

***Keywords*:** Moisture transfer equation; correctness; a priori estimation.

Введение

В настоящее время имеется большое число публикаций, посвященных исследованию различных математических моделей физических процессов и их численной реализации. Мы рассматриваем модель влагопереноса, где известно, что влажность может возрастать в более сухих слоях по диффузионному закону, если среда (почва) в начальный момент времени имеет неравномерное по глубине распределение влажности. В таких условиях наблюдается, так называемый, эффект Аллера [1]. Эффект, когда направление градиента влажности почвы будет соответствовать слоям, где влажность ниже. Для описания этого явления обычно используют концентрацию трещиноватого пористого грунта. В этой связи в уравнение

влагопереноса вводится поправочный член, который в почвогрунтах учитывает его влагоперенос.
Базовая модель Аллера имеет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial u}{\partial x} + \aleph\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}\right),$$

где $D = D(u), \aleph$ −соответственно коэффициент диффузии и коэффициент Аллена. В основе таких моделей лежат дифференциальные уравнения в частных производных и их конечно-разностные аналоги, которые хорошо себя зарекомендовали при решении больших прикладных задач. Этим и продиктовано внимание исследователей к анализу важной в приложениях задачи в аграрном секторе страны, описывающих процесс влагопереноса в средах различной структуры [1-4], и развитию численных методов решения смешанных задач математической физики, которые должны быть универсальными.
В работе для решения задачи с уравнением влагопереноса предлагаются модифицированные методы переменных направлений, основанные на аддитивном представлении оператора исходной задачи. Причем операторы расщепления обладают свойствами самосопряженности и положительной определенности [4]. Предложенные при этом разностные схемы просты в реализации позволяют проводить как последовательные, так и распараллеленные вычисления [6-9].

1. Постановка задачи.

В цилиндрической области $G_T = \bar{G} \times (0, T]$, где $\bar{G} = G \cup \partial G, G = \{x = (x_1, \dots, x_p), 0 < x_\alpha < l_\alpha, \alpha = 1, \dots, p\}$ – p -мерный параллелепипед с боковой поверхностью $\partial G_T = \partial G \times [0, T]$, будем исследовать процесс движения влаги против градиента влажности, рассматривая многомерную математическую модель влагопереноса Аллера вида:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu + f(x,t), \qquad x \in G, t \in (0,T], \tag{1}$$

$$u|_{\partial G_t} = 0, \qquad u(x,0) = u_0(x), \tag{2}$$

где

$$Lu = \sum_{\alpha=1}^{p} L_\alpha u + \aleph\frac{\partial}{\partial t}\sum_{\alpha=1}^{p} L_\alpha u,$$

$$L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right), \qquad 0 < C_1 \le k_\alpha \le C_2$$

$\aleph -$ коэффициент Аллера, который мал при впитывании влаги и велик при испарении [1 с.159]. Основные обозначения используем из [5].

Следуя [8,9], для (1), (2) переходим к соответствующей абстрактной задаче Коши [6-9]:

$$\frac{du}{dt} + A\left(u + \aleph \frac{du}{dt}\right) = f(t), \tag{3}$$

$$u(0) = u_0\,, \tag{4}$$

где $A = \sum_{\alpha=1}^{p} A_\alpha$, $A: H \to H$ - положительно определенный оператор в гильбертовом пространстве H со скалярным произведением $(u,v) = \int_G uvdx$, и $A_\alpha -$ постоянные, самосопряженные положительно определенные операторы, порожденные дифференциальными выражениями $-L_\alpha u$ и граничными условиями из (2). $u(t) \in D(A), D(A) -$ область определения оператора A.

Вместо скалярного решения $u(t)$, рассмотрим вектор решений $U(t) = \left(u_1(t), u_2(t), \dots u_{\alpha(t)}, \dots, u_p(t)\right)$ и перейдем к системе однотипных подзадач:

$$\frac{du_\alpha}{dt} + \sum_{\beta=1}^{p} A_\beta (u_\beta + \aleph \frac{du_\beta}{dt}) = f(t), \tag{5}$$

$$u_\alpha = u_0 \quad , \qquad \alpha = 1, \dots, p, \tag{6}$$

2. Корректность перехода к (5), (6) и априорная оценка.

Теорема. *Задача (5),(6), полученная в результате перехода от (3),(4), поставлена корректно и справедлива оценка*

$$\left\| \sum_{\alpha=1}^{p} A_\alpha u_\alpha \right\|^2 \leq M \|f\|_2^2 + \| Au_0\|^2\,, \tag{7}$$

$M > 0 -$постоянная и $u_\alpha(t) = u(t),\ \forall \alpha = 1, \dots, p$.

Доказательство методологически аналогично [6-9]:
пусть $z_\alpha = u_\alpha - u$, тогда из (5) будем иметь

$$\frac{dz_\alpha}{dt} + \sum_{\beta=1}^{p} A_\beta (z_\beta + \aleph \frac{dz_\beta}{dt}) = 0, \quad z_\alpha(0) = 0 \quad , \qquad \alpha = 1, \dots, p, \tag{8}$$

Каждое уравнение из (8) умножим скалярно на $A_\alpha \frac{dz_\alpha}{dt}$ и просуммируем их по α=1,…, p, тогда получим

$$\sum_{\alpha=1}^{p}(\frac{dz_\alpha}{dt}, A_\alpha \frac{dz_\alpha}{dt}) + \sum_{\alpha=1}^{p}(\sum_{\beta=1}^{p} A_\beta z_\beta, A_\alpha \frac{dz_\alpha}{dt}) + \\ +\aleph \sum_{\alpha=1}^{p}(\sum_{\beta=1}^{p} A_\beta \frac{dz_\beta}{dt}, A_\alpha \frac{dz_\alpha}{dt}) = 0 \ . \tag{9}$$

В (9), учитывая, что для второго выражения в нем справедливо представление вида $(\mathrm{v}, \frac{dv}{dt}) = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(v, v)$, а первое - в силу линейности и положительной определенности оператора будет положительным, - третье представимо как $\aleph \left\| \sum_{\alpha=1}^{p} A_\alpha \frac{dz_\alpha}{dt} \right\|^2$, получим выражение, которое после интегрирования по t от нуля до произвольного $t^* \in]0, T]$ будет иметь вид

$$\frac{1}{2}\left\| \sum_{\alpha=1}^{p} A_\beta z_\beta \right\|^2 + \aleph \int_0^{t^*} \left\| A_\alpha \frac{dz_\alpha}{dt} \right\|^2 = 0,$$

Тогда в (8), следуя [8], [9], получаем $\frac{dz_\alpha}{dt} = 0,\ z_\alpha(0) = 0,\ \alpha = 1, \dots, p$ и таким образом, для любых

$t \in [0, T],\ z_\alpha(t) = 0, \rightarrow\ u(t) = u_\alpha,\ \alpha = 1, \dots, p.$

Покажем, что каждая из компонент векторного решения непрерывно зависит от входных данных, т.е. от $f(t),\ u_0$. Для этого умножим скалярно каждое из уравнений системы (5) на $\frac{dA_\alpha u_\alpha}{dt}$ и просуммируем по $\alpha = 1, \dots, p,$ с первыми тремя выражения поступим, как при доказательстве корректности, а к последнему выражению применим $\varepsilon -$ неравенство и получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{d\,t}\left\| \sum_{\alpha=1}^{p} A_\alpha u_\alpha \right\|^2 + \aleph \left\| A_\alpha \frac{dz_\alpha}{dt} \right\|^2 \leq \frac{1}{4\varepsilon}\|f\|^2 + \varepsilon \left\| A_\alpha \frac{dz_\alpha}{dt} \right\|^2.$$

Положим $2\varepsilon = \aleph$ и проинтегрируем по t от нуля до произвольного $t^* \in]0, T]$ будет иметь неравенство вида

$$\left\| \sum_{\alpha=1}^{p} A_\alpha u_\alpha \right\|^2 \leq \frac{1}{\aleph}\|f\|_2^2 + \| A u_0\|^2,\ \ \|f\|_2^2 = \int_0^{t^8} \|f(t)\|^2 dt$$

из которого, обозначив $\frac{1}{\aleph} = M$, получим оценку, которая и доказывает справедливость утверждения теоремы.

Для решения задачи (5), (6) построим модифицированные многокомпонентные схемы [9], так называемые векторно-аддитивные схемы, последовательной реализации [8], следующего вида:

$$\frac{\widehat{y_\alpha} - y_\alpha^*}{\tau} + \sum_{\beta=1}^{\alpha} A_\beta\big(\hat{y}_\beta + y_{\beta t}\big) + \sum_{\beta=\alpha+1}^{p} A_\beta(y_\beta + \check{y}_{\beta t}) = f, \qquad (10)$$

$$y_\alpha(0) = u_0, \qquad \alpha = 1, \dots, p,$$

$$y_1^* = y_1, \qquad y_\alpha^* = \frac{1}{2}(y_{\alpha-1} + y_\alpha), \qquad \alpha = 2, \dots, p.$$

и параллельной реализацией [7], [8]:

$$\frac{\widehat{y_\alpha} - \tilde{y}}{\tau} + \sigma A_\alpha(\hat{y}_\alpha + y_{\alpha t}) - \sigma A_\alpha(y_\alpha + \check{y}_{\alpha t}) + \sum_{\beta=1}^{p} A_\beta(y_\beta + \check{y}_{\beta t}) = f, \qquad (11)$$

причем $\sigma \geq 0{,}5$, $\tilde{y} = \frac{1}{p}\sum_{\alpha=1}^{p} y_\alpha$, $\quad y_\alpha(0) = y_0$.

Для (10), когда $f \neq f(t)$ и для (11) доказана безусловная устойчивость алгоритмов для всех $\tau < \tau_0$ и, например, для (10) справедлива оценка

$$\|v^{n+1}\|^2 = \sum_{\propto=1}^{p} (v^{\alpha,\alpha-1}, v^{\alpha,\alpha-1}) \leq \tau^2(1 + \tau C_0)^{-1} \left\| \sum\nolimits_{\alpha=1}^{p} A_\alpha y_\alpha(0) - f(0) \right\|^2,$$

$$v^{\alpha,\alpha-1} = y_\alpha - y_{\alpha-1}, \; C_0 > 0.$$

Подробным доказательствам будет посвящена отдельная статья. С методологией исследования устойчивости и сходимости векторно-аддитивных схем вида (10), (11) можно ознакомиться, например в работах [7,8] (см. цитируемую там литературу). Наличие члена в предложенных алгоритмах вида $\sum_{\beta=\alpha+1}^{p} A_\beta(y_\beta + \check{y}_{\beta t})$ не вносит дополнительных трудностей в исследования.

Аналогичные алгоритмы строятся для задачи, описывающей процесс влагопереноса в средах с фрактальной структурой. В этом случае за базовую модель принимают уравнение вида

$$\partial_{0t}^{\gamma} u(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial u}{\partial x} + \aleph\, \partial_{0t}^{\gamma} \frac{\partial u}{\partial x}\right), \qquad 0 < \gamma \leq 1,$$

$u(x,t)$ —влажность в точках $0 \leq x \leq l$ в момент времени t.

∂_{0t}^{γ} – регуляризованный оператор Римана – Лиувилля, $0 < \gamma \leq 1$, представляет собой оператор дробного дифференцирования [9].

Это модель обобщается, по образцу данной статьи, на многомерный случай. В качестве численного метода нахождения решения поставленной задачи можно выбрать, например, алгоритмы, предложенные в работах [11–14].

Заключение

Результаты, представленные в работе, ориентированы на применение информационных технологий в мелиорации [4]. Предложенные методы строились на основе известных аналогов [6 - 9] и представляют собой уже усовершенствованные численные методы решения многомерных задач математической физики для конкретного типа задач и могут быть использованы для улучшения информационного обеспечения задач автоматизации управления водным режимом почвы в случае соответствующих средств дистанционного зондирования.

Библиографические ссылки

1. Чудинов А.Ф. Теплофизика почвы. М.: Наука, 1976. 352.
2. Абрашина-Жадаева Н.Г., Зеленков В.И., Тимощенко И.А. Математическое моделирование физических процессов. М.: Ривш, 2022. 174 с.
3. Шхануков-Лафишев. Векторные аддитивные схемы для некоторых классов уравнений гиперболического типа. Шхануков-Лафишев М.Х., Архестова С.М., Тхамоков М.Б. // Владикавказкий математический журнал. 2013. Т.15. С. 71–84.
4. Якушев В.П. Автоматизация принятия решений при орошении / В.П.Якушев, Л.В., Козырев, Ю.Р. Сигдикова и др. // Вестник российской сельскохозяйственной науки. 2015. № 5. С. 8–10.
5. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1989. 161 с.
6. Жадаева Н.Г. Об одном методе разбиения области в нестационарных задачах математической физики // Дифференциальные уравнения, 1995. Т. 31(7). С. 1217–1221.
7. Жадаева Н.Г. Многокомпонентный вариант метода переменных направлений для эволюционных задач // Дифференц. уравнения, 1997, Т. 33, № 7. С. 998–1000.
8. Абрашина–Жадаева Н.Г., Романова Н.С. Многокомпонентные векторные схемы решения многомерных задач математической физики // Дифференциальные уравнения. 2006. Т. 42, №7. С. 883–894.
9. Абрашина-Жадаева Н.Г. Многокомпонентные векторные схемы расщепления в методах математической физики. Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук. Казань, 2008. 33 с.
10. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их применения. Минск: Наука и техника, 1987.

11. N.Abrashina-Zhadaeva, N.Romanova. A splitting type algorithm for numerical solution of PDEs of fractional order // Mathematical Modelling and Analysis. 2007. № 12(4). С. 399–408.
12. Абрашина-Жадаева Н.Г., Тимощенко И.А. Конечно-разностные методы для уравнения диффузии с производными дробных порядков в многомерной области // Дифференциальные уравнения. 2013. Т. 49, № 7. С. 819–825.
13. Meerschaert M., Tadjeran C. Finite difference approximations for two-sided space-fractional partial differential equations // Applied Numerical Mathematics. 2006. V. 56, №1, С. 80–90.
14. Таукенова Ф.И., Шхануков М.Х. Разностные методы решения краевых задач для дифференциальных уравнений дробного порядка // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2006. Т. 46, № 10. С. 1871–1881.