растворов вещества VI видна изобестическая точка на коротковолновом склоне основной полосы, что характеризует разложение молекул комплекса на отдельные части. Аналогичная картина наблюдается для толуольных растворов соединений III, V при облучении их в основную полосу поглощения.

Значение квантового выхода фотореакции борсодержащих органических комплексов

Растворитель	Вещество			
	III	IV	V	VI
Толуол	$3{,}5\cdot10^{-2}$	$<10^{-6}$	$3{,}1\cdot10^{-2}$	$2{,}1\cdot10^{-3}$
Диметилформамид	$2{,}6\cdot10^{-4}$	$2{,}8\cdot10^{-4}$	$3\cdot10^{-2}$	$1{,}5\cdot10^{-4}$

В таблице приведены только значения квантового выхода фотореакции для растворов соединений III — VI. Значения квантового выхода фотореакции растворов в толуоле борсодержащих комплексов I, II, IV оцениваются меньше 10^{-6}. Молекулы III, V, VI в используемых растворителях разлагаются под воздействием интенсивного излучения, однако ввиду очень малого значения квантового выхода фотореакции можно считать, что они практически устойчивы в толуоле и диметилформамиде.

ЛИТЕРАТУРА

1. Паркер С. Фотолюминесценция растворов.— М., 1972.

Поступила в редакцию 25.11.83.

Кафедра спектроскопии и квантовой электроники

УДК 517.938

Б. С. КАЛИТИН

К УСТОЙЧИВОСТИ КОМПАКТНЫХ МНОЖЕСТВ

В настоящей заметке приводится теорема об орбитальной устойчивости компактного положительного инвариантного множества динамической системы (X, R, π) [1], заданной на локально компактном метрическом пространстве X. Этот результат дополняет теорему 2.1 [2], из него при соответствующей модификации легко следует обобщение теорем 21.1 и 21.2 [3], он является продолжением развития идеи использования знакопостоянных функций Ляпунова, высказанной в [4]. Для краткости изложения используются обозначения и определения статьи [2]. Через FrW обозначается граница множества W, т. е. $\overline{W} = \operatorname{int} W \cup FrW$.

Определение. Пусть M и M_0 два подмножества X, имеющих непустое пересечение. Будем говорить, что M обладает выталкивающей окрестностью W при $t<0$ относительно M_0, если $\forall\, x \in FrW \cap M_0$ $\exists\, \tau < 0$ такое, что $x\tau \notin \overline{W \cap M_0}$.

Для пояснения свойств выталкивающих окрестностей сформулируем следующие две леммы.

Лемма 1. Если компактное положительно инвариантное подмножество $M \subset X$ асимптотически устойчиво относительно замкнутого положительно инвариантного подмножества M_0, содержащего M, то всякая окрестность M содержит выталкивающую окрестность при $t<0$ относительно M_0.

Доказательство легко следует из теорем V.2.2 и V.3.1 [1] о существовании соответствующей функции Ляпунова и свойств ее «поверхностей» уровня. В качестве выталкивающих окрестностей можно брать множества $K_\alpha = \{x \in M_0 \,|\, V(x) \leqslant \alpha\}$ [1] при достаточно малом $\alpha > 0$.

Замечание 1. Обратное утверждение леммы 1 неверно. Для подтверждения этого достаточно рассмотреть фазовый портрет динамической системы на плоскости с особой точкой типа «центро-фокус» [1], в котором спирали «наматываются» на меньшую окружность. Здесь всякий круг с неинвариантной границей является выталкивающей при $t<0$ окрестностью начала координат, однако нулевое решение не является асимптотически устойчивым.

Лемма 2. Если всякая окрестность компактного положительно инвариантного подмножества $M \subset X$ содержит выталкивающую при $t < 0$ окрестность, то M устойчиво.

Доказательство. Пусть M неустойчиво. Тогда $\exists\, \varepsilon > 0$, $B(M, \varepsilon)$-компактно, $\exists\,(x_n)$, $d(x_n, M) \to 0$, $\exists\,(t_n)$, $t_n > 0$, $t_n \to +\infty$, такие, что $d(x_nt, M) < \varepsilon$ при $0 \leqslant t < t_n$ и $d(x_nt_n, M) = \varepsilon\ \forall\, n \geqslant 1$.

Для заданной окрестности $B(M, \varepsilon)$ существует выталкивающая при $t < 0$ окрестность W множества M, содержащаяся в $B(M, \varepsilon)$. Для этой окрестности аналогично предыдущему можно построить последовательность (y_n), $d(y_n, M) \to 0$ и (τ_n), $\tau_n > 0$, $\tau_n \to +\infty$ такие, что $y_n\tau \in \operatorname{int} W$ при $0 \leqslant \tau < \tau_n$ и $y_n\tau_n \in FrW$ $\forall\, n \geqslant 1$. В силу компактности FrW можно считать, что $y_n\tau_n \to y \in FrW$.

Далее, используя свойство выталкивания границы W, известными стандартными приемами (см. [1—3]) приходим к противоречию.

Теорема. Пусть метрическое пространство X локально компактно и M-его компактное положительно инвариантное подмножество. Предположим, что существует окрестность U множества M и непрерывная функция $V\colon U \to R$ такие, что 1) $V(x) \geqslant 0\ \forall\, x \in U$ и $V(x) = 0\ \ \forall\, x \in M$; 2) $V[xt] \leqslant V[x]\ \forall\, t \geqslant 0$ и $\forall\, x[0, t] \subset U$; 3) для любой окрестности U_1 множества M существует выталкивающая при $t < 0$ окрестность M относительно множества $M_0 = \{x \in U \mid V(x) = 0\}$. Тогда M устойчиво.

Доказательство теоремы можно осуществить, используя идеи доказательства леммы 2 и теорем 21.1 и 21.2 [3].

Замечание 2. Проверка условия 3) теоремы представляет собой самостоятельную задачу. Лемма 1 выделяет класс динамических систем, для которых выполнение условия 3) гарантируется требованием асимптотической устойчивости M относительно M_0 (см. [3]). Предлагаемая идея использования выталкивающих окрестностей дает возможность в ряде случаев включить в этот класс и те динамические системы, для которых M устойчиво (неасимптотически) относительно M_0. Укажем один такой класс, позволяющий для установления свойства 3) теоремы использовать метод функций Ляпунова.

Предположим, что существует семейство $(U_n)_{n\geqslant 1}$ открытых окрестностей множества M относительно M_0 таких, что $\overline{U}_{n+1} \subset U_n$ $\forall n \geqslant 1$ и $M = \bigcap\limits_{n\geqslant 1} \overline{U}_n$. Кроме того, предположим, что $\forall n \geqslant 1$ можно указать окрестность U_k, $k = k(n) > n$ этого семейства, замыкание которой компактно и асимптотически устойчиво относительно $\overline{U}_{k-1} \backslash U_k$. В этом случае аналогично лемме 1 с помощью соответствующей функции Ляпунова можно построить выталкивающую окрестность W такую, что $\overline{U}_k \subset \operatorname{int} W$ и $\overline{W} \subset U_{k-1}$.

Таким образом, условие 3) теоремы будет выполнено. Нетрудно привести соответствующий этому пример.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bhatia N. P., Szegö G. P. Stability Theory of Dynamical Systems.— Berlin, 1970.
2. Kalitine B.— R.A.I.R.O. Automatique / Systems Analysis and Control, 1982, v. 16, № 3, p. 275.
3. Гайшун И. В. Вполне разрешимые многомерные дифференциальные уравнения.— Минск, 1983, с. 272.
4. Булгаков Н. Г., Калитин Б. С.— Изв. АН БССР, 1978, № 3, с. 32.

Поступила в редакцию
22.12.83.

Кафедра МОУ