ЛИТЕРАТУРА

1. Пыжкова Н. В.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1972, № 1, с. 22.
2. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движений.— Собр. соч.— Л., 1956, т. 2, с. 473.
3. Сибирский К. С. Алгебраические инварианты дифференциальных уравнений и матриц.— Кишинев, 1976, с. 268.
4. Амелькин В. В., Лукашевич Н. А.— Дифференц. уравнения, 1974, т. 10, № 4, с. 585.
5. Лукашевич Н. А.— Дифференц. уравнения, 1965, т. 1, № 3, с. 295.

Поступила в редакцию
16.12.82.

Кафедра высшей математики и математической физики

УДК 518 : 517.6 : 533.7

П. А. ВАКУЛЬЧИК

О СХОДИМОСТИ ПОЛНОСТЬЮ КОНСЕРВАТИВНЫХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ И МЕТОДА НЬЮТОНА ИХ РЕАЛИЗАЦИИ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

Рассмотрим систему уравнений газовой динамики в случае адиабатического течения газа [1, 2]

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial s}, \quad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\rho}\right) = \frac{\partial v}{\partial s}, \quad \frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon + \frac{v^2}{2}\right) = -\frac{\partial}{\partial s}(pv), \tag{1}$$

где t — время; s — лагранжева массовая координата; ρ — плотность среды; v — скорость; p — давление; ε — внутренняя энергия. Пусть при $t = 0$ заданы начальные условия

$$v(s, 0) = v_0(s), \ p(s, 0) = p_0(s), \ \rho(s, 0) = \rho_0(s), \ \varepsilon(s, 0) = \varepsilon_0(s), \quad 0 \leqslant s \leqslant M, \tag{2}$$

а при $s = 0$ и $s = M$ — граничные условия вида [3].

$$v(0, t) = v^*(t), \quad p(M, t) = p^*(t), \quad 0 < t \leqslant t_0. \tag{3}$$

Будем также предполагать, что решение задачи (1)—(3) в $\Pi = \{0 \leqslant s \leqslant M, \ 0 \leqslant t \leqslant t_0\}$ существует, единственно и является достаточно гладким.

Задача, аналогичная (1)—(3) в случае изотермического течения идеального газа, рассматривалась ранее в [4, 5], где на целочисленном шаблоне исследуется сходимость разностных схем типа Лакса — Вендроффа [6, 7], а также метода Ньютона их реализации. Эти исследования продолжим здесь для случая адиабатического течения, при этом, не ограничивая общности исследования, будем предполагать, что газ идеален с уравнением состояния $\varepsilon = p\zeta/(\gamma - 1)$, где $\zeta = \frac{1}{\rho}$, $\gamma > 1$ — постоянная величина.

На равномерной сетке узлов $\omega_{h\tau}$ [3] рассмотрим полностью консервативную разностную схему типа Лакса — Вендроффа

$$\bar{v}_t + p_s^{(0,5)} = 0, \ \bar{\zeta}_t - v_s^{(0,5)} = 0, \ \bar{\varepsilon}_t + \bar{p}^{(0,5)} v_s^{(0,5)} = 0, \ \varepsilon_{t,0} = -p_0^{(0,5)} \zeta_{t,0}, \tag{4}$$

которая аппроксимирует исходную систему (1) с погрешностью $O(h^2 + \tau^2)$. Здесь $\bar{f} = 0,5\,(f(+1) + f)$, $f^{(0,5)} = 0,5\,(\hat{f} + f)$, $\bar{\varepsilon} = \frac{\overline{\rho\zeta}}{\gamma - 1}$. Дисперсионные свойства разностной схемы (4) изучены в работе [8]. Разностные схемы решения задачи (1)—(3), отличные от (4), предложены в [9]. Здесь же получены оценки погрешности в норме L_2. В [10] исследуется сходимость разностных схем в случае идеального газа при наличии слабого разрыва в решении. Для погрешности разностной схемы в этой работе получены априорные оценки в сеточных нормах L_2 и C. Будем исследовать сходимость разностной схемы (4) в сеточной норме $L_2 + W_2^1$. Рассмотрим ее погрешность. С этой целью обозначим через x,

y и z соответственно погрешности $\frac{1}{\rho}$, p и v. Вычитая теперь из уравнений системы (1) соответствующие уравнения (4), для погрешности разностной схемы (4) получим следующую разностную задачу:

$$\bar{z}_t + 0{,}5\,(\hat{y}_s + y_s) = r_1\,(h^2 + \tau^2),\ \ \bar{x}_t - 0{,}5\,(\hat{z}_s + z_s) = r_2\,(h^2 + \tau^2),$$

$$\bar{\bar{\zeta}} y_t + \hat{\bar{\bar{p}}} x_t + \bar{p}^{(0,5)}\,(\hat{z}_s + z_s)\,\frac{\gamma - 1}{2} = \bar{\bar{y}}_t x + \bar{\bar{x}}_t y + \bar{\bar{\zeta}}_t y + \bar{\bar{p}}_t x + \tag{5}$$

$$+ \left[\bar{y}^{(0,5)}\,(z_s^{(0,5)} - v_s^{(0,5)})\right]\frac{\gamma - 1}{2} + r_3\,(h^2 + \tau^2)$$

с нулевыми начальными и граничными условиями. Здесь $r_i\,(h^2 + \tau^2)$, $i = 1,\ 2,\ 3$ — погрешность аппроксимации соответствующих уравнений (4).

Теорема 1. Пусть разностная схема (4) на $\omega_{h\tau}$ аппроксимирует исходную систему (1) с погрешностью $0(h^2 + \tau^2)$. Тогда при достаточно малых h и τ и таких, что при $\tau = h^\alpha$, $\alpha > 0{,}75$, решение, получаемое по разностной схеме (4), стремится к точному решению исходной задачи (1)—(3), при этом скорость сходимости характеризуется соотношением

$$Q_{j+1} = \left(\|[\hat{\bar{x}}\| + \|[\hat{\bar{y}}\|^2 + \|[\hat{\bar{z}}\|^2 + \|[\hat{y}_s\|^2 + \frac{\gamma - 1}{2}\left[\frac{\bar{p}^{(0,5)}}{\hat{\bar{\zeta}}}\,\hat{z}_s,\ \hat{z}_s\right]\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant M\,(h^2 + \tau^2), \tag{6}$$

где $\|[\bar{f}\|^2 = \sum_{i=0}^{N-1} h\bar{f}_i^2$, $M > 0$ — ограниченная величина, не зависящая от h, τ и решения задачи (4).

Для доказательства теоремы 1 умножим скалярно уравнения системы (5) соответственно на $2\tau\hat{\bar{z}} + 2\tau y_{ts} + \tau\bar{z}_t$, $2\tau\hat{\bar{x}} + \tau\,\frac{\bar{p}^{(0,5)}}{\hat{\bar{\zeta}}}\,(\gamma - 1)z_{ts} + \tau\bar{x}_t$, $2\tau\hat{\bar{y}} + \tau z_{ts}/\hat{\bar{\zeta}} + \tau\bar{y}_t$. Используя затем для оценки скалярного произведения неравенство Коши — Буняковского и ε-неравенство [3], после суммирования полученных выражений придем к соотношению вида $Q_{j+1}^2 \leqslant (1 + \tau c_1)Q_j^2 + \tau c_2\,(Q_{j+1}^3 + Q_j^3)\,h^{-\frac{1}{2}} + \tau c_3\,(Q_{j+1}^4 + Q_j^4)\,h^{-3} + \tau c_4\,(h^2 + \tau^2)^2$, где $Q_0 = 0$, $c_i > 0$, $i = \overline{1,\ 4}$ и зависят от точного решения задачи (1) — (3). Следуя теперь [11], из последнего соотношения при h, $\tau \to 0$ и $\tau = h^\alpha$, $\alpha > 0{,}75$ получим оценку вида (6) и теорема 1 доказана.

Для решения системы нелинейных разностных уравнений (4) в каждой точке сетки $\omega_{h\tau}$ на $(j + 1)$-ом слое будем использовать метод Ньютона, который достаточно полно изложен для такого рода задач в [12]. Линеаризованная по методу Ньютона система уравнений в нашем случае примет вид

$$\frac{\overset{k+1}{\bar{v}} - \bar{v}}{\tau} + 0{,}5\,(\overset{k+1}{p_s} + p_s) = 0,\quad \frac{\overset{k+1}{\bar{\zeta}} - \bar{\zeta}}{\tau} - 0{,}5\,(\overset{k+1}{v_s} + v_s) = 0,$$

$$\frac{\overset{k}{\bar{p}}\,\overset{k+1}{\bar{\zeta}} + \overset{k}{\bar{\zeta}}\,\overset{k+1}{\bar{p}} - \overset{k}{\bar{p}}\,\overset{k}{\bar{\zeta}} - \bar{p}\,\bar{\zeta}}{\tau} + \frac{\gamma - 1}{2}\left[\frac{\overset{k}{v_s} + v_s}{2}\,\overset{k+1}{\bar{p}} + \frac{\overset{k}{\bar{p}} + \bar{p}}{2}\,\overset{k+1}{v_s}\right] + \tag{7}$$

$$+ \frac{\gamma - 1}{4}\,\bar{p}v_s = 0.$$

Здесь индекс k сверху обозначает номер итерации на $j + 1$-ом слое. В качестве нулевой итерации будем брать значения решения в соответствующей точке j-слоя, т. е. $\overset{0}{f} = f$.

Будем исследовать сходимость метода Ньютона (7) решения системы нелинейных разностных уравнений (4). С этой целью рассмотрим сеточные функции погрешности метода Ньютона $\Delta\overset{k}{\zeta} = \overset{k}{\zeta} - \hat{\zeta}$, $\Delta\overset{k}{p} = \overset{k}{p} - \hat{p}$, $\Delta\overset{k}{v} = \overset{k}{v} - \hat{v}$, и из системы (4) почленно вычтем соответствующие уравнения системы (7). Получим систему уравнений для погрешности метода Ньютона

$$\Delta \overset{k+1}{\bar{v}} + \frac{\tau}{2}\Delta \overset{k+1}{p}_s = 0,\quad \Delta \overset{k+1}{\bar{\zeta}} - \frac{\tau}{2}\Delta \overset{k+1}{v}_s = 0,$$

$$\overset{k}{\bar{p}}\,\Delta\overset{k+1}{\zeta} + \overset{k}{\bar{\zeta}}\,\Delta\overset{k+1}{p} + \frac{\tau}{4}(\gamma-1)\left[(\overset{k}{v}_s + v_s)\,\Delta\overset{k+1}{p} + (\overset{k}{\bar{p}} + \bar{p})\,\Delta\overset{k+1}{v}_s\right] =$$

$$= -\Delta\overset{k}{\bar{\zeta}}\,\Delta\overset{k}{\bar{p}} - \frac{\tau}{4}\Delta\overset{k}{\bar{p}}\,\Delta\overset{k}{v}_s(\gamma-1) \qquad (8)$$

с нулевыми начальными и граничными условиями. Для упрощения последующих выкладок, исключив из второго уравнения системы (8) $\Delta\overset{k+1}{\bar{\zeta}}$, придем к системе

$$\Delta\overset{k+1}{\bar{v}} + \frac{\tau}{2}\Delta\overset{k+1}{p}_s = 0,\quad \frac{\tau}{4}(\overset{k}{v}_s + v_s)\,\Delta\overset{k+1}{p} + \frac{\tau}{2}\Delta\overset{k+1}{v}_s\cdot(2\overset{k}{\bar{p}} + \bar{p}) =$$

$$= -\left(\frac{1}{2} - \frac{\gamma-1}{4}\right)\tau\Delta\overset{k}{\bar{p}}\,\Delta\overset{k}{v}_s. \qquad (9)$$

Возведем соотношения (9) в квадрат и обе части квадрата второго соотношения умножим на $\left[(2\overset{k}{\bar{p}} + \bar{p})\left(\overset{k}{\bar{\zeta}} + \frac{\tau}{2}(\gamma-1)\,\overset{k}{v}{}_s^{(0,5)}\right)\right]^{-1}$. Полученные выражения умножим на h, почленно сложим и просуммируем по всем точкам сетки $i = 0, 1, \ldots, N-1$. При этом воспользуемся тем, что $[\Delta\overset{k+1}{\bar{v}}, \Delta\overset{k+1}{p}_s) + [\Delta\overset{k+1}{v}_s, \Delta\overset{k+1}{\bar{p}}) = 0$. Тогда для $\|\Delta\overset{k+1}{w}\|^2 = \|[\Delta\overset{k+1}{\bar{v}}\|^2 + \|[\Delta\overset{k+1}{\bar{p}}\|^2 + \frac{\tau^2}{4}(\|[\Delta\overset{k+1}{p}_s\|^2 + \|[\Delta\overset{k+1}{v}_s\|^2)$ получим рекуррентное соотношение

$$\|\Delta\overset{k+1}{w}\|^2 \leqslant \overset{k}{c}\,\|\Delta\overset{k}{w}\|^4 h^{-1}, \qquad (10)$$

где $\overset{k}{c}$ — некоторые величины, зависящие от k-приближения. Так как для сходимости разностной схемы (4) имеет место теорема 1 и $\overset{0}{f} = f$, то очевидно, что $\|\Delta\overset{0}{w}\| = 0(\tau)$. Если в (10) положить $k = 0$, то получим $\|\Delta\overset{1}{w}\|^2 \leqslant \overset{0}{c}\|\Delta\overset{0}{w}\|^2\cdot 0(\tau^2h^{-1})$, где $\overset{0}{c}$ при выполнении условий теоремы 1 ограничена, а следовательно, шаги h и τ можно выбрать так, чтобы $\overset{0}{c}\cdot 0(\tau^2h^{-1}) = q_0 < 1$ и $\|\Delta\overset{1}{w}\|^2 \leqslant q_0\|\Delta\overset{0}{w}\|^2$ и т. д. Будем иметь $\|\Delta\overset{k+1}{w}\|^2 \leqslant \leqslant \prod_{i=0}^{k} q_i\|\Delta\overset{0}{w}\|^2$, где все $q_i < 1$. Из последнего соотношения следует, что $\lim\limits_{k\to\infty}\|\Delta\overset{k}{w}\| = 0$, а это значит, что метод Ньютона сходится к точному решению разностной схемы (4). Таким образом, справедлива

Теорема 2. При выполнении условий теоремы 1 и при $\tau = h^\alpha$, $\alpha > 0{,}5$ решение, получаемое по методу Ньютона (7), сходится к точному решению разностной схемы (4) со скоростью геометрической прогрессии, знаменатель которой есть величина порядка τ^2h^{-1}.

Для решения задачи (1)—(3) рассмотрим однопараметрическое семейство полностью консервативных разностных схем [8]

$$\bar{v}_t + p_s^{(\sigma)} = 0,\quad \bar{\zeta}_t - v_s^{(0,5)} = 0,\quad \bar{\varepsilon}_t + \bar{p}^{(0,5)}v_s^{(\sigma)} = 0,\quad \sigma > 0{,}5. \qquad (12)$$

Справедлива

Теорема 3. Если разностная схема (12) аппроксимирует исходную систему (1) с погрешностью $0(h^2+\tau)$, то при достаточно малых h и τ и таких, что при $\tau = h^\alpha$, $\alpha > 1{,}5$, решение разностной схемы (12) сходится к точному решению исходной задачи, при этом скорость сходимости по порядку совпадает с погрешностью аппроксимации.

Доказательство теоремы 3 повторяет рассуждения теоремы 1. Как и в случае разностной схемы (4), решение системы нелинейных уравнений (12) будем находить по методу Ньютона, для сходимости которого имеет место

Теорема 4. При выполнении условий теоремы 3 и $\tau = h^\alpha$, $\alpha > 0{,}5$ метод Ньютона решения системы (12) сходится.

Замечание 1. Все проведенные рассуждения имеют место для газа с нелинейными уравнениями состояния $p = P(\rho, T)$, $\varepsilon = \varepsilon(\rho, T)$, где T — температура.

Замечание 2. Исследование сходимости разностной схемы, аналогичной (12), для случая изотермического течения газа при наличии слабых разрывов в решении проведено в [13].

Замечание 3. Вид (3) краевых условий для системы (1) не ограничивает общности изложенных рассуждений.

Замечание 4. Исследование сходимости полностью консервативных разностных схем типа Лакса — Вендроффа для задач газовой динамики с учетом теплопроводности [14] существенно усложняется. Однако основные результаты [4, 5] и приведенные в настоящей работе справедливы и для этого случая.

ЛИТЕРАТУРА

1. Самарский А. А., Попов Ю. П. Разностные методы решения задач газовой динамики.— М., 1980.
2. Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н. Системы квазилинейных уравнений.— М., 1978.
3. Самарский А. А. Теория разностных схем.— М., 1977.
4. Вакульчик П. А.— Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук, 1983, № 5, с. 23.
5. Вакульчик П. А., Баурина Н. И.— Рукопись деп. в ВИНИТИ № 5806-81. Деп. от. 23.12.81.
6. Lax P. D., Wendroff B.— Commun. Pure Appl. Math., 1960, v. 13, № 2, p. 217.
7. Самарский А. А., Гулин А. В. Устойчивость разностных схем.— М., 1973.
8. Москальков М. Н.— Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1980, т. 20, № 1, с. 162.
9. Абрашин В. Н.— Дифференц. уравнения, 1981, т. 17, № 4, с. 710.
10. Абрашин В. Н., Матус П. П.— Дифференц. уравнения, 1981, т. 17, № 7, с. 1155.
11. Абрашин В. Н.— Дифференц. уравнения, 1975, т. 11, № 2, с. 294.
12. Попов Ю. П., Самарский А. А.— Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1976, т. 16, № 6, с. 1503.
13. Голик С. И.— Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук, 1982, № 3, с. 10.
14. Повещенко Ю. А., Попов Ю. П., Самарская Е. А.— Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1982, т. 22, № 4, с. 903.

Поступила в редакцию 22.12.82.

Кафедра вычислительной математики

УДК 512.643

П. Т. КОЗЕЛ

О ВЛОЖЕНИИ ОРТОГОНАЛЬНОЙ ГРУППЫ НАД ПОЛЕМ ХАРАКТЕРИСТИКИ 2 В ПОЛНУЮ ЛИНЕЙНУЮ ГРУППУ

В работе дано доказательство теоремы, анонсированной в [1]. Используются обозначения из [2], а также следующие: 0_{sl} — нулевая $s\times l$-матрица; E_m — единичная $m\times m$-матрица; ${}^tX$ — матрица, транспонированная к X; $d(X) = (x_{11}, \ldots, x_{mm})$ — вектор диагональных элементов матрицы $X = (x_{ij})$. Симплектическая группа $Sp_{2m}(K)$ над полем K характеристики 2 отождествляется с группой матриц $S = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$, удов-