| $t_k$ | $\Theta(t_k)$ | $x^*$ |
|---|---|---|
| 0,99 | .470238583775 1 | |
| 1,00 | .471238879537 1 | 1,000000989 |
| 1,01 | .472239175266 1 | |
| 1,99 | .784397830621 1 | |
| 2,00 | .785398126399 1 | 2,000001743 |
| 2,01 | .786398422111 1 | |
| 2,99 | .109855707734 2 | |
| 3,00 | .109955737313 2 | 3,000002913 |
| 3,01 | .110055766882 2 | |

Задача (1), (2) может быть обобщена на случай систем $n$ линейных о. д. у. первого порядка и для нее по аналогии может быть развита рассматриваемая здесь методика, для чего можно воспользоваться результатами работы [4].

## ЛИТЕРАТУРА


1. Kalaba R. E., Spingarn K. and Zagustin E.— Comput. and Math., 1975, v. 1, № 3, 4, p. 277.
2. Golberg M. A.— SIAM I. Numer. Anal 1977, v. 14, № 1, p. 152.
3. Schwarz B.— Notices Amer. Math., Soc., 1975, v. 22, p. 302.
4. Монастырный П. И.— Ж. вычисл. мат. и мат. физ., 1967, т. 7, № 2, с. 284.
5. Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырный П. И. Вычислительные методы высшей математики.— Минск, 1975, т. 2.



Поступила в редакцию
25.11.82.



*Кафедра численных методов и программирования*



*УДК 517.925*



*В. А. ПРОКАШЕВА*


# ОДНОРОДНЫЕ СИСТЕМЫ ПЕРВОГО ПОРЯДКА БЕЗ ПОДВИЖНЫХ КРИТИЧЕСКИХ ТОЧЕК (п. к. т.) (случай $A_0=0$)

В работе [1] изучался вопрос отсутствия п. к. т. в решениях системы

$$\begin{cases} a_0u'^2+a_1u'v'+a_2v'^2+a_3u^2+a_4uv+a_5v^2=0, \\ b_0u'^2+b_1u'v'+b_2v'^2+b_3u^2+b_4uv+b_5v^2=0, \end{cases} \tag{1}$$

где $a_k=a_k(z)$, $b_k=b_k(z)$, $k=0, 1, 2, 3, 4, 5$.

С помощью преобразования $u=v\cdot w$ данная система приведена к уравнению

$$A_0(z, w)w'^6+A_1(z, w)w'^4+A_2(z, w)w'^2+A_3(z, w)=0. \tag{2}$$

Для уравнения (2) получены [1] необходимые и достаточные условия отсутствия п. к. т. для случая $A_0\neq 0$.

В данной работе изучается случай $A_0=0$, т. е. случай, когда (2) примет следующий вид:

$$A_1(z, w)w'^4+A_2(z, w)w'^2+A_3(z, w)=0, \tag{3}$$

Поскольку [1], $A_0=a_0\left(\begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2-\begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\right)\equiv 0,$

то возможны три подслучая:

$$a_0=0,\quad \begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2 - \begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0; \tag{4}$$

$$a_0=0,\quad \begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2 - \begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0; \tag{5}$$

$$a_0\neq 0,\quad \begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}^2 - \begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{6}$$

I. Исследуем уравнение (2) при условии (4), а также

$$|a_3|+|a_4|+|a_5|\neq 0. \tag{7}$$

Тогда, так как $Q_{01}=a_3w^2+a_4w+a_5\neq 0$, можно записать $A_1(z, w)=$ $=Q_{01}\cdot B_0(z)$, $A_2(z, w)=Q_{01}\cdot B_2(z, w)$, $A_3(z, w)=Q_{01}\cdot B_4(z, w)$ и перейти к рассмотрению уравнения

$$B_0(z)\,w'^4+B_2(z, w)\,w'^2+B_4(z, w)=0, \tag{8}$$

где $B_0(z)=b_0\left(b_0a_2^2+a_1\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\right)$,

$$B_2(z,w)=b_0\left(a_1\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}+2b_0a_2a_3\right)w^4+b_0\left(2b_0a_2a_4+2a_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}-\right.$$

$$\left.-2a_3\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}+a_1\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix}\right)w^3+\left[b_0\left(a_1\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_5 & b_5 \end{vmatrix}+2b_0a_2a_5+\right.\right.$$

$$\left.\left.+2a_2\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}+2a_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix}-2a_4\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\right)+\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}\right]w^2+$$

$$+\left[b_0\left(2a_1\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_5 & b_5 \end{vmatrix}-2a_5\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}+2a_2\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix}\right)+\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix}\right]w+$$

$$+\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_5 & b_5 \end{vmatrix}+2b_0a_2\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_5 & b_5 \end{vmatrix},$$

$$B_4(z, w)=\left\{-b_0a_3w^4+\left(-b_0a_4+\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}\right)w^3+\left(\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-b_0a_5\right)w^2+\left(\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_5 & b_5 \end{vmatrix}\right)w+\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_5 & b_5 \end{vmatrix}\right\}^2.$$

Разделив (8) на $B_0(z)\neq 0$, получим

$$w'^4+A_{11}(z, w)\,w'^2+A_{21}(z, w)=0. \tag{8'}$$

Уравнения типа (8′) рассматривались в [1—3]. Дифференцируя (8′) вдоль своего решения в данном случае получим необходимое условие отсутствия п. к. т. в виде

$$A_{21}=\frac{1}{4}A_{11}^2. \tag{9}$$

Приравнивая в условии (9) коэффициенты при соответствующих степенях $w$, получим систему уравнений, решения которой будут иметь вид: для случая $A_{11}=2\sqrt{A_{21}}$:

$$a_0=0,\ a_3=a_4=b_3=b_4=0,\ a_5\neq 0,\quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_5 & b_5 \end{vmatrix}^2=-4b_0a_5\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_5 & b_5 \end{vmatrix}; \tag{10}$$

$$a_0=0,\ a_3=a_5=b_3=b_5=0,\ a_1\cdot a_4\neq 0,\quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix}^2=-4b_0a_4\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix}; \tag{11}$$

$$a_0=0,\ a_3=b_3=0,\ a_1\cdot a_4\neq 0,\ a_1\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix}=-4b_0a_2a_4,\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0,$$

$$a_1\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_5 & b_5 \end{vmatrix} = -4b_0a_2a_5; \qquad (12)$$

$$a_0=0,\ a_3=b_3=0,\ a_4\neq 0,\ a_2a_5\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix} - 2b_0a_4\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_5 & b_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_5 & b_5 \end{vmatrix} = 0,\ 4a_1a_4b_0\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix} = -a_1\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix}^2 + a_1b_0a_5\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix}; \qquad (13)$$

для случая $A_{11} = -2\sqrt{A_{21}}$:

$$a_0=a_1=0,\ -4b_0\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = b_1^2a_3,\ -4b_0\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix} = b_1^2a_4,$$

$$-4b_0\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_5 & b_5 \end{vmatrix} = b_1^2a_5; \qquad (14)$$

$$a_0=0,\ a_3=b_3=0,\ a_1\neq 0,\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix}^2 = -4b_0a_4\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_5 & b_5 \end{vmatrix}^2 = -4b_0a_5\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_5 & b_5 \end{vmatrix},\ a_4\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_5 & b_5 \end{vmatrix} = a_5\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix}; \qquad (15)$$

$$a_0=0,\ a_3=b_3=0,\ a_1\neq 0,\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_5 & b_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_5 & b_5 \end{vmatrix} = 0; \qquad (16)$$

$$a_0=0,\ a_1\cdot a_3\cdot a_5\neq 0,$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_5 & b_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_5 & b_5 \end{vmatrix} = 0. \qquad (17)$$

При выполнении условия (9) уравнение (8) запишется в виде $w'^4 + 2\varepsilon\sqrt{A_{21}}w'^2 + A_{21} = 0$, т. е.

$$w'^2 = -\varepsilon\sqrt{A_{21}},\ \varepsilon = \pm 1. \qquad (18)$$

Исследуя уравнение (18) на предмет отсутствия п. к. т. при условиях (10)—(17) соответственно получим следующие достаточные условия: для (11):

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix} = 2b_0a_4\cdot\alpha,\ \alpha = \mathrm{const}; \qquad (19)$$

для (12) одно из условий:

$$\frac{a_1}{a_2} = \mathrm{const},\ \frac{a_1}{2a_2} \neq \sqrt{\frac{a_1a_4}{a_5}} = \frac{a_2a_4}{a_5},\ a_5\neq 0, \qquad (20)$$

$$\frac{a_1}{a_2} = \mathrm{const},\ \frac{a_2\cdot a_4}{a_5} = \mathrm{const} \neq \sqrt{\frac{a_1a_4}{a_5}},\ a_5\neq 0; \qquad (21)$$

для (13) добавляется $a_1 = b_1 = 0$, $\dfrac{a_5}{a_4} = \mathrm{const}$,

$$\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix} = \alpha b_0a_4,\ \alpha = \mathrm{const},\ b_0a_5^2 + 4a_4\begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix} = 0, \qquad (22)$$

или

$$a_1\neq 0,\ a_5=b_5=0,\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0,\ \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix} = \beta b_0a_4,\ \beta = \mathrm{const}; \qquad (23)$$

для (14) одно из условий:

$$a_3 = 0,\ a_4 = 0; \qquad (24)$$

$$a_3 = 0,\ a_4 \cdot a_5 \neq 0,\ b_1 \neq 0,\ b_0 = \alpha b_1,\ a_4 = \beta a_5,$$
$$\alpha \text{ и } \beta - \text{const},\ b_0 a_5 \neq b_1 a_4; \tag{25}$$

$$a_3 = 0,\ a_5 = 0,\ a_4 \neq 0,\ \frac{b_1}{b_0} = \text{const} \neq 0; \tag{26}$$

$$a_3 = 0,\ b_1 = 0,\ a_4 \cdot a_5 \neq 0,\ \frac{a_4}{a_5} = \text{const}; \tag{27}$$

$$a_3 \neq 0,\ \left(\frac{a_4}{a_3}\right)^2 = \frac{a_5}{a_3},\ \frac{a_4}{a_3} \neq \frac{b_1}{b_0}; \tag{28}$$

$$a_3 \neq 0,\ \frac{b_1}{b_0} = \text{const},\ \frac{a_4}{a_3} = \text{const},\ \frac{a_5}{a_3} = \text{const},\ \frac{a_4^2}{4a_3^2} \neq \frac{a_5}{a_3},$$

$$\text{корни уравнения } w^2 + \frac{a_4}{a_3} w + \frac{a_5}{a_3} = 0 \tag{29}$$

отличаются от $-\frac{b_1}{2b_0}$;

для (15) добавляется одно из условий:

$$\frac{a_4}{a_5} = \text{const},\ \frac{2b_0 a_4}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix}} = \text{const},\ a_4 \cdot a_5 \neq 0, \tag{30}$$

$$a_4 = 0. \tag{31}$$

$$a_5 = 0,\ \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix} = 2\alpha b_0 a_1,\ \alpha = \text{const} \neq 0; \tag{32}$$

для (16) одно из условий:

$$a_5 \cdot a_4 \neq 0,\ \frac{a_5}{a_4} = \text{const}, \tag{33}$$

$$a_4 = 0,\ a_5 \neq 0. \tag{34}$$

Условия (10) и (17) являются необходимыми и достаточными для отсутствия п. к. т. в уравнении (8). Из вышесказанного вытекает

**Теорема 1.** Для отсутствия п. к. т. в решениях уравнения (2) при условии (4) необходимо и достаточно выполнения одной из следующих групп* условий: (10); (11), (19); (12), (20); (12), (21); (13), (22); (13), (23); (14), (24); (14), (25); (14), (26); (14), (27); (14), (28); (14), (29); (15), (30); (15), (31); (15), (32); (16), (33); (16), (34); (17).

II. Исследуя (2) при условии (5) с учетом (7), приходим к рассмотрению уравнения

$$B_2(z, w)\, w'^2 + B_4(z, w) = 0, \tag{35}$$

где $B_2(z, w)$ и $B_4(z, w)$ многочлены по степеням w, причем не выше соответственно второй и шестой степени, если $a_0 = b_0 = 0$ и не выше четвертой и восьмой, при $a_1 \cdot a_2 \neq 0$, $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = -\frac{b_0 a_2^2}{a_1}$.

Если в (5) $a_0 = a_1 = a_2 = 0$, то система (1) не содержит в решениях п. к. т. Если для (2) выполнены условия (6)—(7), то уравнение (2) распадается на два следующих уравнения:

$$a_0 w'^2 + Q_{01} = 0 \text{ (изучено в [1]) и } B_{21}(z, w)\, w'^2 + B_{41}(z, w) = 0, \tag{36}$$

где $B_{21}(z, w)$ и $B_{41}(z, w)$ — многочлены не выше соответственно четвертой и восьмой степени.

Проводя аналогичные 1 исследования для каждого случая, получим серию необходимых и достаточных условий, подобную тем, которые сформулированы в теореме 1.

* Группы отделены друг от друга точкой с запятой.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Прокашева В. А.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1984, № 2, с. 37.
2. Айнс Э. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения.— Харьков, 1939.
3. Голубев В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений.— М.— Л., 1950.

Поступила в редакцию 08.12.82.

*Кафедра дифференциальных уравнений*

*УДК 517.917*

*Н. В. ПЫЖКОВА*

# К ВОПРОСУ О ПЕРИОДИЧЕСКИХ ИЗОХРОННЫХ СИСТЕМАХ

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{d\xi}{dt}=A_{10}(t)\,\xi+A_{01}(t)\,\eta+A_{20}(t)\,\xi^2+A_{11}(t)\,\xi\eta+A_{02}(t)\,\eta^2+A_{30}(t)\,\xi^3+$$
$$+A_{21}(t)\,\xi^2\eta+A_{12}(t)\,\xi\eta^2+A_{03}(t)\,\eta^3, \qquad (1)$$
$$\frac{d\eta}{dt}=B_{10}(t)\,\xi+B_{01}(t)\,\eta+B_{20}(t)\,\xi^2+B_{11}(t)\,\xi\eta+B_{02}(t)\,\eta^2+$$
$$+B_{30}(t)\,\xi^3+B_{21}(t)\,\xi^2\eta+B_{12}(t)\,\eta^2\xi+B_{03}(t)\,\eta^3$$

с непрерывными периодическими коэффициентами $A_{ik}(t)$, $B_{ik}(t)$.

Получим условия, при которых система (1) с помощью преобразования

$$\xi=x\cos t-y\sin t,\quad \eta=x\sin t+y\cos t \qquad (2)$$

приводится к системе с постоянными коэффициентами:

$$\frac{dx}{dt}=a_{10}x+a_{01}y+a_{20}x^2+a_{11}xy+a_{02}y^2+a_{30}\cdot x^3+a_{21}x^2y+$$
$$+a_{12}xy^2+a_{03}y^3,$$
$$\frac{dy}{dt}=b_{10}x+b_{01}y+b_{20}x^2+b_{11}xy+b_{02}y^2+b_{30}x^3+b_{21}x^2y+ \qquad (3)$$
$$+b_{12}xy^2+b_{03}y^3.$$

**Теорема 1.** Для приводимости (1) к виду (3) преобразованием (2) необходимо и достаточно существование постоянных $\beta_i$ $(i=\overline{0,\ 17})$ таких, что

$$\begin{aligned}
B_{10}(t)&=\beta_0+1+\beta_1\sin 2t+\beta_2\cos 2t,\\
A_{10}(t)&=\beta_3-\beta_2\sin 2t+\beta_1\cos 2t,\\
B_{01}(t)&=\beta_3+\beta_2\sin 2t-\beta_1\cos 2t,\\
A_{01}(t)&=-(\beta_0+1)+\beta_1\sin 2t+\beta_2\cos 2t;
\end{aligned} \qquad (4)$$

$$\begin{aligned}
B_{20}(t)&=-\beta_4\sin t+\beta_5\cos t-\beta_6\sin 3t+\beta_7\cos 3t,\\
A_{20}(t)&=-\beta_8\sin t+\beta_9\cos t-\beta_7\sin 3t-\beta_6\cos 3t,\\
B_{11}(t)&=(\beta_5-\beta_8)\sin t+(\beta_9+\beta_4)\cos t+2\beta_7\sin 3t+2\beta_6\cos 3t,\\
A_{11}(t)&=(\beta_9+\beta_4)\sin t-(\beta_5-\beta_8)\cos t-2\beta_6\sin 3t+2\beta_7\cos 3t,\\
B_{02}(t)&=\beta_9\sin t+\beta_8\cos t+\beta_6\sin 3t-\beta_7\cos 3t,\\
A_{02}(t)&=-\beta_5\sin t-\beta_4\cos t+\beta_7\sin 3t+\beta_6\cos 3t;
\end{aligned} \qquad (5)$$

$$\begin{aligned}
B_{30}(t)&=(\beta_{12}+3\beta_{10})+2(\beta_{17}-\beta_{16}-\beta_{14})\sin 2t+2\,\beta_{11}\cos 2t-\\
&\quad-(\beta_{15}+\beta_{16}+\beta_{17})\sin 4t-(\beta_{12}-\beta_{10})\cos 4t,\\
A_{30}(t)&=(\beta_{17}+\beta_{16})-(\beta_{13}+\beta_{11})\sin 2t-\beta_{14}\cos 2t+\\
&\quad+(\beta_{12}-\beta_{10})\sin 4t-(\beta_{15}+\beta_{16}+\beta_{17})\cos 4t,\\
B_{21}(t)&=(\beta_{17}+\beta_{16})+(3\,\beta_{11}-\beta_{13})\sin 2t+(4\,\beta_{16}-4\beta_{17}+\\
&\quad+3\beta_{14})\cos 2t-3(\beta_{12}-\beta_{10})\sin 4t+3(\beta_{15}+\beta_{16}+\beta_{17})\cos 4t,\\
A_{21}(t)&=-(\beta_{12}+3\beta_{10})+2(\beta_{16}-\beta_{17})\sin 2t+2\beta_{13}\cos 2t-
\end{aligned} \qquad (6)$$