

ISSN 0321-0367



ВЕСТНИК

Белорусского государственного
университета имени В. И. Ленина

СЕРИЯ I

ФИЗИКА

МАТЕМАТИКА

МЕХАНИКА

2
1984



ВЕСТИНИК

*Белорусского государственного
университета имени В. И. Ленина*

НАУЧНО-ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Издается с 1969 года
один раз в четыре месяца

СЕРИЯ I

ФИЗИКА

МАТЕМАТИКА

МЕХАНИКА

№ 2
МАЙ

Главный редактор М. Д. ТИВО
Зам. главного редактора В. Г. РУДЬ
Ответственный секретарь П. Н. БАРАНОВСКИЙ

Редакционная коллегия серии:

А. И. КОМЯК (ответственный редактор),
В. В. БОБКОВ (зам. ответственного редактора), Л. М. БА-
РКОВСКИЙ (зам. ответственного редактора), Б. Ю. ХАНОХ
(ответственный секретарь), А. М. БЕЛЬСКИЙ, В. В. ГРУЗИН-
СКИЙ, Е. С. ВОРОПАЙ, Э. И. ЗВЕРОВИЧ, В. И. КОРЗЮК,
Н. А. ЛЕПЕШИНСКИЙ, Н. А. ЛУКАШЕВИЧ, Г. А. МЕДВЕ-
ДЕВ, И. А. ПРУСОВ, В. Ф. СТЕЛЬМАХ, А. Ф. ЧЕРНЯВ-
СКИЙ, А. М. ШИРОКОВ, Э. М. ШПИЛЕВСКИЙ, С. С. ШУШ-
КЕВИЧ, Н. И. ЮРЧУК

ВЕСТНИК БЕЛОРУССКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
имени В. И. ЛЕНИНА

Серия I, физ., мат. и мех., 1984, № 2

Редактор И. П. Стрельченя
Младший редактор Г. М. Добыш
Художественный редактор С. В. Баленок
Технический редактор и корректор Г. И. Хмарун

Сдано в набор 07.03.84. Подписано в печать 22.05.84. АТ 18730. Формат 70×108^{1/16}. Бумага типографская № 1. Высокая печать. Усл. печ. л. 7,0. Усл. кр.-отт. 7,35. Уч.-изд. л. 7,01. Тираж 1050 экз. Зак. 835. Цена 95 к.

Издательство «Университетское». 220048, Минск, проспект Машерова, 11. Адрес редакции: 220080, Минск, Университетский городок, телефон 20-65-42.

Ордена Трудового Красного Знамени типография издательства ЦК КП Белоруссии. 220041, Ленинский пр., 79.



УДК 621.372.8

А. Д. ТИТОВ, А. П. ХАПАЛЮК

**ГИБРИДНЫЕ НАПРАВЛЯЕМЫЕ МОДЫ
СИММЕТРИЧНОГО ПЛОСКОГО ПРОЗРАЧНОГО ВОЛНОВОДА**

В работах [1] изучались гибридные направляемые НЕ- и ЕН-моды симметричного плоского диэлектрического волновода (ПДВ) в общем случае комплексности показателей преломления $N_j = n_j - i\kappa_j$ слоя ($j=1$) и окружающей среды ($j=2$). Направляемыми считались моды, которые, распространяясь в волноведущем слое, не обмениваются энергией с волнами, распространяющимися вне слоя. Показано, что условия направляемости существенно различны для НЕ- и ЕН-мод; только в случае отсутствия поглощения в слое ($\kappa_1=0$) они совпадают и могут быть записаны в виде

$$e_{1x} \operatorname{sh}(kdn_1e_{2x}) \pm e_{2x} \sin(kdn_1e_{1x}) = 0, \tag{1}$$

где d — толщина слоя; $k = \omega/c$ — волновое число в вакууме; верхний знак соответствует симметричным, нижний — антисимметричным решениям. Комплексный единичный вектор волновой нормали парциальных плоских неоднородных волн (ППНВ) в слое $\vec{e} = \vec{e}_1 + i\vec{e}_2$ в прямоугольной декартовой системе координат (ось x нормальна к границам, вдоль оси z имеет место режим бегущей волны) записывается в виде [2]

$$\vec{e}_1 = \{\operatorname{ch} \vartheta (\cos \alpha, 0, \sin \alpha)\}, \vec{e}_2 = \{\operatorname{sh} \vartheta (-\sin \alpha \cos \eta, \sin \eta, \cos \alpha \cos \eta)\}, \tag{2}$$

где α — угол падения (угол между вектором фазовой нормали \vec{e}_1 и нормалью к границам; эти векторы определяют плоскость падения); ϑ — параметр неоднородности (при $\vartheta=0$ волна однородна); η — параметр некомпланарности (угол между вектором амплитудной нормали \vec{e}_2 и плоскостью падения; при $\eta=0$ волна компланарна, т. е. двумерна).

Остановимся на представляющем практический интерес в оптике случае прозрачности обеих сред ($\kappa_1 = \kappa_2 = 0$), когда дисперсионные уравнения гибридных мод можно записать в виде [1]

$$\operatorname{tg} \left(\frac{kd}{2} n_1 e_x \right) = i \begin{cases} \left[\frac{V n_2^2 - n_1^2 (1 - e_x^2)}{n_1 e_x} \right]^{\pm 1} & \text{(HE)} \\ \left[\left(\frac{n_1}{n_2} \right)^2 \frac{V n_2^2 - n_1^2 (1 - e_x^2)}{n_1 e_x} \right]^{\pm 1} & \text{(EH)}. \end{cases} \tag{3}$$

Таким образом, задача нахождения направляемых модовых решений сводится к решению системы трех (одного комплексного (3) и одного вещественного (1)) трансцендентных уравнений относительно трех вещественных величин e_{1x} , e_{2x} и kd . Вид этих уравнений не изменится, если одновременно изменить знаки e_{1x} и e_{2x} , поэтому при их исследовании всегда можно ограничиться неотрицательными значениями e_{1x} (или e_{2x} , если $e_{1x}=0$). Уравнения Максвелла и граничные условия не позволяют уточнить знак корня в правых частях (3) [4]. Неравенство

$\text{Im} \sqrt{n_2^2 - n_1^2(1 - e_x^2)} < 0$ обеспечивает затухание полей вне слоя при $|x| \rightarrow \infty$ (собственные моды [3, 5]). Другой знак соответствует модам, экспоненциально нарастающим при удалении от границ и, следовательно, не удовлетворяющим условию излучения Зоммерфельда (моды утечки [6] или несобственные моды [3, 5]). Как и в [1], исследуем возможность реализации направляемых мод для обоих вариантов знака.

Уравнение вида (1) имеет ненулевые корни относительно kd только в двух случаях [1]: 1) $e_{2x} = 0, e_{1x} > 0$ (скользящее затухание) и 2) $e_{1x} = 0, e_{2x} > 0$ (скользящее распространение ППНВ [7]). Рассмотрим их по отдельности.

Скользящее затухание. В этом случае имеется три варианта направляемых решений: 1) поперечные моды, реализуемые плоскими однородными волнами с $\vec{e} = \{\cos \alpha, 0, \sin \alpha\}$; 2) поперечные (гибридные) моды, реализуемые плоскими неоднородными волнами при их компланарном (некомпланарном) относительно нормали к границам распространении и нулевом угле падения с $\vec{e} = \{\text{ch } \vartheta, 0, i \text{ sh } \vartheta\}$ ($\vec{e} = \{\text{ch } \vartheta, i \text{ sh } \vartheta \sin \eta, i \text{ sh } \vartheta \cos \eta\}$); 3) гибридные моды, реализуемые плоскими неоднородными волнами при $\eta = \pi/2$ с $\vec{e} = \{\text{ch } \vartheta \cos \alpha, i \text{ sh } \vartheta, \text{ch } \vartheta \sin \alpha\}$.

Дисперсионные уравнения (3) имеют решения только при выполнении условия

$$e_{1x}^2 \leq (n_1^2 - n_2^2)/n_1^2. \quad (4)$$

Из (4) видно, что для полого диэлектрического волновода ($n_1 < n_2$) нельзя реализовать направляемые модовые решения вещественными e_x (в частности, и плоскими однородными волнами) [6]. В первом варианте реализации направляемых мод неравенство (4) соответствует общеизвестной области полного внутреннего отражения (ПО) [8]:

$$n_1 \sin \alpha \geq n_2. \quad (4 \text{ а})$$

Эти моды хорошо изучены и мы останавливаться на них здесь не будем. Для второго варианта неравенство (4) не имеет смысла и, следовательно, такие направляемые моды не реализуются. В третьем варианте неравенство (4) имеет вид

$$n_1^2 \text{ch}^2 \vartheta \cos^2 \alpha \leq n_1^2 - n_2^2. \quad (4 \text{ б})$$

При этом решения дисперсионных уравнений (3) относительно приведенной толщины (частоты) $kd n_1$ можно записать в виде

$$kd n_1 = \frac{1}{\text{ch } \vartheta \cos \alpha} \begin{cases} m_1 \pi \pm 2 \arctg \left(\frac{\sqrt{n^2(1 - \text{ch}^2 \vartheta \cos^2 \alpha) - 1}}{n \text{ch } \vartheta \cos \alpha} \right) \\ m_2 \pi \pm 2 \arctg \left(\frac{n \sqrt{n^2(1 - \text{ch}^2 \vartheta \cos^2 \alpha) - 1}}{\text{ch } \vartheta \cos \alpha} \right) \end{cases} \quad (5)$$

где $n = n_1/n_2$, $m_1, m_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Из заданного значения $\text{ch } \vartheta \cos \alpha = \text{const}$ волновые параметры α и ϑ не определяются однозначно и, следовательно, имеется однопараметрическая счетная серия собственных частот, различные для симметричных и антисимметричных НЕ- и ЕН-мод. Между собственной частотой моды и пространственной структурой ее поля однозначного соответствия не существует. Как следствие все частоты бесконечно вырождены. Это означает, что для заданной собственной частоты имеются интервалы значений волновых параметров, на которых они могут принимать произвольные значения. Кроме того, частоты могут совпадать для мод различных серий как внутри симметричных и, соответственно, антисимметричных НЕ- и ЕН-мод, так и между ними. В пределе для однородных волн неравенство (4 б) переходит в (4 а). Равенство в (4 б) соответствует предельному значению ПО, когда имеется однопараметрическая серия собственных частот (5), одинаковых для НЕ- и ЕН-мод: $kd n_1 = \frac{m-1}{2} \pi \frac{n}{\sqrt{n^2-1}}$ ($m = 1, 2, \dots$), где четные

значения m отвечают симметричным, а нечетные — антисимметричным решениям. Однако даже в этом предельном случае пространственная структура поля каждой частотной моды не определяется однозначно и может быть весьма разнообразной. Действительно, из равенства (4 б) можно определить один из параметров (α или ϑ) и записать вектор волновой нормали через другой параметр

$$\vec{e} = \left\{ \frac{\sqrt{n^2 - 1}}{n}, i \operatorname{sh} \vartheta, \frac{\sqrt{n^2 \operatorname{sh}^2 \vartheta + 1}}{n} \right\} = \left\{ \frac{\sqrt{n^2 - 1}}{n}, i \frac{\sqrt{n^2 \sin^2 \alpha - 1}}{n \cos \alpha}, \frac{\sqrt{n^2 - 1}}{n} \operatorname{tg} \alpha \right\}. \quad (6)$$

На параметр неоднородности ϑ в (6) не накладывается каких-либо ограничений, и он может быть произвольным ($\vartheta \geq 0$ [2]); угол падения α , если он больше предельного угла ПО ($\alpha_{\text{пр}}$) однородных волн, также может принимать произвольные значения ($\alpha_{\text{пр}} \leq \alpha \leq \pi/2$ [2]). При этом собственная частота моды не меняется. В этих случаях увеличение параметра неоднородности волны требует одновременного увеличения угла падения (и наоборот).

Для направляемых НЕ-мод можно построить универсальные дисперсионные кривые [1], справедливые и в случае прозрачности сред, если положить в соответствующих величинах $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$. Для направляемых ЕН-мод в общем случае наличия поглощения таких универсальных зависимостей построить нельзя [1]; это, оказывается, возможно только в случае прозрачности обоих сред. Действительно, с учетом условия (4) дисперсионное уравнение ЕН-мод (3) можно представить в удобном для графического анализа виде

$$\frac{V \sqrt{A}}{2} = p\pi \pm \operatorname{arctg} \left[n^2 \frac{\sqrt{1-A}}{A} \right]^{\pm 1}, \quad (7)$$

где $p=1, 2, \dots$ — модовое число; $V = kd \sqrt{n_1^2 - n_2^2} > 0$ — нормированная толщина (частота) ПДВ (параметр волновода); $A = n_1^2 e_{1x}^2 / (n_1^2 - n_2^2)$ — нормированный поперечный показатель преломления (фазовый параметр) ($0 \leq A \leq 1$), и отрицательное значение корня в правой части отвечает дисперсионному уравнению собственных, положительное — несобственных направляемых мод. В отличие от направляемых НЕ-мод в уравнении (7), помимо V , есть еще один независимый параметр n , необходимый для представления общей волноводной структуры [9]. На рис. 1 представлены дисперсионные зависимости $A = A(V)$ для различных значений $n = 1,1$ (1, а); 1,5 (1, б); 10 (1, в); ∞ (1, г). Сплошными линиями показаны дисперсионные кривые собственных, штриховыми — несобственных направляемых мод. Для слабонаправляющего ПДВ ($n_1 \approx n_2$ [10]) уравнение (7) совпадает с аналогичным уравнением НЕ-мод [1] (при $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$) и направляемые ЕН-моды мало отличаются от соответствующих НЕ-мод. Для них можно использовать универсальные дисперсионные кривые НЕ-мод [1]. При $n \rightarrow \infty$ имеет место вырождение по номеру моды: дисперсионные кривые четырех мод ЕН₀-, ЕН₁-, ЕН₍₂₎-, ЕН₍₃₎- сливаются в одну кривую, а мод ЕН₂-, ЕН₃-, ЕН₍₄₎-, ЕН₍₅₎- в другую и т. д., дисперсионная кривая ЕН₍₁₎-моды сливается с осью ординат. Очевидно, что все моды, кроме ЕН₀-, имеют критическую длину волны (критическую минимальную толщину волновода). Для них волноводный эффект имеет место только при длине волны большей некоторого минимального значения (для заданной толщины ПДВ). В точках отсечки собственных мод $V_m = m\pi$ ($m=1, 3, \dots$ для антисимметричных и $m=2, 4, \dots$ для симметричных решений) решение получается аналитически $e_{1x} = \frac{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}{n_1}$,

$kd = \frac{m\pi}{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}$. Условие отсечки антисимметричной несобственной моды

первого порядка имеет вид $V_{(1)}=2/n^2$; этой точке соответствует тривиальное решение $e_x=0$. Условия отсечки остальных несобственных мод нельзя выразить аналитически: они определяются путем совместного решения (7) и уравнения $V'(A)=0$. С увеличением различия показателей преломления ($n \rightarrow \infty$) величина отсечки неизменна для собственных и уменьшается для несобственных мод. Как и HE_0 -мода [1] EH_0 -мода не имеет отсечки и существует при любых условиях. При этом она слабее ограничена волноведущей сердцевиной и имеет меньшую фазовую постоянную [10] (см. рис. 1). Следовательно, основной модой симметричного прозрачного ПДВ является HE_0 -мода.

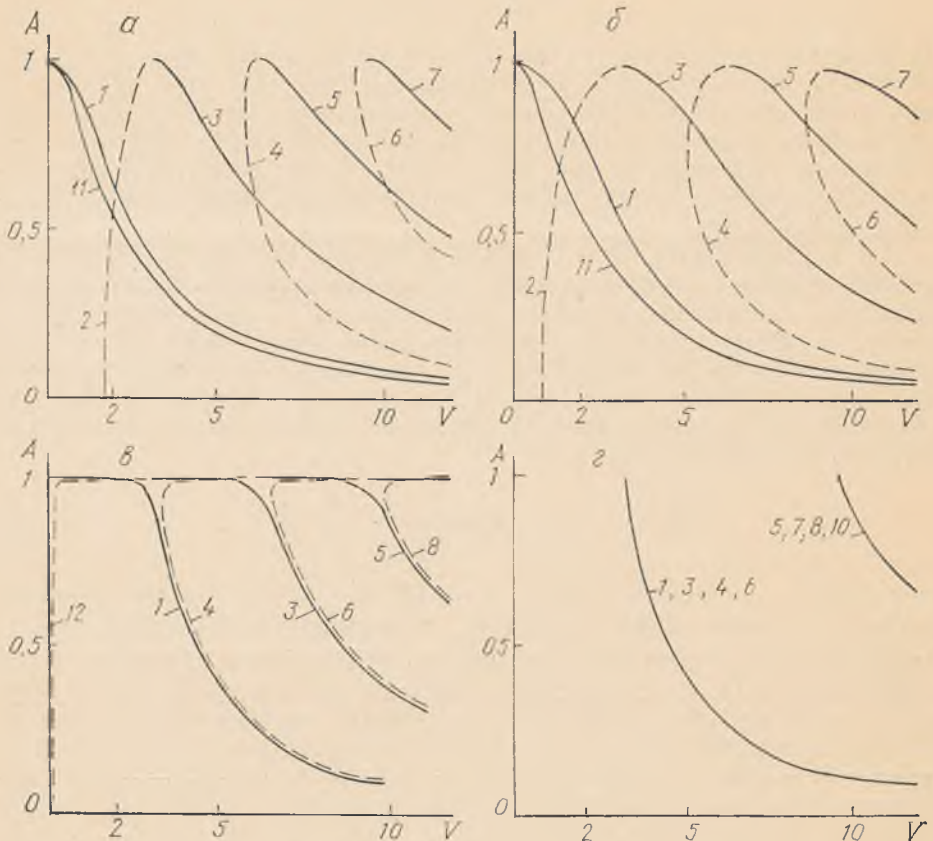


Рис. 1. Дисперсионные кривые гибридных направляемых EH -мод в случае скользящего затухания ППНВ:

1 — EH_0 ; 2 — $EH_{(1)}$; 3 — EH_{1-} ; 4 — $EH_{(2)}$; 5 — EH_{2-} ; 6 — $EH_{(3)}$; 7 — EH_{3-} ; 8 — $EH_{(4)}$; 9 — EH_{4-} ; 10 — $EH_{(5)}$; 11 — HE_0 -моды

Скользящее распространение. В этом случае выражение (2) приводит к поперечным (гибридным) модам, реализуемым плоскими неоднородными волнами при их компланарном (некомпланарном) относительно нормали к границам распространения и угле падения $\pi/2$ с $\vec{e} = \{-i \operatorname{sh} \vartheta, 0, \operatorname{ch} \vartheta\}$ ($\vec{e} = \{-i \operatorname{sh} \vartheta \cos \eta, -i \operatorname{sh} \vartheta \sin \eta, \operatorname{ch} \vartheta\}$). Теперь дисперсионные уравнения (3) имеют решения только при выполнении условия

$$e_{2x}^2 = \operatorname{sh}^2 \vartheta \cos^2 \eta \geq (n_2^2 - n_1^2)/n_1^2. \quad (8)$$

Очевидно, что неравенство (8) всегда выполняется при $n_1 > n_2$, когда любые решения дисперсионных уравнений (3) в виде мнимых e_x ($e_{1x}=0$) будут направляемыми модами. В общем случае при выполнении (8) дисперсионное уравнение EH -мод (3) становится действительным урав-

нением относительно e_{2x} и kd и ввиду ограниченности функции гиперболического тангенса имеет смысл при $n_1 > n_2$ только для антисимметричных, а при $n_1 < n_2$ — только для симметричных решений

$$\frac{V\sqrt{A}}{2} = \begin{cases} \operatorname{arth}\left(\frac{1}{n^2}\sqrt{\frac{A}{A+1}}\right) & (n_1 > n_2) \\ \operatorname{arth}\left(n^2\sqrt{\frac{A-1}{A}}\right) & (n_1 < n_2), \end{cases} \quad (9)$$

где нормированные величины $V = kd\sqrt{|n_1^2 - n_2^2|} > 0$, $A = n_1^2 e_{2x}^2 / |n_1^2 - n_2^2|$

($A \geq 0$) и отрицательные значения корней в правых частях отвечают дисперсионным уравнениям собственных, положительные — несобственных направляемых мод. Из (9) видно, что решения существуют только в виде несобственных мод. На рис. 2 представлены дисперсионные кривые зависимостей $A = A(V)$ для различных значений $n = 1,01; 1,1; 1,5$ (кривые 1, 2, 3) и $1/n = 1,01; 1,1; 1,5$ (кривые 4, 5, 6). Дисперсионные кривые антисимметричной при $n \rightarrow \infty$ и симметричной при $n \rightarrow 0$ несобственных направляемых мод сливаются с осью ординат. Волноводный эффект наблюдается только при длине волны меньшей некоторого критического значения (для заданной толщины). При больших длинах волн ПДВ не может удерживать электромагнитную энергию для таких мод. Для антисимметричной несобственной моды условие отсечки имеет вид $V = 2/n^2$; для симметричной несобственной моды условие отсечки нельзя выразить аналитически: оно определяется путем совместного решения второго уравнения (9) и уравнения $V'(A) = 0$.

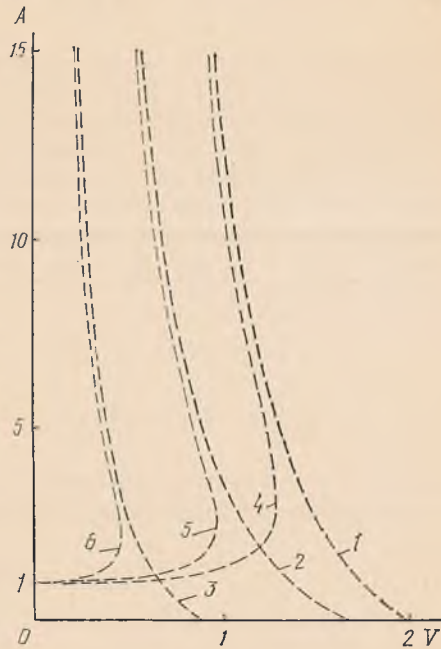


Рис. 2. Дисперсионные кривые гибридных направляемых ЕН-мод в случае скользкого распространения ППНВ

Условия (4) и (8) приводят к тому, что поперечное волновое число той части поля, которая находится вне ПДВ, принимает только чисто мнимые значения: $kN_2 e'_x = ik\sqrt{n_1^2 - n_2^2 - n_1^2 e_{1x}^2}$ или $kN_2 e'_x = ik\sqrt{n_1^2 - n_2^2 + n_1 e_{2x}^2}$. Следовательно, критерий направляемости (1), введенный для выделения мод, которые, распространяясь в волноведущем слое, не обмениваются энергией с волнами, распространяющимися вне волновода, помимо этого, отбирает из класса комплексных волн только поверхностные. Как известно [3], только для поверхностных волн полный поток мощности, переносимый в направлении оси z , отличен от нуля.

Если совместить рис. 1 и 2, можно видеть, что дисперсионные кривые направляемых ЕН-мод (прозрачные среды), как и направляемых НЕ-мод [1], в совокупности образуют замкнутую фазовую траекторию в двумерном пространстве независимых параметров V и A (причем эти параметры принимают все возможные значения от нуля до бесконечности).

Заключение. Исследованными двумя типами решений (вещественными или чисто мнимыми e_x), вообще говоря, не исчерпываются все возможные решения дисперсионных уравнений (3). Покажем, что кроме них существуют комплексные решения вида $e_x = e_{1x} + ie_{2x}$ ($e_{1x} \neq 0$, $e_{2x} \neq 0$) (ненаправляемые моды), которые не удовлетворяют критерию направляемости (1). Доказательство проведем для симметричных НЕ-мод (анало-

гично и для остальных мод), дисперсионное уравнение которых (3) преобразуем к виду

$$kd = -\frac{2}{n_1 e_x} \left(\arccos \frac{n_1 e_x}{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}} + m\pi \right), \quad (10)$$

где $m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ и левая часть действительна. Это уравнение для комплексных e_x при $n_1 > n_2$ эквивалентно системе действительных уравнений

$$z_1 + z_2 = a^2(x^2 + y^2) + 1, \quad z_1 z_2 = a^2 x^2, \quad (11)$$

где $x = \frac{kd n_1 e_{1x}}{2}$, $y = \frac{kd n_1 e_{2x}}{2}$, $a = \frac{2}{kd \sqrt{n_1^2 - n_2^2}}$, $z_1 = \cos^2 x$, $z_2 = \operatorname{ch}^2 y$.

По теореме Виета z_1 и z_2 являются корнями приведенного квадратного уравнения $z^2 - z[a^2(x^2 + y^2) + 1] + a^2 x^2 = 0$, для существования действительных решений которого нужно потребовать неотрицательности его дискриминанта, что дает очевидное неравенство $[(ax - 1)^2 + y^2 + 1] \times [(ax + 1)^2 + y^2 + 1] > 0$. Следовательно, всегда существуют решения у исходного уравнения (10) в комплексных e_x (при $n_1 < n_2$ доказательство проводится аналогично). Отметим, что из (11) следует система для определения e_{1x} и e_{2x} как функций приведенной толщины kd и показателей преломления n_1 и n_2 :

$$\begin{cases} \sin^2 x (\cos^2 x - a^2 x^2) + a^2 \cos^2 x \operatorname{arch}^2 \left(\frac{ax}{\cos x} \right) = 0, \\ y = \operatorname{arch} \left(\frac{ax}{\cos x} \right) \end{cases}$$

которая не имеет смысла при $e_{1x} = 0$, а при $e_{2x} = 0$ дает решения в виде симметричных направляемых HE-мод [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. Титов А. Д., Хапалюк А. П.— Изв. вузов СССР. Радиофизика, 1983, т. 26, № 4, с. 455; т. 26, № 5, с. 593.
2. Хапалюк А. П., Кириленко А. И.— ЖПС, 1975, т. 23, № 5, с. 893.
3. Шевченко В. В. Плавные переходы в открытых волноводах.— М., 1969.
4. Кириленко А. И., Титов А. Д., Хапалюк А. П. Неоднозначность матриц отражения и прохождения плоских неоднородных волн.— Рукопись деп. в ВИНТИ. № 1926-78. Деп. от 13.06.78.
5. Шевченко В. В.— Радиотехника и электроника, 1969, т. 14, № 10, с. 1768.
6. Marcuse D. Theory of Dielectric Optical Waveguides.— New York: Academic Press, 1974.
7. Кириленко А. И., Титов А. Д., Хапалюк А. П.— Изв. вузов СССР. Радиофизика, 1981, т. 24, № 4, с. 511.
8. Гончаренко А. М., Редько В. П. Введение в интегральную оптику.— Минск, 1975.
9. Kogelnik H., Ramaswamy V.— Appl. Opt., 1974, v. 13, № 8, p. 1857.
10. Унгер Х.-Г. Планарные и волоконные оптические волноводы.— М., 1980.

Поступила в редакцию
17.11.82.

НИИ ФФП

УДК 539.1

В. Г. БАРЫШЕВСКИЙ, С. А. КУТЕНЬ

О ВОЗМОЖНОСТИ ИССЛЕДОВАНИЯ ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДОВ В СЕГНЕТОЭЛЕКТРИКАХ С ПОМОЩЬЮ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ МЮОНОВ

Благодаря специфическим свойствам μ - e -распада стало возможным использовать поляризованные пучки положительных мюонов для исследования как конденсированных сред, так и газов [1]. Этот так называемый μ SR-метод можно рассматривать как своеобразный аналог ЭПР или ЯМР, а положительный мюон (μ^+) как своего рода магнитный зонд. Вы-

сокая чувствительность μ^+ к вариациям локальных магнитных полей сделала его незаменимым при изучении фазовых переходов в анти- и ферромагнетиках и других магнитоупорядоченных структурах, обладающих дальним порядком в ориентациях электронных спинов. Исследование прецессии и релаксации спина мюона (мюония) в полупроводниках и металлах дало богатую информацию о диффузии указанных частиц и о действующих на них магнитных полях. Например, в ряде полупроводников выявлены три различных зарядовых состояния мюона: диамагнитная фракция — «голый» μ^+ , нормальная фракция — «нормальный» (Mu) и аномальная фракция — «аномальный» мюоний (Mu*). Исследованы также найтовские сдвиги для μ^+ , установлен подбарьерный характер его диффузии в меди, обнаружены аномалии в диффузии мюона в ряде других металлов и т. д. Общее состояние и проблемы магнитного зондирования вещества с помощью мюонов представлены более детально в трудах двух международных μSR -конференций [1, 2].

В настоящей заметке обращается внимание на то, что μ^+ может служить и в качестве электрического зонда, в частности, при исследовании фазовых переходов в сегнетоэлектриках. При влете пучка положительных мюонов в сегнетоэлектрик следует ожидать, что с большой вероятностью образуется связанное состояние — мюоний (нормальный, аномальный или оба одновременно). Одним из авторов ранее показано [3], что свободный Mu в основном состоянии обладает электрическим квадрупольным моментом (см. также [4—6]). В кристалле величина квадрупольного момента мюония перенормируется по сравнению с вакуумной, причем существенную роль в квадрупольном расщеплении уровней Mu начинают играть эффекты его «конечных размеров» [7]. Вследствие взаимодействия квадрупольного момента мюония с тензором градиента электрического поля (точнее, с обобщенным тензором ГЭП, см. [7]) появляется механизм релаксации спина μ^+ , чувствительный к структурным фазовым превращениям в сегнетоэлектрике. Другой (магнитный) канал деполяризации спина μ^+ в мюонии, связанный с флуктуациями локальных магнитных полей на μ^+ , а также с блужданием мюония как полярона малого радиуса по решетке, рассматривался нами в [8]. В результате процессы релаксации спина мюона при наличии связанной системы μ^+e^- в сегнетоэлектрике будут описываться кинетическим уравнением вида

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + i L_1 \rho_1(t) = -I_{\text{magn}}(t, \rho_1(t)) - I_{\text{quad}}(t, \rho_1(t)), \quad (1)$$

где $\rho_1(t)$ — спиновая матрица плотности мюония; L_1 — оператор Лиувилля, соответствующий зеэмановской энергии Mu во внешнем магнитном поле (если такое имеется). Явный вид магнитной части интеграла столкновений $I_{\text{magn}}(t, \rho_1(t))$ приведен в [8] (формула 9), а интеграл столкновений $I_{\text{quad}}(t, \rho_1(t))$, связанный с квадрупольным механизмом релаксации, получается из формулы (9) [8] заменой магнитного взаимодействия W_1 на квадрупольное взаимодействие мюония с решеткой

$$H_Q = \frac{1}{6} Q_{ik}(\bar{R}) \varphi_{ik}(\bar{R}), \quad (2)$$

где $Q_{ik}(\bar{R})$ — оператор квадрупольного момента мюония в кристалле.

$$Q_{ik}(\bar{R}) = C_F(\bar{R}) \left(\{F_i, F_k\} - \frac{2}{3} \bar{F}^2 \delta_{ik} \right) \quad (3)$$

$$C_F(\bar{R}) = \begin{cases} 0, & F = 0 \\ 3eQ(\bar{R})/2, & F = 1, \end{cases}$$

$F = \mathcal{S} + J$ — операторы спина μ^+ и e^- в мюонии; $Q(\bar{R})$ — величина квадрупольного момента Mu при фиксированном положении центра инерции \bar{R} (см. [7]). В (2) $\varphi_{ik}(\bar{R})$ — тензор градиента электрического поля, создаваемого в точке \bar{R} , учитывающий эффекты «конечных размеров» Mu (обобщенный тензор ГЭП [7]). Умножая (1) на оператор спина мюона \mathcal{S}

и беря след по соответствующим переменным, получаем уравнения движения для вектора поляризации $P_\alpha(t) = 2Sp\rho_1(t)S_\alpha$ типа приведенных в [8] с добавлением в правой части столкновительных членов вида

$$2Sp I_{\text{quadr}}(t, \rho_1(t)) S_\alpha = \frac{1}{2} \varepsilon_{i\alpha\beta} \varepsilon_{\beta\lambda\gamma} P_\gamma(t) \int_0^t \langle \{A_k(t'), A_i\} a_{k\lambda}(t') \rangle dt', \quad (4)$$

где $\varepsilon_{i\alpha\beta}$ — символ Леви-Чевита; знак $\langle \dots \rangle$ означает операцию усреднения с помощью равновесной матрицы плотности кристалла, а аргумент t' у операторов $A_k = Q\Phi_{h\alpha}J_\alpha$ — их гейзенберговское представление. Величины $a_{k\lambda}(t)$ являются коэффициентами матрицы поворота вокруг направления эффективного магнитного поля на мюоне (внешнее поле плюс контактное поле от электрона мюония) и определяются соотношением

$$S_\alpha = \exp^{[i(\omega_0\bar{S}I - \omega S_z + \langle H_Q \rangle) t]} S_\alpha \exp^{[-i(\omega_0\bar{S}I - \omega S_z + \langle H_Q \rangle) t]} = a_{\alpha\beta}(t) S_\beta. \quad (5)$$

Корреляционные функции в (4) содержат в себе всю динамику процессов конденсации мягкой моды при фазовом переходе в сегнетоэлектрике и тем самым дают возможность изучать эти процессы, наблюдая релаксацию спина мюона. С таким же успехом μSR -методом можно исследовать и области вне фазовых переходов, например, дипольные мотивы в антисегнетоэлектриках, структуру доменных стенок и т. д.

Отметим, что в интеграле столкновений (4) опущен неоднородный член, не зависящий от поляризации μ^+ и несущественный при температурах порядка или выше комнатной (как правило, большинство фазовых переходов в сегнето- или антисегнетоэлектриках находится в этой области [9]). При низких температурах, помимо учета указанного члена, необходимо принимать во внимание эффекты немарковского поведения мюона в кристалле [10], в результате чего как в магнитной, так и в квадрупольной части интеграла столкновений появляется память вида

$$2Sp I(t) S_\alpha = \int_0^t u_{\alpha\beta}(t-t') P_\beta(t') dt', \quad (6)$$

а само уравнение движения для поляризации μ^+ становится интегродифференциальным (структуру ядра $u_{\alpha\beta}(t-t')$ см. в [10]).

Укажем также, что к появлению полярного в сегнетоэлектриках или антиполярного порядка в антисегнетоэлектриках, в которых имеются ядра со спином $I > 1/2$, будет чувствительна и диамагнитная фракция. В этом случае, как впервые указал Хартман [11], во второй момент «мезонной линии» дает вклад взаимодействие электрического поля мюона с квадрупольным моментом ядра. Согласно [12], изменяется при этом также временная зависимость флуктуаций магнитного поля на μ^+ , что приводит к существованию квадрупольного канала деполяризации и в случае одиночного мюона. Закон релаксации спина μ^+ в этих условиях приведен в [12].

В заключение отметим, что удобным методом изучения структурных переходов могут оказаться пучки поляризованных отрицательных мюонов. Несмотря на трудности, связанные с использованием пучков μ^- (сильное поглощение в ядрах, низкий коэффициент асимметрии и, как следствие, низкая статистика в эксперименте), их применение в указанной области может оказаться достаточно эффективным, а в некоторых случаях просто необходимым. Наличие квадрупольного момента у мезоатомов [3, 4] и их малые размеры (напомним, что последние определяются размером орбиты μ^- на K -оболочке, что близко к поверхности ядра) делают возможным отделение вклада внутрикристаллических полей от эффектов внутренней структуры атома (типа эффекта «конечных размеров»). Отсутствие же диффузии мезоатомов позволяет исключить диффузионный механизм деполяризации мюона и тем самым изучать структурные флуктуации в чистом виде.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hyperfine Interactions, 1979, vol. 6, p. 1.
2. Hyperfine Interactions, 1981, vol. 8, p. 1.
3. Барышевский В. Г. Ядерная оптика поляризованных сред.— Минск, 1976, с. 144.
4. Барышевский В. Г., Кутень С. А.— ЖЭТФ, 1977, т. 73, с. 2030.
5. Baryshevskii V. G., Kuten S. A.— Phys. Lett. 1978, vol. 67A, p. 355.
6. Барышевский В. Г., Кутень С. А.— Физика атомного ядра (Материалы XIII Зимней школы ЛИЯФ). Л., 1978, с. 95.
7. Baryshevskii V. G., Kuten S. A., Rapoport V. I.— Phys. stat. sol., 1983, v. b116, p. 1.
8. Барышевский В. Г., Кутень С. А.— ФТТ, 1976, т. 18, с. 2873.
9. Желудев И. С. Физика кристаллических диэлектриков.— М., 1968, с. 463.
10. Kruglov V. I.— Acta phys. pol., 1982, vol. A61, p. 73.
11. Hartmann O.— Phys. Rev. Lett., 1977, vol. 39, p. 832.
12. Барышевский В. Г., Ивашин А. В., Кутень С. А.— В сб.: Физика атомного ядра (Материалы XIV Зимней школы ЛИЯФ). Л., 1979, с. 131.

Поступила в редакцию
03.03.83.

*Кафедра ядерной физики и мирного
использования атомной энергии*

УДК 535.39

Л. Н. ОРЛОВ, ГУАНУ СЕ

О ВЛИЯНИИ ТЕМПЕРАТУРЫ НА СПЕКТРЫ ОТРАЖЕНИЯ

Исследование спектров отражения — практически единственный метод определения оптических параметров сильно поглощающих сред и поверхностных слоев твердых тел [1, 2]. Анализ температурной зависимости спектров отражения кристаллических материалов позволяет глубже понять процесс взаимодействия излучения с веществом, получить дополнительную информацию о параметрах исследуемой среды, в частности, разделить влияние поверхностных и объемных процессов. Кроме того, температурная зависимость коэффициента отражения некоторых монокристаллов может быть использована для создания нового класса управляемых оптических элементов, которые могут найти применение в оптоэлектронике и лазерной технике.

В работах [3, 4] показано, что абсолютное значение и положение максимума полосы отражения ряда полупроводниковых материалов зависят от температуры. В то же время по элементарной теории отражения (см., например, [1]) спектры отражения от температуры не зависят.

Рассмотрим этот вопрос в рамках одноосцилляторной модели. Предположим, что исследуемое кристаллическое вещество представляет собой совокупность N практически не связанных друг с другом гармонических осцилляторов*. Будем считать, что спектральная зависимость действительной и мнимой частей комплексного показателя преломления n' такого вещества удовлетворительно описывается классическим дисперсионным контуром [5]:

$$n^2 - \kappa^2 = n_0^2 + \frac{2e^2}{m} \cdot \frac{Nf}{\omega_p} \cdot \frac{\omega_p - \omega}{(\omega_p - \omega)^2 + (\Gamma/2)^2}, \quad (1)$$

$$n\kappa = \frac{e^2}{m} \cdot \frac{Nf}{\omega_p} \cdot \frac{\Gamma}{(\omega_p - \omega)^2 + (\Gamma/2)^2}, \quad (2)$$

где $n' = n - i\kappa$, n и κ — показатели преломления и поглощения, n_0 — статический показатель преломления вещества, f — сила осциллятора, ω_p — резонансная частота колебаний, Γ — константа затухания ($\Gamma/2$ — полуширина линии поглощения).

Для случая нормального падения света на исследуемое вещество коэффициент отражения

$$R = \frac{(n-1)^2 + \kappa^2 n^2}{(n+1)^2 + \kappa^2 n^2}. \quad (3)$$

* Несмотря на очевидные ограничения такой модели, она достаточно широко используется, например, при исследовании динамики кристаллической решетки, либо для описания изолированных полос поглощения [2].

Зависимость $R(T)$ связана с влиянием температуры на величины n и κ , которое определяется температурной зависимостью полуширины дисперсионного контура (считается [6], что сила осциллятора от температуры не зависит, а Γ пропорциональна \sqrt{T}). Выражения (1)–(3) позволяют проанализировать эту зависимость.

В результате несложных преобразований из (1), (2) получаем

$$\kappa = \frac{K_0 \Gamma}{2n\Delta} \quad (4), \quad n = \sqrt{\frac{1}{2} \left(n_0^2 + \frac{K_0 \delta\omega}{\Delta} \right) \left[1 + \sqrt{1 + \frac{K_0^2 \Gamma^2}{(n_0^2 \Delta + K_0 \delta\omega)^2}} \right]}, \quad (5)$$

где $K_0 = \frac{2e^2}{m} \cdot \frac{Nf}{\omega_p}$, $\delta\omega = \omega_p - \omega$, $\Delta = (\delta\omega)^2 + (\Gamma/2)^2$. С помощью этих выражений по формуле (3) можно рассчитать величины коэффициента отражения в области собственных колебаний решетки (на частотах $\omega_p \leq 10^{13} \text{ с}^{-1}$ для определенности взяты $n_0 = 3$ и $\Gamma_0 = 2 \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}$) при различных температурах и величинах отстройки частоты $\delta\omega$.

Вычисления показывают, что показатель преломления вещества при любых $\delta\omega$ монотонно уменьшается с ростом температуры (рис. 1, а), однако по мере увеличения $\delta\omega$ крутизна этой зависимости заметно падает. В то же время величина κ монотонно уменьшается с повышением температуры лишь в случае резонанса или очень малых отстроек частоты (рис. 1, б). По мере возрастания $\delta\omega$ в зависимости $\kappa(T)$ появляется максимум при температурах тем более высоких, чем больше $\delta\omega$; при $\delta\omega \gg \Gamma_0/2$ показатель поглощения асимптотически стремится к постоянному значению при неограниченном возрастании температуры.

Следовательно, величина R при нормальном падении света (см. (3)) по-разному зависит от температуры для различных точек контура линии. Вблизи центральной частоты коэффициент отражения плавно уменьшается с ростом температуры (кривые 1, 2 на рис. 2, а). При отстройках частоты $\delta\omega \geq \Gamma_0/2$ в области малых температур наблюдается заметный рост величины R , сменяющийся при больших температурах плавным ее

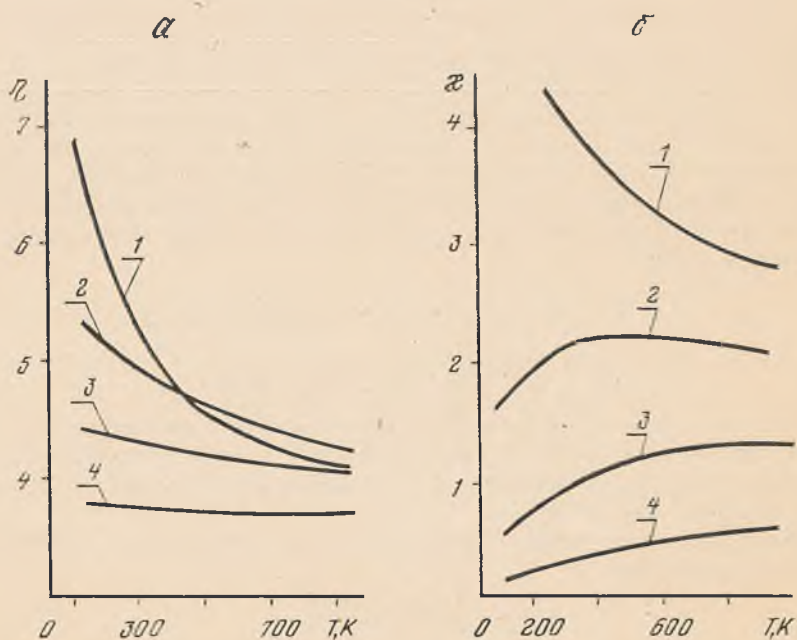


Рис. 1. Температурная зависимость показателя преломления $n(a)$ и коэффициента экстинкции $\kappa(b)$ при $\delta\omega=0(1)$, $\Gamma_0/2(2)$, $\Gamma_0(3)$, $2\Gamma_0(4)$

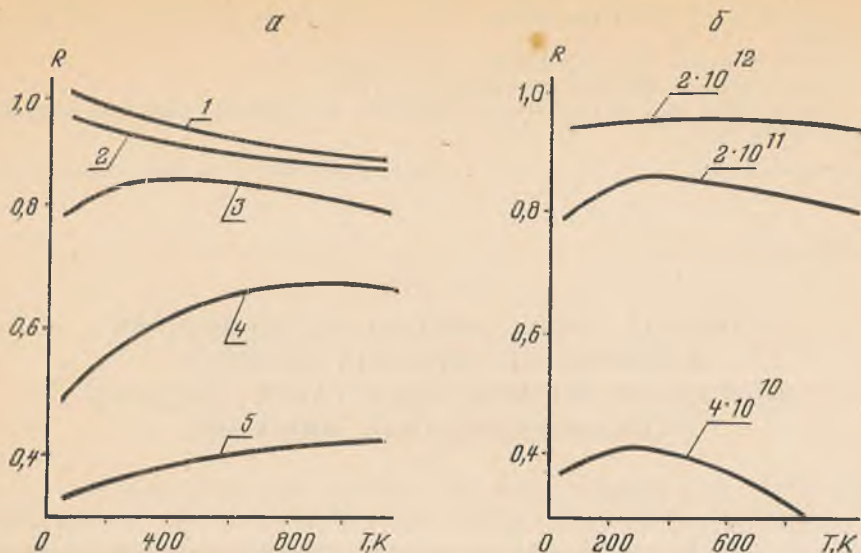


Рис. 2. Температурная зависимость спектрального коэффициента отражения R при различных значениях отстройки частоты $\delta\omega=0$ (1), $2 \cdot 10^9$ (2), 10^{10} (3), $2 \cdot 10^{10}$ (4), $4 \cdot 10^{10}$ (5) — а и различных величинах K_0 при $\delta\omega=\Gamma/2$ — б

уменьшением. При этом максимально достижимое значение R монотонно уменьшается по мере удаления от центра линии.

Отметим, что величина R и характер ее зависимости от T и $\delta\omega$ существенно зависят от K_0 . На рис. 2, б показаны зависимости $R(T)$ для разных K_0 , значения которых приведены цифрами у соответствующих кривых. Сопоставление таких зависимостей при разных расстройках показывает, что для центра линии по мере увеличения K_0 характерно уменьшение крутизны падения R с ростом температуры, а для крыльев линии — наоборот, возрастание крутизны роста $R(T)$. Поэтому при малых K_0 доминирующей является температурная зависимость величины R на частоте ω_p , а для больших K_0 — изменение формы полосы отражения с температурой.

Несмотря на то, что тщательным подбором параметров расчета в рамках рассматриваемой модели удастся неплохо описать форму полосы отражения, для количественного сопоставления с опытными данными необходимо пользоваться более сложными моделями вещества. Однако результаты теории и эксперимента качественно неплохо согласуются: в области собственных колебаний решетки полоса отражения несколько шире полосы поглощения и сдвинута в сторону более высоких частот; повышение температуры приводит к сдвигу максимума полосы отражения в коротковолновую область и к плавному уменьшению величины R_{\max} .

Рассматриваемая модель наиболее пригодна для описания отражения при резонансном поглощении в плотных газах или в замороженных растворах. Для адекватного описания процессов взаимодействия света с твердыми телами, например, селективного отражения вблизи частот поглощения ионных кристаллов, необходимо учесть наличие различных типов колебаний в кристалле, их ангармонизм и взаимодействие, неоднородность состава и структуры монокристаллов, а также различие в механизмах их поглощения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кизель В. А. Отражение света.— М., 1973.
2. Оптические свойства полупроводников / Под ред. Р. Уиллардсона и А. Бира.— М., 1970.

3. Goshinaga H.— Phys. Review, 1955, vol. 100, № 3, p. 753; 1956, vol. 101, № 2, p. 526—535.

4. Satakula A.— Optica Acta, 1962, vol. 9, № 3, p. 210.

5. Дитчберн Р. Физическая оптика.— М., 1965.

6. Грибковский В. П. Теория поглощения и испускания света в полупроводниках.— Минск, 1975.

Поступила в редакцию
04.04.83.

Кафедра спектроскопии и квантовой электроники

УДК 539.12.04

ЧАН ВАН

ВЛИЯНИЕ СВЕРХТОНКОГО РАСЩЕПЛЕНИЯ ЯДЕРНЫХ УРОВНЕЙ НА ПОВОРОТ ПЛОСКОСТИ ПОЛЯРИЗАЦИИ ГАММА-КВАНТОВ В ПОЛЯРИЗОВАННЫХ МИШЕНЯХ

В работах [1, 2] впервые показано, что при движении квантов в мишенях с поляризованными ядрами возможны такие явления, как вращение плоскости поляризации и двойное лучепреломление, обусловленные зависимостью амплитуды когерентного рассеяния на поляризованном ядре на угол ноль от состояния поляризации фотона или, что то же самое, от его спинового состояния. Наряду с установленными в [1, 2] известны внешне похожие явления Фарадея, Коттона-Мутона и Керра, обусловленные расщеплением ядерных уровней во внешних магнитных и электрических полях. Практически во всех случаях в мишенях с поляризованными ядрами имеются магнитные и электрические поля, поэтому при исследовании оптической анизотропии поляризованных мишеней необходимо учитывать возможное влияние эффектов Фарадея, Коттона-Мутона и Керра. Общая теория оптической анизотропии поляризованных мишеней при наличии сверхтонких полей дана в [2]. В настоящей работе на основе теории [2] исследуется вращение плоскости поляризации γ -квантов в поляризованной мишени в условиях, когда ширина ядерного уровня много больше величины сверхтонкого расщепления уровней.

Пусть система уровней ядра, находящегося в веществе под действием некоторых электрических и магнитных полей, описывается совокупностью квантовых чисел m_0 . Если ядра каким-то образом распределены по состояниям m_0 с вероятностью $W(m_0)$, то амплитуда когерентного рассеяния будет [2]

$$f = \text{Sp} \rho \hat{f} = \sum_{m_0} W(m_0) f_{m_0} = e_i^* \sum_{m_0} W(m_0) \hat{f}_{ij}^{(m_0)} e_j = e_i^* f_{ij} e_j, \quad (1)$$

где ρ — спиновая матрица плотности ядра; \hat{f} — амплитуда рассеяния, являющаяся оператором в спиновом пространстве ядра;

$$f_{ij} = \sum_{m_0} W(m_0) \hat{f}_{ij}^{(m_0)}. \quad (2)$$

При этом

$$\hat{f}_{ij}^{(m_0)} = - \frac{k_0 V}{2\pi \hbar c} \hat{f}_{\text{Мессба}} \sum_{m_1} \frac{\langle k_0 p' I_0 m_0 | H' | I_1 m_1 \rangle \langle I_1 m_1 | H' | k_0 p I_0 m_0 \rangle}{E_{k_0} - E_{m_0} - E_1 + \frac{i\Gamma}{2}}, \quad (3)$$

где H' — взаимодействие между ядром и электромагнитным полем; $\hat{f}_{\text{Мессба}}$ — амплитуда вероятности эффекта Мессбауэра; $I_0(I_1)$, $m_0(m_1)$ — спин и магнитные квантовые числа основного (возбужденного) состояния; k_0 — волновой вектор падающего фотона с поляризацией p ; p' — поляризация рассеянного излучения; p и p' могут принимать два значения -1 и $+1$ в зависимости от того, будет ли право- или левокруговая поляризация.

Пользуясь результатами [3, 4], в случае, когда расщепление уровней ядер вызвано магнитным полем, (2) можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned}
f_{ij} = & -\frac{\Gamma_\gamma}{4k_0} f_{\text{мессб}} \sum_{m_0, m_1, M} \frac{W(m_0)}{(E_{k_0} - E_{m_0} - E_1 + \frac{i\Gamma}{2})} [(2L+1)^{\frac{1}{2}} \mu_L^* d_{Mp}^L(\varphi) \times \\
& \times \langle I_0 m_0, LM | I_1 m_1 \rangle - p' (2L+3)^{\frac{1}{2}} \varepsilon_{L+1}^* d_{Mp}^{L+1}(\varphi) \langle I_0 m_0, L+1M | I_1 m_1 \rangle] \times \\
& \times [(2L+1)^{\frac{1}{2}} \mu_L d_{Mp}^L(\varphi) \langle I_0 m_0, LM | I_1 m_1 \rangle - \\
& - p (2L+3)^{\frac{1}{2}} \varepsilon_{L+1} d_{Mp}^{L+1}(\varphi) \langle I_0 m_0, L+1M | I_1 m_1 \rangle] \quad (4)
\end{aligned}$$

В этом выражении $\Gamma_\gamma = 8\pi k_0 (|M_L|^2 + |E_{L+1}|^2)$; $\mu_z = \frac{M_L}{(|M_L|^2 + |E_{L+1}|^2)^{\frac{1}{2}}}$;
 $\varepsilon_{L+1} = \frac{E_{L+1}}{(|M_L|^2 + |E_{L+1}|^2)^{\frac{1}{2}}}$; $\frac{\varepsilon_{L+1}}{\mu_L} = \delta e^{i\alpha}$; $|\mu_L|^2 = \frac{1}{1 + \delta^2}$, где M_L и E_L —

напряженности соответственно магнитного и электрического 2^L -поля; L — порядок мультипольности; φ — угол между направлением распространения γ -кванта с направлением поля; $\langle \dots | \dots \rangle$ — коэффициент Клебша-Гордана; $d_{Mp}^L(\varphi)$ — матрица конечного вращения.

Рассмотрим случай, когда магнитное поле направлено вдоль оси z . При этом гамильтониан магнитного взаимодействия ядра с магнитным полем \hat{H} :

$$\hat{H}_H = -\hat{\mu}H = -\hat{\mu}_z H. \quad (5)$$

Собственные значения энергии основного и возбужденного состояний соответственно [3]:

$$E_{m_0} = g_0 \mu_N m_0 H; \quad E_{m_1} = g_1 \mu_N m_1 H + E_1, \quad (6)$$

где g_0 и g_1 g — факторы основного и возбужденного состояний;

E_1 — энергия возбужденного состояния относительно основного состояния при отсутствии магнитного поля; μ_N — ядерный магнетон.

В случае слабого расщепления, т. е.

$$\Delta\varepsilon = (m_0 g_0 - m_1 g_1) \mu_N H \ll \Gamma \quad (7)$$

можно привести выражение (4) к виду

$$\begin{aligned}
f_{ij} = & -\frac{\Gamma_\gamma}{4k_0} \frac{f_{\text{мессб}}}{(1 + \delta^2)} \sum_{m_0, m_1, M} \left[\frac{W(m_0) \left(E_{k_0} - E_1 - \frac{i\Gamma}{2} \right)}{(E_{k_0} - E_1)^2 + \left(\frac{\Gamma}{2} \right)^2} R + \right. \\
& \left. + \frac{W(m_0) \Delta\varepsilon R}{(E_{k_0} - E_1)^2 + \left(\frac{\Gamma}{2} \right)^2} \right], \quad (8)
\end{aligned}$$

где введено обозначение:

$$\begin{aligned}
R = & [(2L+1)^{\frac{1}{2}} d_{Mp}^L(\varphi) \langle I_0 m_0, LM | I_1 m_1 \rangle - p' (2L+3)^{\frac{1}{2}} \delta e^{-i\alpha} d_{Mp}^{L+1}(\varphi) \times \\
& \times \langle I_0 m_0, L+1M | I_1 m_1 \rangle] [(2L+1)^{\frac{1}{2}} d_{Mp}^L(\varphi) \langle I_0 m_0, LM | I_1 m_1 \rangle - \\
& - p (2L+3)^{\frac{1}{2}} \delta e^{i\alpha} d_{Mp}^{L+1}(\varphi) \langle I_0 m_0, L+1M | I_1 m_1 \rangle].
\end{aligned}$$

В выражении (8) первое слагаемое описывает вращение плоскости поляризации γ -квантов в мишени с поляризованными ядрами в отсутствие сверхтонкого расщепления, т. е. эффект Барышевского [1]. Второе слагаемое описывает вклад, обусловленный расщеплением ядерных уровней в магнитном поле.

Для конкретности предположим далее, что γ -кванты падают на мишень с ядрами типа ^{57}Fe ($I_0 = \frac{1}{2}$, $I_1 = \frac{3}{2}$). Учитывая, $W(m_0) = z^{-1} e^{-\frac{E_{m_0}}{T}}$, где $z = \sum_{m_0} e^{-\frac{E_{m_0}}{T}}$; T — температура в энергетических единицах, можно вычислить в явном виде выражение (8). Из-за громоздкого вида последнего приведем его в предельных случаях:

1. Левополяризованные γ -кванты: а) при $\varphi = 0$

$$f_{ij}^+ = -A_1 [B_1 (3 + \delta^2 - 2\sqrt{3} \delta \cos \alpha) + B_2 (1 + 3\delta^2 + 2\sqrt{3} \delta \cos \alpha)] - A_2 \left[B_1 \left(\frac{g_0 - 3g_1}{2} \right) (3 + \delta^2 - 2\sqrt{3} \delta \cos \alpha) - B_2 \left(\frac{g_0 + g_1}{2} \right) (1 + 3\delta^2 + 2\sqrt{3} \delta \cos \alpha) \right], \quad (9)$$

где

$$A_1 = \frac{\Gamma_\gamma}{4k_0} \cdot \frac{f_{\text{мессб}}}{(1 + \delta^2)} \frac{(E_{k_0} - E_1 - \frac{i\Gamma}{2})}{(E_{k_0} - E_1)^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}; \quad A_2 = \frac{\Gamma_\gamma}{4k_0} \frac{f_{\text{мессб}}}{(1 + \delta^2)} \frac{\mu_N H}{(E_{k_0} - E_1)^2 + \left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}; \quad B_1 = z^{-1} e^{-\frac{E_{1/2}}{T}}; \quad B_2 = z^{-1} e^{-\frac{E_{1/2}}{T}}.$$

б) при $\varphi = \pi$

$$f_{ij}^+ = -A_1 [B_1 (1 + 3\delta^2 + 2\sqrt{3} \delta \cos \alpha) + B_2 (3 + \delta^2 - 2\sqrt{3} \delta \cos \alpha)] - A_2 \left[B_1 \left(\frac{g_0 + g_1}{2} \right) (1 + 3\delta^2 + 2\sqrt{3} \delta \cos \alpha) + B_2 \left(\frac{3g_1 - g_0}{2} \right) \times (3 + \delta^2 - 2\sqrt{3} \delta \cos \alpha) \right], \quad (10)$$

в) при $\varphi = \frac{\pi}{2}$

$$f_{ij}^+ = -A_1 (B_1 + B_2) (\delta^2 + 2) - A_2 (B_1 - B_2) \left[\frac{g_0}{2} (\delta^2 + 2) - \frac{g_1}{2} (3 + 2\sqrt{3} \cos \alpha) \right]. \quad (11)$$

2. Правополяризованные γ -кванты: а) при $\varphi = 0$

$$\bar{f}_{ij} = -A_1 [B_1 (1 + 3\delta^2 + 2\sqrt{3} \delta \cos \alpha) + B_2 (3 + \delta^2 - 2\sqrt{3} \delta \cos \alpha)] - A_2 \left[B_1 \left(\frac{g_0 + g_1}{2} \right) (1 + 3\delta^2 + 2\sqrt{3} \delta \cos \alpha) + B_2 \left(\frac{3g_1 - g_0}{2} \right) (3 + \delta^2 - 2\sqrt{3} \delta \cos \alpha) \right]. \quad (12)$$

б) при $\varphi = \pi$

$$\bar{f}_{ij} = -A_1 [B_1 (3 + \delta^2 - 2\sqrt{3} \delta \cos \alpha) - B_2 (1 + 3\delta^2 + 2\sqrt{3} \delta \cos \alpha)] - A_2 \left[B_1 \left(\frac{g_0 - 3g_1}{2} \right) (3 + \delta^2 - 2\sqrt{3} \delta \cos \alpha) - B_2 \left(\frac{g_0 + g_1}{2} \right) (1 + 3\delta^2 + 2\sqrt{3} \delta \cos \alpha) \right]. \quad (13)$$

в) при $\varphi = \frac{\pi}{2}$

$$\bar{f}_{ij} = -A_1 \left[(B_1 + B_2) (\delta^2 + 2) - A_2 (B_1 - B_2) \left[\frac{g_0}{2} (\delta^2 + 2) - \frac{g_1}{2} (3 + 2\sqrt{3} \cos \alpha) \right] \right]. \quad (14)$$

Общее выражение f_{ij} для произвольного угла φ указывает на угловую зависимость амплитуд, содержащих коэффициент смешивания мультиполей δ . В случае спина основного состояния, равного $1/2$, из (9) и (12) следует также

$$f_{ij}^+(0) - j_{ij}^-(0) \neq 0. \quad (15)$$

Неравенство нулю этой разности означает, что показатель преломления право- и левополяризованных γ -квантов отличаются друг от друга, т. е. в среде возникает поворот плоскости поляризации γ -квантов. Рассмотрим внимательно вклады в амплитуды (8)–(14), обусловленные сверхтонким взаимодействием. Видно, что расщепление уровней приводит к тому, что даже при совпадении энергии γ -кванта с энергией ядерного перехода амплитуда рассеяния в этом случае уже не является чисто мнимой, а имеет действительную добавку, приводящую к тому, что даже при строгом выполнении резонансных уровней имеется поворот плоскости поляризации.

Пусть теперь вдоль оси Y на мишень падает γ -квант с линейной поляризацией \bar{e}

$$\bar{e} = \alpha \bar{e}_1 + \beta \bar{e}_2, \quad (16)$$

где \bar{e}_1 — единичный вектор, параллельный оси z ; \bar{e}_2 — единичный вектор, перпендикулярный к оси z ; $\alpha^2 + \beta^2 = 1$.

$$\bar{e}_1 = \frac{\bar{e}_+ - \bar{e}_-}{\sqrt{2}}; \quad \bar{e}_2 = \frac{\bar{e}_+ + \bar{e}_-}{i\sqrt{2}}, \quad (17)$$

где \bar{e}_+ и \bar{e}_- — циркулярные поляризации. Используя (17) для амплитуды рассеяния на ядерном переходе «чистой» мультипольности в случае, когда фотоны были линейно поляризованы вдоль направления \bar{e}_1 , будем иметь:

$$f_{ij}^{(e_1)} = -\frac{\Gamma_\gamma}{2k_0} \frac{f_{\text{мэссб}} \left(E_{k_0} - E_1 - \frac{i\Gamma}{2} \right)}{(E_{k_0} - E_1)^2 + \left(\frac{\Gamma}{2} \right)^2} (B_1 + B_2) - \\ - \frac{\Gamma_\gamma}{4k_0} \frac{f_{\text{мэссб}} \mu_N H}{(E_{k_0} - E_1)^2 + \left(\frac{\Gamma}{2} \right)^2} (B_1 - B_2) [g_0 - 2g_1 (1 + \sqrt{3})]. \quad (18)$$

Аналогично можно писать выражение амплитуды для случая, когда фотоны были линейно поляризованы вдоль направления \bar{e}_2 :

$$f_{ij}^{(e_2)} = -\frac{\Gamma_\gamma}{2k_0} \frac{f_{\text{мэссб}} \left(E_{k_0} - E_1 - \frac{i\Gamma}{2} \right)}{(E_{k_0} - E_1)^2 + \left(\frac{\Gamma}{2} \right)^2} (B_1 + B_2) - \\ - \frac{\Gamma_\gamma}{4k_0} \frac{f_{\text{мэссб}} \mu_N H}{(E_{k_0} - E_1)^2 + \left(\frac{\Gamma}{2} \right)^2} (B_1 - B_2) \left[g_0 - g_1 \left(\frac{3}{2} - \sqrt{6} \right) \right]. \quad (19)$$

Из (18), (19) следует, что при наличии сверхтонкого расщепления ядерных уровней для γ -квантов, проходящих через мишень с поляризованными ядрами, спин которых равен половине, возможен зависящий от степени поляризации ядер эффект двойного лучепреломления. Если сверхтонкое расщепление равно нулю, то отмеченное явление отсутствует [1, 2].

Полученные результаты могут применяться для мишеней, спины основного и возбужденного состояний ядер которых равны соответственно $1/2$ и $3/2$. К ним относятся, например, мишени с ядрами типа ^{57}Fe , ^{119}Sn и ^{125}Te .

Автор выражает глубокую благодарность В. Г. Барышевскому за постановку вопроса и полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Барышевский В. Р. Ядерная физика, 1966, т. 4, с. 1045.
2. Барышевский В. Г. Ядерная оптика поляризованных сред.— Минск, 1976.
3. Андреева М. А., Кузьмин Р. Н., Мессбауэровская гамма-оптика.— М., 1982.
4. Blum M., Klotner O.— Phys. Rev., 1968, vol. 171, p. 417.

Поступила в редакцию
08.04.83.

Кафедра ядерной физики и мирного
использования атомной энергии

УДК 539.1+539.2

О. М. АНШАКОВ, В. Л. ГУРАЧЕВСКИЙ,
А. Л. ХОЛМЕЦКИЙ, В. А. ЧУДАКОВ

МЕССБАУЭРОВСКАЯ СПЕКТРОСКОПИЯ ТОНКИХ ПЛЕНОК С РЕГИСТРАЦИЕЙ КОНВЕРСИОННЫХ ЭЛЕКТРОНОВ

В настоящее время заметно возрос интерес к мессбауэровской спектроскопии тонких поверхностных слоев и покрытий материалов [1]. Если традиционная методика измерений (геометрия прохождения) дает информацию об объемной структуре вещества и при этом накладывается ограничение на толщину образца (несколько десятков микрон при работе с изотопом ^{57}Co), то методика обратного рассеяния позволяет исследовать поверхностные слои, причем каких-либо ограничений на толщину образца не накладывается. Кроме того, в геометрии обратного рассеяния существует возможность варьирования диапазона глубины изучаемого поверхностного слоя, связанная с тем, что снятие возбуждения мессбауэровского ядра может осуществляться через несколько каналов с испусканием различных видов излучений, пробеги которых в веществе неодинаковы. Так, вероятность переизлучения гамма-кванта с энергией 14,4 кэВ 10 %, в 90 % случаев ядро передает энергию возбуждения конверсионному электрону, имеющему энергию 7,3 КэВ. Этот процесс сопровождается испусканием характеристического рентгеновского кванта с энергией 6,3 КэВ, который, в свою очередь, с вероятностью 63 % выбивает оже-электрон с энергией 5,6 КэВ. Диапазон исследуемой глубины поверхностного слоя определяется тем, какой из перечисленных видов излучений регистрируют. Например, пробеги гамма-квантов с энергиями 14,4 и 6,3 КэВ в железе составляют несколько десятков микрон, максимальный пробег конверсионных электронов ~ 4000 Å.

Регистрация обратно-рассеянных 14,4 и 6,3 КэВ гамма-квантов производится либо сцинтилляционным детектором с тонким (~ 1 мм) кристаллом NaI(Tl), либо аргоно-метановым пропорциональным счетчиком, либо германиевым полупроводниковым детектором.

Во многих случаях возникает необходимость изучения очень тонких поверхностных слоев ($\sim 10^2$ — 10^3 Å), например, при исследовании процессов поверхностного окисления материалов [2], механизмов радиационного повреждения веществ и т. д. [3, 4]. При этом следует регистрировать конверсионные и оже-электроны. Регистрация низкоэнергетических электронов сопряжена с определенными трудностями. Например, использование проточного He-метанового пропорционального счетчика ограничено узким диапазоном его рабочих температур, в то время как в мессбауэровских экспериментах зачастую требуются измерения в очень широком интервале температур. Регистрация электронов с помощью магнитных или электростатических систем с малой светосилой [5] приводит к значительному увеличению времени эксперимента.

В настоящей работе предложена сравнительно простая методика для регистрации конверсионных и оже-электронов ^{57}Fe при помощи сцинтилляционного детектора с тонким пластмассовым сцинтиллятором. На рис. 1 приведена схема экспериментальной установки, реализующей предложенную методику. Детектор электронов включает в себя фотоэлектронный умножитель (ф. э. у.) 1 и тонкий пластмассовый сцинтиллятор 2. Исследуемый образец 3, толщина которого должна быть меньше пробега

гамма-квантов с энергией 14,4 КэВ, помещается вплотную на поверхность сцинтиллятора 2. Излучение источника ^{57}Co падает на поверхность образца 3. Источник приводится в возвратно-поступательное движение с помощью вибратора 5. Импульсы с выхода ф. э. у. 1 через усилитель 7 и дифференциальный дискриминатор 8 поступают на многоканальный анализатор 9, работающий во временном режиме. Переключение каналов анализатора осуществляется с помощью блока управления 6 синхронно с изменением скорости источника 4.

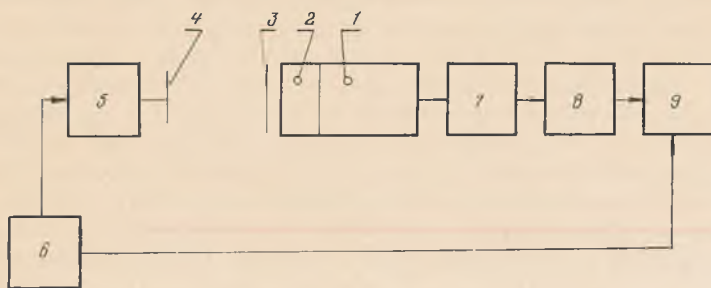


Рис. 1. Схема экспериментальной установки

При резонансном возбуждении мессбауэровских ядер в образце 3 испускаются все перечисленные виды излучения (гамма- и рентгеновские кванты, конверсионные и оже-электроны). Сцинтилляционный детектор осуществляет в геометрии 2л регистрацию этих излучений со стороны поверхности образца, прилегающей к пластмассовому сцинтиллятору. Кроме того, часть гамма- и рентгеновских квантов, прошедших без взаимодействия через образец 3, также может регистрироваться детектором. Однако при достаточно малой толщине пластмассового сцинтиллятора эффективность регистрации гамма- и рентгеновского излучения близка к нулю, в то время как эффективность регистрации электронов близка к 100 % (в силу резкого различия пробегов гамма-квантов и электронов в веществе). В этом случае подавляющий вклад в регистрируемый спектр вносят конверсионные и оже-электроны, испускаемые из тонкого ($\sim 10^3 \text{ \AA}$) слоя вещества образца, прилегающего к поверхности пластмассового сцинтиллятора. Отметим, что по сравнению с обычной геометрией рассеяния, облучение исследуемого образца ведется «на просвет», поэтому на его толщину накладываются такие же ограничения, как и при измерении в геометрии прохождения — она не должна превышать нескольких десятков микрон.

Для изучения зависимости эффективности регистрации гамма- и рентгеновских лучей от толщины пластмассового сцинтиллятора было изготовлено несколько сцинтилляторов одинакового диа-

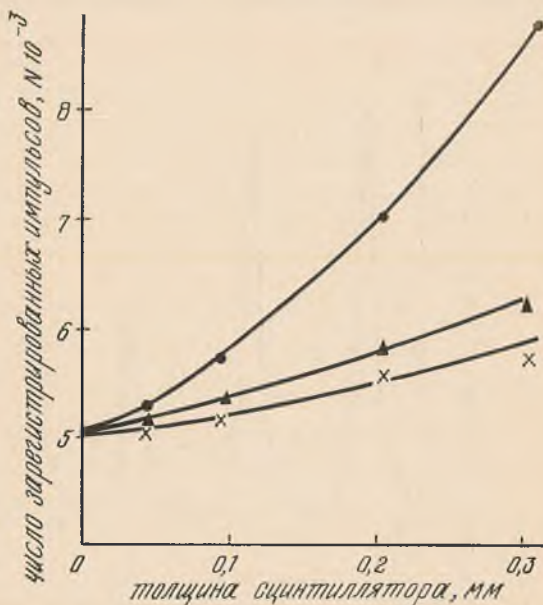


Рис. 2. Зависимости числа зарегистрированных импульсов N от толщины пластмассового сцинтиллятора:

○ — геометрия измерения 1; ▲ — геометрия измерения 2; × — геометрия измерения 3

метра (2 см) и толщиной от 1,2 мм до 50 мкм. Для каждого сцинтиллятора измерялся амплитудный спектр выходных импульсов детектора при облучении источником ^{57}Co (геометрия измерений 1). Далее между источником и детектором прокладывался алюминиевый фильтр толщиной 0,2 мм, практически полностью поглощающий рентгеновские кванты с энергией 6,3 КэВ и мало влияющий на интенсивность линии с энергией 14,4 КэВ (геометрия измерений 2), а затем — медный фильтр толщиной 0,1 мм, поглощающий как 6,3 КэВ, так и 14,4 КэВ кванты (геометрия 3), и в обоих случаях измерялись амплитудные спектры выходных импульсов детектора при различных толщинах сцинтилляторов. Все измерения проводились за одно и то же время. При использовании сцинтиллятора толщиной 1,2 мм строились разностные спектры, полученные вычитанием амплитудных распределений импульсов, измеренных в геометриях 1,2 и 1,3. Очевидно, что эти разностные спектры представляют собой амплитудные распределения импульсов, соответствующих 6,3 и 14,4 КэВ квантам. Оба разностных спектра имели непрерывное распределение от нуля до некоторых максимальных значений, определяемых границами поглощения квантов с энергиями 6,3 и 14,4 КэВ. По положению этих границ проводилась калибровка амплитудной шкалы анализатора. Затем в амплитудных спектрах, полученных с помощью сцинтилляторов различных толщин в геометриях 1, 2, 3, выделялась энергетическая зона от 1 до 7,3 КэВ и подсчитывалось число импульсов, зарегистрированных в этой зоне. На рис. 2 представлены зависимости числа зарегистрированных импульсов в выделенной зоне за фиксированное время от толщины пластмассового сцинтиллятора. Верхняя кривая соответствует геометрии измерений 1, средняя кривая — геометрии измерений 2, нижняя — геометрии измерений 3. Полученные зависимости позволяют сделать вывод, что при толщине сцинтилляторов меньше 0,1 мм, эффективность регистрации гамма- и рентгеновских квантов с энергиями 14,4 и 6,3 КэВ пренебрежимо мала. Из рис. 2 видно, что при экстраполяции толщины сцинтиллятора к нулю, скорость счета выходных импульсов детектора стремится к некоторому постоянному значению, что обусловлено наличием собственных радиационных шумов ф. э. у., основной вклад в которые связан с процессами взаимодействия гамма-излучения

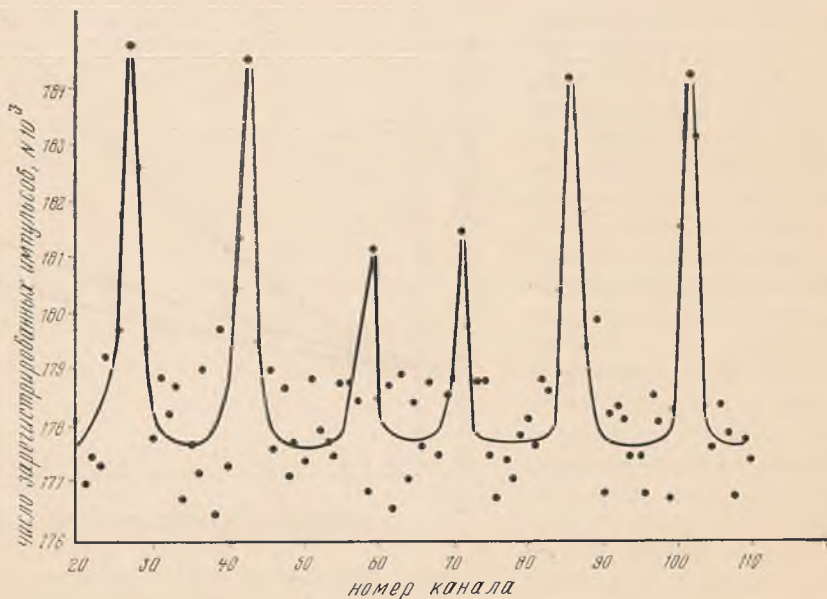


Рис. 3. Мессбауэровский спектр фолги из α -железа, измеренный по регистрации конверсионных электронов. Источник $^{57}\text{Co}(\text{Pd})$

источника ^{57}Co с конструктивными элементами входной камеры ф. э. у. [6], причем при использовании сцинтилляторов толщиной меньше 0,1 мм, радиационные шумы вносят определяющий вклад в фон.

По описанной методике измерен мессбауэровский спектр конверсионных электронов фольги из α -железа толщиной ~ 10 мкм с использованием пластмассового детектора толщиной 50 мкм (рис. 3). Активность источника ^{57}Co — 20 мкюри, время накопления спектра — 12 ч.

Немаловажным достоинством предложенного метода является простота его реализации, кроме того, возможность измерений при низких температурах и высокая эффективность регистрации электронов выгодно отличают предложенный метод от традиционных методик, связанных с применением He-метанового пропорционального счетчика и магнитных или электростатических систем. Отметим также, что описанный метод может иметь преимущество с точки зрения отношения эффект-фон по сравнению с методикой прохождения при исследовании образцов, толщины которых составляют $\approx 10^3$ Å.

В то же время толщина исследуемого образца не должна превышать характерной величины пробега мессбауэровских гамма-квантов (\sim несколько десятков микрон), что накладывает известные ограничения на возможные применения метода.

ЛИТЕРАТУРА

1. Андреева М. А., Кузьмин Р. Н. Мессбауэровская гамма-оптика.— М.: 1982, с. 217.
2. Keune W., Genser U., Wollmar H.— In: Handbuch der zerstörungsfreien Materialprüfung, vol. 10 ed E. H. W. Müller. Oldenbourg-Verlag-München-Wien, 1974.
3. Picone P. J., Morrish A. H.— J. Appl. Phys., 1982, vol. 53(3), p. 2471.
4. Wagner F. E.— J. Phys., 1976, vol. 56A, p. 117.
5. Torigama T., Sanegoshi K., Hisatuke K.— J. Phys., 1979, vol. 40, № 3, collog. № 2, p. 14.
6. Аншаков О. М., Налибоцкий Б. В., Перцев А. Н., Холмечкий А. Л., Чудаков В. А.— ПТЭ, 1983, № 5, с. 44.

Поступила в редакцию
16.05.83.

Кафедра ядерной физики и мирного
использования атомной энергии

УДК 539.43

В. Г. БАРЫШЕВСКИЙ, С. В. ЧЕРЕПИЦА

ВЛИЯНИЕ ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ ЗЕМЛИ НА ПРЕЦЕССИЮ СПИНА НЕЙТРОНОВ

Прецессия спина нейтронов в постоянном однородном магнитном поле в условиях динамической дифракции нейтронов в немагнитном неполяризованном кристалле претерпевает существенные изменения [1, 2]. В этом случае имеет место явление многочастотной прецессии спина нейтронов в постоянном однородном магнитном поле.

В данной работе на основании теории [1, 2] исследовано влияние гравитационного поля Земли на прецессию спина нейтронов. Обнаружено, что гравитационное поле Земли заметно влияет на прецессию спина нейтронов, движущихся в кристалле, помещенном в постоянное магнитное поле в условиях динамической дифракции.

Так, например, добавочное изменение угла поворота спина нейтронов, пролетевших через монокристалл кремния толщиной 1 см, обусловленное гравитационным полем, составляет величину 0,5 рад при напряженности магнитного поля в области кристалла 10^4 Гс. В то же время в отсутствие дифракции добавочный угол поворота спина, обусловленный гравитационным полем, очень мал ($\Delta\nu = 10^{-4}$ рад).

В самом деле, пусть пучок нейтронов влетает в область, занятую постоянным однородным магнитным полем напряженностью \vec{H} . По мере прохождения в глубь указанной области спин нейтрона будет поворачи-

ваться на угол $\nu_0 = \Omega_0 l / v = 2\mu H l / \hbar v$, где $\Omega_0 = 2\mu H / \hbar$ — частота ларморовой прецессии спина нейтрона в магнитном поле напряженностью \vec{H} ; v — скорость нейтрона; μ — магнитный момент нейтрона; l — путь, пройденный частицей в магнитном поле; \hbar — постоянная Планка.

Учтем теперь, что на нейтрон, кроме внешнего магнитного поля, действует еще и гравитационное поле Земли. На первый взгляд, так как гравитационное поле Земли никак не взаимодействует со спином нейтрона характер вращения спина не изменится и угол поворота спина будет определяться тем же соотношением. Однако это было бы верно только для покоящегося нейтрона. Нейтронный пучок, влетая в область, занятую постоянным магнитным полем, будет испытывать эффект преломления не только в магнитном, но и в гравитационном поле. Гравитационное поле изменяет скорость и, следовательно, длину волны нейтрона, что, в свою очередь, сказывается на показателе преломления нейтронов в магнитном поле, и, таким образом, на угле поворота спина нейтрона.

Итак, пусть пучок нейтронов влетает в немагнитный кристалл, помещенный в постоянное однородное магнитное поле H . Запишем уравнение Шредингера для свободно движущегося нейтрона в магнитном поле с учетом взаимодействия с гравитационным полем Земли:

$$\left(\frac{\hat{p}}{2m} - \hat{\mu} \cdot \vec{H} + mg \cdot \vec{r} \right) \psi(\vec{r}) = E_0 \psi(\vec{r}), \quad (1)$$

где \vec{g} — градиент гравитационного поля Земли.

Решение уравнения (1) в квазиклассическом приближении имеет следующий вид:

$$\psi(\vec{r}) = \begin{pmatrix} c_+ \varphi_+(\vec{r}) \\ c_- \varphi_-(\vec{r}) \end{pmatrix}, \quad (2)$$

$$\varphi_\sigma(\vec{r}) = e^{i\vec{k}_{0\perp} \cdot \vec{r}_\perp} \cdot e^{ik_{0z} z} \int_0^z n_\sigma(z) dz, \quad n_\sigma(z) = \sqrt{1 + (\sigma) \frac{\mu H}{E_0} - \frac{mgz}{E_0}}, \quad (3)$$

$\begin{pmatrix} c_+ \\ c_- \end{pmatrix}$ — спинорная волновая функция падающих нейтронов; \vec{k}_0 — волно-

вой вектор падающих нейтронов; $E_0 = \frac{\hbar^2 k_0^2}{2m}$; $\sigma = + (-)$ (знак $+$ ($-$) соответствует поляризованному состоянию нейтронов со спином вдоль (против) направления магнитного поля), ось Z системы координат направлена перпендикулярно к границе раздела вакуум — магнитное поле, ось квантования направлена вдоль направления магнитного поля; границу раздела вакуум — магнитное поле выбираем ортогональной вектору ускорения свободного падения.

При прохождении расстояния l в глубь магнитного поля, угол, на который спин нейтрона повернется, будет определяться следующим выражением (полагаем, что падающий пучок нейтронов поляризован перпендикулярно к направлению магнитного поля):

$$\nu = k_{0z} \int_0^l (n_+(z) - n_-(z)) dz \approx k_{0z} \left(-\frac{2\mu H}{E_0} l + \frac{\mu H l^2 mg}{E_0^2} \right). \quad (4)$$

Из (4) следует, что наличие гравитационного поля приводит к изменению угла поворота спина нейтрона на величину

$$\Delta\nu = k_{0z} \frac{\mu H mg l^2}{E_0^2}. \quad (5)$$

Существует разница $\Delta\nu$ между углом поворота спина нейтрона в случае, когда нейтрон проходит область магнитного поля снизу вверх и когда нейтрон проходит область магнитного поля сверху вниз. Как следует из

(5), при $k_0 = 3,14 \cdot 10^8 \text{ см}^{-1}$, $l = 1 \text{ см}$, $g = 9,8 \cdot 10^2 \text{ см/с}^2$ и $H = 10^4 \text{ Гс}$ величина разницы $\Delta v = 10^{-4} \text{ рад}$.

Поместим в область, занятую постоянным однородным магнитным полем, немагнитный неполяризованный кристалл. Согласно [1, 2], если кристалл сориентирован по отношению к падающему нейтронному пучку так, что нейтроны испытывают в кристалле дифракцию, в этом случае имеет место явление многочастотной прецессии спина нейтрона в магнитном поле, т. е. спин нейтрона прецессирует вокруг направления магнитного поля на четырех различных частотах.

Запишем уравнение Шредингера для нейтрона, движущегося в кристалле в присутствии внешнего магнитного и гравитационного полей:

$$\left(\frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\vec{r}) - \vec{\mu} \cdot \vec{H} + m\vec{g} \cdot \vec{r} \right) \psi(\vec{r}) = E_0 \psi(\vec{r}), \quad (6)$$

где $V(\vec{r})$ — периодический потенциал взаимодействия нейтрона с ядрами кристалла.

В отсутствие гравитационного потенциала метод решения уравнения (6) состоит в разложении ядерного потенциала $V(\vec{r})$ в ряд Фурье по векторам обратной решетки $2\pi\vec{\tau}$ и разложении волновой функции нейтронов по блоховским функциям [2]:

$$V(\vec{r}) = \frac{\hbar^2 k_0^2}{2m} \sum_{(\tau)} g(\tau) e^{i2\pi\vec{\tau} \cdot \vec{r}} \quad (7), \quad \psi(\vec{r}) = \sum_{(\tau)} \varphi_{\vec{k}_\sigma + 2\pi\vec{\tau}} e^{i(2\pi\vec{\tau} + \vec{k}_\sigma) \cdot \vec{r}}, \quad (8)$$

где $g(\tau)$ — структурная амплитуда.

Если гравитационное поле не учитывать, то в условиях, когда применимо двухволновое приближение, уравнение (6) с учетом (7) и (8) сводится к системе двух линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{pmatrix} \frac{k_\sigma^2}{k_0^2} - 1 + g(0) + (\sigma) \frac{\mu H}{E_0} & g(-\tau) \\ g(\tau) & \frac{(\vec{k}_\sigma + 2\pi\vec{\tau})^2}{k_0^2} - 1 + g(0) + (\sigma) \frac{\mu H}{E_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_{\vec{k}_\sigma} \\ \varphi_{\vec{k}_\sigma + 2\pi\vec{\tau}} \end{pmatrix} = 0. \quad (9)$$

В отсутствие гравитационного потенциала волновые амплитуды $\varphi_{\vec{k}_\sigma}$, $\varphi_{\vec{k}_\sigma + 2\pi\vec{\tau}}$ и волновой вектор \vec{k}_σ являются константами и не зависят от координат. Добавление гравитационного потенциала в гамильтониане уравнения (6) должно привести к тому, что волновой вектор \vec{k}_σ и волновые амплитуды $\varphi_{\vec{k}_\sigma}$ и $\varphi_{\vec{k}_\sigma + 2\pi\vec{\tau}}$ должны стать функциями координат.

Вследствие медленного изменения гравитационного потенциала в локальной области кристалла (много большей по сравнению с размерами элементарной ячейки) предполагаем, что градиенты волнового вектора и амплитуды нейтронной волны малы. Это обстоятельство позволяет применить квазиклассическое приближение [3]. Учет гравитационного потенциала сведется к замене в уравнении (9) величины $g(0)$ на $g(0) + \frac{mgz}{E_0}$ [3]. Тогда в рамках квазиклассического приближения волновая функция нейтронов, прошедших через кристалл толщиной L , будет иметь следующий вид:

$$\psi(\vec{r}) = \begin{pmatrix} c_+ \psi_+(\vec{r}) \\ c_- \psi_-(\vec{r}) \end{pmatrix},$$

$$\psi_\pm(\vec{r}) = \frac{(2\varepsilon_2^\sigma + \Gamma_\sigma) e^{i \frac{k_0}{\gamma_0} \int_0^L \varepsilon_1^\sigma dz} - (2\varepsilon_1^\sigma + \Gamma_\sigma) e^{i \frac{k_0}{\gamma_0} \int_0^L \varepsilon_2^\sigma dz}}{2(\varepsilon_2^\sigma - \varepsilon_1^\sigma)} e^{i k_0 \vec{r}}$$

$$-\frac{\beta g(\tau)}{2(\varepsilon_2^{\pm} - \varepsilon_1^{\pm})} \left(e^{i \frac{k_0}{\gamma_0} \int_0^L \varepsilon_1^{\pm} dz} - e^{i \frac{k_0}{\gamma_0} \int_0^L \varepsilon_2^{\pm} dz} \right) e^{i(\vec{k}_0 + 2\vec{\pi}\tau) \cdot \vec{r}}, \quad (10)$$

$$\varepsilon_{1(2)}^{\pm} = \frac{1}{4} \left\{ -(1 + \beta) \Gamma_{\sigma} - \beta \alpha_{(-)}^{\pm} \sqrt{(\beta \alpha - \Gamma_{\sigma} (1 - \beta))^2 + 4\beta g(\tau) g(-\tau)} \right\}, \quad (11)$$

$$\Gamma_{\sigma} = g(0) + (\sigma) \frac{\mu H}{E_0} + \frac{mgz}{E_0}, \quad \alpha = \frac{2\pi\tau \cdot (\vec{k}_0 + 2\pi\tau)}{k_0^2},$$

$$\gamma_0 = \frac{\vec{k}_0 \cdot \vec{n}}{k_0}, \quad \gamma_1 = \frac{(\vec{k}_0 + 2\pi\tau) \cdot \vec{n}}{k_0}, \quad \beta = \gamma_0/\gamma_1, \quad (12)$$

где \vec{n} — нормаль к поверхности кристалла, поверхность которого параллельна границе раздела вакуум-магнитное поле.

Найдем вектор поляризации продифрагированной нейтронной волны. Для определенности будем считать, что вектор поляризации падающих на кристалл нейтронов \vec{P}_0 направлен перпендикулярно к оси квантования. Направим ось X вдоль направления вектора \vec{P}_0 , тогда $c_+ = c_- = 1/\sqrt{2}$ и перпендикулярная компонента вектора поляризации продифрагированной нейтронной волны P_x имеет следующий вид:

$$P_x = \frac{\beta^2}{4} \cdot \frac{g(\tau)}{|\varepsilon_2^+ - \varepsilon_1^+| |\varepsilon_2^- - \varepsilon_1^-|^2} \left\{ \cos \left[GL + \operatorname{Re} \int_0^L (A_+ - A_-) dz + \right. \right. \\ \left. \left. + \delta \right] \exp \left(-k_0 \operatorname{Im} \int_0^L (\varepsilon_1^+ + \varepsilon_1^-) dz / \gamma_0 \right) - \cos \left[GL + \operatorname{Re} \int_0^L (A_+ + A_-) dz + \right. \right. \\ \left. \left. + \delta \right] \exp \left(-k_0 \operatorname{Im} \int_0^L (\varepsilon_1^+ + \varepsilon_2^-) dz / \gamma_0 \right) - \cos \left[GL - \operatorname{Re} \int_0^L (A_+ + A_-) dz + \right. \right. \\ \left. \left. + \delta \right] \exp \left(-k_0 \operatorname{Im} \int_0^L (\varepsilon_2^+ + \varepsilon_1^-) dz / \gamma_0 \right) + \cos \left[GL - \operatorname{Re} \int_0^L (A_+ - A_-) dz + \right. \right. \\ \left. \left. + \delta \right] \exp \left(-k_0 \operatorname{Im} \int_0^L (\varepsilon_1^+ + \varepsilon_2^-) dz / \gamma_0 \right) \right\}, \quad (13)$$

$$A_{\pm} = \frac{1}{4} \sqrt{(\beta \alpha - \Gamma_{\sigma} (1 - \beta))^2 + 4\beta g(\tau) g(-\tau)}, \quad (14)$$

$$G = \frac{1 + \beta}{2} \cdot \frac{\mu H}{E_0}, \quad (15)$$

где $\delta = \delta_+ - \delta_-$ и использовано обозначение

$$\frac{g(\tau)}{2(\varepsilon_2^{\pm} - \varepsilon_1^{\pm})} = \frac{g(\tau)}{|2(\varepsilon_2^{\pm} - \varepsilon_1^{\pm})|} e^{i\theta_{\pm}}.$$

Компонента P_y получается из P_x заменой \cos на $-\sin$.

В симметричном случае Лауэ, когда $\beta = 1$, величины A_+ и A_- равны, и вектор поляризации вращается вокруг направления магнитного поля с ларморовой частотой (15), определяемой напряженностью магнитного поля \vec{H} .

Если имеем дело с несимметричной дифракцией Лауэ ($\beta \neq 1$), ситуация резко меняется [2]: A_+ и A_- и вектор поляризации нейтронов испытывают биезия на четырех различных частотах (13), т. е. имеет место явление многочастотной прецессии спина нейтрона.

Как следует из (11) и (12), величины $\varepsilon_{1(2)}^{\pm}$ здесь зависят от величины гравитационного поля и, следовательно, частоты прецессии спина нейтрона (13) будут зависеть от гравитационного поля.

Рассмотрим случай, когда кристалл установлен вдали от точного выполнения условий дифракции, т. е. $|\alpha/g(\tau)| \gg 1$. Здесь имеется только проходящая нейтронная волна, волновая функция которой имеет следующий вид:

$$\psi_s = c_s \left\{ \Theta(\alpha) \exp\left(ik_0 \int_0^L \varepsilon_1^s dz/\gamma_0\right) + \Theta(-\alpha) \exp\left(ik_0 \int_0^L \varepsilon_2^s dz/\gamma_0\right) \right\} e^{i\vec{k}_0 \cdot \vec{r}}, \quad (16)$$

$$\text{где } \Theta(\alpha) = \begin{cases} 1 & \alpha > 0, \\ 0 & \alpha < 0. \end{cases}$$

Запишем выражение для вектора поляризации P_x и P_y проходящей волны

$$P_x = \Theta(\alpha) \cos\left(k_0 \operatorname{Re} \int_0^L (\varepsilon_2^- - \varepsilon_1^+) dz/\gamma_0\right) \exp\left(-k_0 \operatorname{Im} \int_0^L (\varepsilon_1^- + \varepsilon_1^+) dz/\gamma_0\right) + \\ + \Theta(-\alpha) \cos\left(k_0 \operatorname{Re} \int_0^L (\varepsilon_2^- - \varepsilon_2^+) dz/\gamma_0\right) \exp\left(-k_0 \operatorname{Im} \int_0^L (\varepsilon_2^- + \varepsilon_2^+) dz/\gamma_0\right). \quad (17)$$

Компонента P_y получается из P_x заменой \cos на $-\sin$.

Оценим вклад добавки $\Delta v_{\text{срав.}}$, обусловленной взаимодействием с гравитационным полем Земли, в полный угол поворота спина нейтрона. Пренебрегая членами, меньшими чем $|g(\tau)/\alpha|^2$, получаем следующее выражение для величины разности $\varepsilon_{1(2)}^+ - \varepsilon_{1(2)}^-$, зависящей от гравитационного потенциала:

$$\varepsilon_{1(2)}^+ - \varepsilon_{1(2)}^- |_{\text{грав.}} = \frac{+}{(-)} \frac{(1-\beta)^2}{4} \cdot \frac{\mu H}{E_0} \cdot \frac{mgz}{E_0} \{ [(\beta\alpha + (1-\beta)(g(0) + \\ + \mu H/E_0))^2 + 4\beta g(\tau)g(-\tau)]^{-1/2} + [(\beta\alpha + (1-\beta)(g(0) - \\ - \mu H/E_0))^2 + 4\beta g(\tau)g(-\tau)]^{-1/2} \}. \quad (18)$$

Тогда, как следует из (17) и (18), гравитационная добавка в полный угол поворота спина нейтронов, дифрагирующих на семействе кристаллографических плоскостей (220) монокристалла кремния толщиной $L = 1$ см, равна 0,5 рад при следующих значениях входящих в (19) параметров: $k_0 = 3,14 \cdot 10^8 \text{ см}^{-1}$, $H = 10^4 \text{ Гс}$, $\alpha = 10g(0)$, $\beta = 0,5$.

Таким образом, в условиях динамической дифракции в немагнитном кристалле влияние гравитационного поля Земли на прецессию спина нейтрона усиливается на несколько порядков, и появляется возможность его обнаружить.

ЛИТЕРАТУРА

1. Барышевский В. Г.—Письма в ЖЭТФ, 1981, т. 33, № 1, с. 78.
2. Baryshevskii V. G., Cherepitzia S. V.—Phys. Lett., 1982, vol. A90, № 5, p. 267.
3. Wegner S. A.—Phys. Rev., 1980, vol. 21B, № 5, p. 1774.

Поступила в редакцию
04.07.83.

Кафедра ядерной физики и мирного
использования атомной энергии

УДК 621.372.412

М. ПАТЕК, А. П. ХАПАЛЮК

МЕТОД РАСЧЕТА ПАРАМЕТРОВ ОСНОВНОЙ МОДЫ РЕЗОНАТОРА С ЛИНЗОЙ

В настоящее время часто приходится рассчитывать в параксиальном приближении открытые оптические резонаторы, усложненные внутренними элементами типа оптических линз, гауссовых диафрагм и т. д. При этом широко используются матричные методы [1], отличающиеся уни-

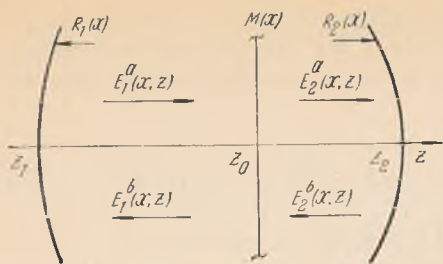


Рис. 1. Схема исходного резонатора. Стрелки и индексы a и b определяют направления распространения собственных гауссовых мод

В данной работе этот вопрос рассматривается по-новому, исходя из строгих (в паракиальном приближении) формул. С целью максимального упрощения изложения рассматривается резонатор, усложненный одной линзой. Ему сопоставляются два простых ЭР, которые затем позволяют стандартным образом определить все параметры собственных мод исходного резонатора. Параметры ЭР можно определить как аналитически, так и графически в соответствии с простыми законами геометрической оптики Гаусса.

Рассмотрим резонатор типа Фабри — Перо (рис. 1) с коэффициентами отражения зеркал $R_j(x)$ ($j=1,2$) и функцией передачи линзы $M(x)$:

$$R_j(x) = R_{0j} \exp\left(\frac{ikNx^2}{\rho_j}\right), \quad M(x) = \exp\left(\frac{ikNx^2}{2f}\right), \quad (1)$$

где R_{0j} — постоянные числа, ρ_j — радиусы кривизны зеркал, f — фокусное расстояние линзы и N — показатель преломления среды ($N=n+ix$). Ограничиваясь основной (гауссовой) модой, будем искать ее в виде суммы гауссовых пучков:

$$E(x, z) = \frac{A_0 e^{\pm ikNz}}{\sqrt{kn\omega^2 \pm i(z-l)}} \exp\left[-\frac{kN}{2} \frac{x^2}{kn\omega^2 \pm i(z-l)}\right], \quad (2)$$

где A_0 — постоянная амплитуда, ω — радиус пучка в локусе (перетяжке), l — положение локуса на оси; z — неизвестные параметры, которые находим из граничных условий на зеркалах и линзе:

$$\begin{aligned} E_1^a(x, z_1) &= R_1(x) E_1^b(x, z_1), \quad E_2^a(x, z_2) R_2(x) = E_2^b(x, z_2), \\ E_2^a(x, z_0) &= M(x) E_1^a(x, z_0), \quad E_2^b(x, z_0) M(x) = E_1^b(x, z_0). \end{aligned} \quad (3)$$

Смысл индексов ясен из рис. 1.

Подставляя (1), (2) в (3) и приравнявая в экспонентах коэффициенты при x^2 , получаем систему относительно комплексных параметров $u_{ja} = l_{ja} - ikn\omega_{ja}^2$, $u_{jb} = -l_{jb} - ikn\omega_{jb}^2$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{u_{1a} - z_1} - \frac{1}{u_{1b} + z_1} &= \frac{2}{\rho_1}, \quad \frac{1}{u_{2a} - z_2} - \frac{1}{u_{2b} + z_2} = -\frac{2}{\rho_2}, \\ \frac{1}{u_{1a} - z_0} - \frac{1}{u_{2a} - z_0} &= \frac{1}{u_{2b} + z_0} - \frac{1}{u_{1b} + z_0} = -\frac{1}{f}. \end{aligned} \quad (4)$$

Система (4) равносильна в матричном представлении обходу волной резонатора. Она содержит две пары неизвестных параметров пучков, распространяющихся соответственно между первым зеркалом и линзой и линзой и вторым зеркалом. В соответствии с такими представлениями удобно выбрать метод решения задачи. Из (4) можно исключить параметры пучков, распространяющихся между линзой и вторым зеркалом ($j=2$), а уравнения для параметров пучков, распространяющихся между первым зеркалом и линзой ($j=1$), записать в виде

$$\frac{1}{u_{1a} - z_1} - \frac{1}{u_{1b} + z_1} = \frac{2}{\rho_1}, \quad \frac{1}{u_{1a} - z_{2eq}} - \frac{1}{u_{1b} + z_{2eq}} = -\frac{2}{\rho_{2eq}}, \quad (5)$$

версальностью и простотой. К недостаткам этих методов следует отнести малую наглядность. В работе [2], исходя из простых физических соображений и известных формул геометрической оптики Гаусса, введено понятие эквивалентного резонатора (ЭР). Хотя в принципе любому сложному резонатору можно сопоставить простой ЭР, обладающий такой же матрицей обхода [3, 4], однако предложенный в [2] метод не дает возможности определить все параметры поля собственных мод [5, 6].

где z_{2eq} и ρ_{2eq} определяются из уравнений

$$\frac{1}{z_2 - z_0} - \frac{1}{z_{2eq} - z_0} = \frac{1}{f}, \quad \frac{1}{z_2 - z_0 - \rho_2} - \frac{1}{z_{2eq} - z_0 - \rho_{2eq}} = \frac{1}{f}. \quad (6)$$

Аналогично исключим из (4) параметры с индексами $j=1$ и найдем уравнения для определения параметров с индексами $j=2$:

$$\frac{1}{u_{2a} - z_{1eq}} - \frac{1}{u_{2b} + z_{1eq}} = \frac{2}{\rho_{1eq}}, \quad \frac{1}{u_{2a} - z_2} - \frac{1}{u_{2b} + z_2} = -\frac{2}{\rho_2}, \quad (7)$$

где z_{1eq} и ρ_{1eq} находятся из уравнений

$$\frac{1}{z_{1eq} - z_0} - \frac{1}{z_1 - z_0} = \frac{1}{f}, \quad \frac{1}{z_{1eq} - z_0 + \rho_{1eq}} - \frac{1}{z_1 - z_0 + \rho_1} = \frac{1}{f}. \quad (8)$$

По отдельности обе системы (5) и (7) допускают простую физическую интерпретацию. Они имеют одинаковый вид и полностью совпадают с соответствующими уравнениями для некоторого простого (без линзы) ЭР. Эквивалентные резонаторы образованы одним зеркалом исходного резонатора, а параметры второго (эквивалентного) зеркала определяются соответственно уравнениями (6) и (8), которые можно интерпретировать как формулы геометрической оптики Гаусса, описывающие преломление лучей в линзе [7]. Это открывает дополнительные возможности использования простых и наглядных геометрических методов определения параметров ЭР.

Первые формулы в (6) и (8) определяют положение эквивалентных зеркал z_{jeq} . Вершина эквивалентного зеркала оказывается изображением в линзе вершины зеркала прообраза (рис. 2). Аналогично вторые формулы в (6) и (7) определяют положение центров кривизны эквивалентных зеркал: $c_{1eq} = z_{1eq} + \rho_{1eq}$ и $c_{2eq} = z_{2eq} - \rho_{2eq}$, если известны центры кривизны зеркал-прообразов: $c_1 = z_1 + \rho_1$, $c_2 = z_2 - \rho_2$. Точки c_{jeq} являются изображениями в линзе точек c_j (см. рис. 2).

Однако при использовании геометрического метода определения параметров эффективного резонатора следует строго придерживаться из-

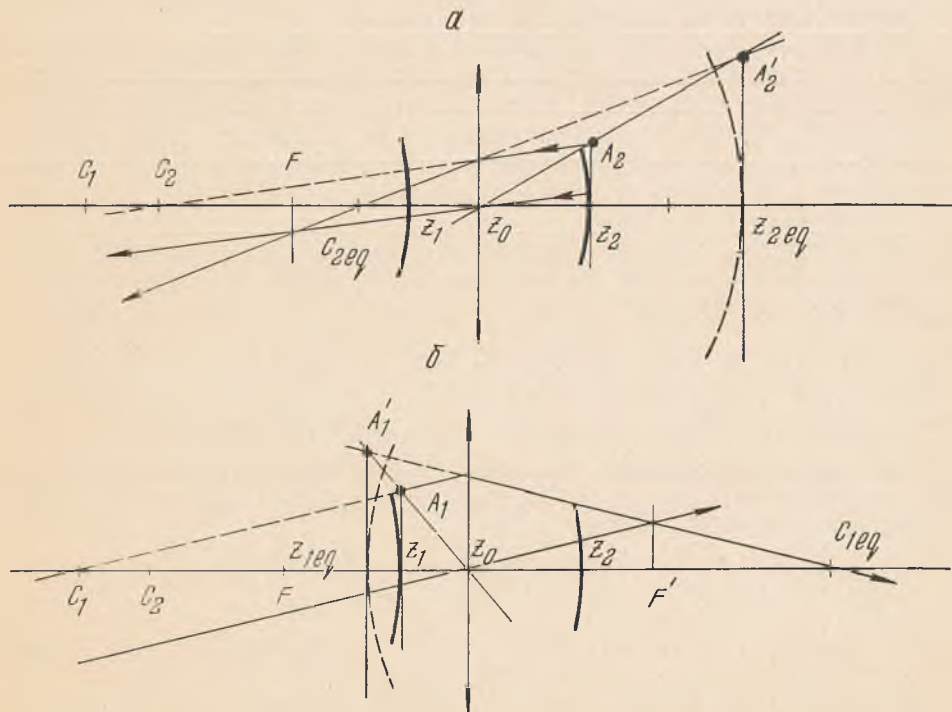


Рис. 2. Схема построения эквивалентного резонатора:

a — первый ЭР; b — второй ЭР. Сплошными линиями обозначены реальные зеркала, штриховыми — эквивалентные

вестных правил знаков [7]. Все расстояния отсчитываются от линзы, а положительное направление удобно выбирать по направлению к известной точке (прообразу), изображение (образ) которой нужно найти. Поэтому член в формулах (6) и (8) с расстоянием до прообраза всегда нужно брать положительным, если он окажется отрицательным, равенство необходимо умножить на -1 . Затем следует определить знак правой части, в которую входит фокусное расстояние линзы. Если правая часть после этого окажется положительной, образ точки предлагается искать по правилам построения изображения в собирающей линзе, в противном случае — в рассеивающей линзе. Это правило не зависит от того, будет реальная линза рассеивающей или собирающей.

В реальном резонаторе линза находится между зеркалами, поэтому слагаемые в первых равенствах системы (6) и (8) всегда положительны ($z_2 - z_0, z_0 - z_1 > 0$), и искомые точки z_{1eq} и z_{2eq} можно определить по правилам построения в той линзе, которая реально находится в резонаторе.

Более сложная ситуация складывается при нахождении центров кривизны эффективных зеркал c_{1eq} и c_{2eq} . Связано это с тем, что расстояние от линзы до центра кривизны реальных зеркал (c_1 и c_2) может иметь разный знак. Если $c_2 - z_0 > 0, c_1 - z_1 < 0$ (см. рис. 2, в), то изображения c_1 и c_2 находятся так же, как и изображения точек z_1 и z_2 . В противном случае, когда центр первого зеркала находится справа от линзы ($z_0 - c_1 < 0$) или центр второго зеркала — слева от линзы ($z_0 - c_2 > 0$) (см. рис. 2, а), для определения точек c_{1eq} и c_{2eq} при построении следует поменять знак фокусного расстояния линзы. Если реальная линза собирающая, соответствующие проекции следует строить для рассеивающей линзы и наоборот. На рис. 2 линза предполагается собирающей, и точка c_{1eq} является образом точки c_1 в собирающей линзе, а точка c_{2eq} — образом точки c_2 в рассеивающей линзе. Формально это осложнение связано с тем, что (6) и (8) не всегда совпадают с формулами Гаусса геометрической оптики линз; в формулах Гаусса и в формулах (6) или (8) знаки фокусных расстояний могут оказаться противоположными. Отсюда, в частности, следует, что эквивалентные зеркала строго не являются изображениями реальных зеркал в линзе.

Физический смысл этих построений довольно очевиден в геометрическом лучевом представлении: лучи (или их продолжения), нормальные к поверхности реального зеркала, после прохождения линзы меняют направления распространения, сходятся уже в центре эквивалентного зеркала и оказываются нормальными к его поверхности. До линзы они нормальны к поверхности реального зеркала, после линзы — к поверхности эквивалентного зеркала.

Длины ЭР d_{jeq} и радиусы кривизны их эквивалентных зеркал ρ_{jeq} находятся по формулам (их можно также определить из очевидных геометрических построений):

$$d_{1eq} = z_{2eq} - z_1 = z_2 - z_1 + \frac{(z_2 - z_0)^2}{f - z_2 + z_0}, \quad d_{2eq} = z_2 - z_{1eq} = z_2 - z_1 + \frac{(z_1 - z_0)^2}{f + z_1 - z_0},$$

$$\rho_{1eq} = \frac{f^2 \rho_1}{(f + z_1 - z_0)(f + \rho_1 + z_1 - z_0)}, \quad \rho_{2eq} = \frac{f^2 \rho_2}{(f - z_2 + z_0)(f + \rho_2 - z_2 + z_0)}. \quad (9)$$

Зная расстояния между зеркалами ЭР и их радиусы кривизны, параметры собственных пучков резонатора определяются уже стандартным образом по известным формулам [1]

$$\omega_{ja}^4 = \omega_{jb}^4 = \left(\frac{1}{kn}\right)^2 \frac{d_{jeq}(\rho_j - d_{jeq})(\rho_{meq} - d_{jeq})(\rho_j + \rho_{meq} - d_{jeq})}{(\rho_j + \rho_{meq} - 2d_{jeq})^2},$$

$$l_{ja} = l_{jb} = z_j - (-1)^j \frac{d_{jeq}(\rho_{meq} - d_{jeq})}{\rho_j + \rho_{meq} - 2d_{jeq}}, \quad j, m = 1, 2, j \neq m. \quad (10)$$

Параметры ЭР изменяются в широких пределах в зависимости от значения фокусного расстояния и положения линзы. С изменением параметров линзы радиусы кривизны зеркал ЭР и его длина могут менять знак. Изменение знака радиуса кривизны зеркал означает, что в ЭР

они становятся выпуклыми, если в исходном были вогнутыми или наоборот. Длина резонатора здесь определена как разность координат положений зеркал, и ее знак зависит от порядка нумерации зеркал; поэтому отрицательная длина резонатора означает, что первое зеркало расположено правее второго. Отметим, что формулы (10), определяющие параметры собственных пучков, остаются справедливыми во всех случаях, в том числе и при отрицательной длине ЭР.

Условие устойчивости обоих резонаторов требует, чтобы радиусы собственных пучков в локусах были положительными, т. е. должен быть положительным числитель в правой части первого равенства (10). Это условие оказывается одинаковым для обоих ЭР, поэтому условие устойчивости одного из двух ЭР одновременно означает устойчивость второго и, следовательно, устойчивость исходного резонатора с линзой. Спектр собственных частот и порог генерации также одинаковы для обоих ЭР. Имеются другие возможности введения ЭР. Например, в работе [2] вводится один ЭР, параметры которого подбираются таким образом, чтобы дать правильные размеры поперечного сечения генерирующих пучков на выходящих зеркалах резонатора.

Представленный метод эквивалентных резонаторов может быть использован наряду с известным матричным методом АВСД [1]. При сравнительной простоте и универсальности метод ЭР обладает заметно большей наглядностью и позволяет применять простые графические приемы в исследовании оптических резонаторов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kogelnik H., Li T.— Appl. Opt., 1966, vol. 5, № 10, p. 1550.
2. Kogelnik H.— Bell. Sys. Tech. J., 1965, vol. 44, № 3, p. 455.
3. Кушнер В. Р.— Квант. электроника, 1978, т. 5, № 6, с. 1248.
4. А н а н ь е в Ю. А. Оптические резонаторы и проблема расходимости лазерного излучения.— М., 1979.
5. Korz H. P., Iffländer R., Weber H.— Appl. Opt., 1981, vol. 20, № 23, p. 4124.
6. Muys P., Vankerzeele H.— Appl. Opt., 1982, vol. 21, № 22, p. 3983.
7. Б о р н М., В о л ь ф Э. Основы оптики.— М., 1970.



УДК 517.9

Б. С. КАЛИТИН

МИНИМАЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x, t), \quad (1)$$

где $x \in R^n$, n -мерному Евклидову пространству; $f: R^{n+1} \rightarrow R^n$ и $\forall t \in R$ $f(0, t) = 0$. Пусть f непрерывна в цилиндре $D_H = B_H \times R$, $B_H = \{x \in R^n: \|x\| < H\}$, $H > 0$, выполнены условия единственности решений $x(x_0, t_0, t)$, $x(x_0, t_0, t_0) = x_0$. Предположим, что $\forall \alpha \in]0, H[$ и $\forall t_0 \in R \exists h(\alpha, t_0) > 0$, для которого $\|x_0\| < h(\alpha, t_0) \Rightarrow \|x(x_0, t_0, t)\| < \alpha \forall t \geq t_0$, т. е. нулевое решение системы (1) устойчиво по Ляпунову [1]. Положим $h(t_0) = h(H, t_0)$ и введем

Определение 1. Нулевое решение системы (1) будем называть минимально устойчивым, если $\forall t_0 \in R \forall \delta \in]0, h(t_0)[\exists \varepsilon = \varepsilon(\delta, t_0) > 0$ такое, что $\delta < \|x_0\| < h(t_0) \Rightarrow \|x(x_0, t_0, t)\| > \varepsilon \forall t \geq t_0$.

Если числа h, ε можно выбрать не зависящими от $t_0 \in I$, где I — интервал R , то будем говорить, что нулевое решение системы (1) равномерно минимально устойчиво по $t_0 \in I$.

Заметим, что при условии отсутствия зависимости h от $t_0 \geq 0$ устойчивость нулевого решения называют равномерной [2]. Если не требовать обязательным устойчивостью, то определение 1 эквивалентно определению ε -ограниченности решений [3].

Определение 2. Будем говорить, что функция $V: D_H \rightarrow R$ допускает большой нижний предел при $x \rightarrow 0$, если $\forall t \in R V(0, t) = 0$ и $\forall t_0 \in R \forall \delta \in]0, h(t_0)[\exists \lambda = \lambda(\delta, t_0) > 0$ такое, что $\delta < \|x\| < h(t_0) \Rightarrow V(x, t) > \lambda \forall t \geq t_0$.

Определение 3. Определенно положительная [1] функция $V: D_H \rightarrow R$ допускает определенный бесконечно малый высший предел при $x \rightarrow 0$, если существует непрерывная определенно положительная функция $U: B_H \rightarrow R$ такая, что $\forall (x, t) \in D_H V(x, t) \leq U(x)$ и $U(0) = 0$.

Теорема 1. Пусть нулевое решение системы (1) устойчиво по Ляпунову. Тогда для того, чтобы решение $x=0$ было минимально устойчивым необходимо и достаточно, чтобы для каждого $t_0 \in R$ существовала функция $V: D_{h(t_0)} \rightarrow R$ со следующими свойствами:

- 1) V допускает большой нижний предел при $x \rightarrow 0$;
- 2) V допускает определенный бесконечно малый высший предел при $x \rightarrow 0$;
- 3) V неубывает вдоль всякой траектории с начальным условием $(x_0, t_0) \in D_{h(t_0)}$.

Доказательство. Достаточность. Пусть функция V удовлетворяет всем требованиям теоремы 1. Тогда на основании 1) $\forall t_0 \in R, \forall \delta, 0 < \delta < h(t_0)$, можно определить число $\lambda = \lambda(\delta, t_0) > 0$ такое, что при $\delta < \|x\| < h(t_0)$ будем иметь неравенство $V(x, t) > \lambda \forall t \geq t_0$. По числу λ

с учетом 2) и свойств функции U (см. определение 3) можно указать число ε , $0 < \varepsilon < \delta$, для которого $\lambda \geq \sup_{\|x_0\| < h(t_0)} U(x)$. Если $\delta < \|x_0\| < h(t_0)$, $t_0 \in R$, то $V[x_0, t_0] \leq V[x(x_0, t_0, t), t]$ в силу 3) при $t \geq t_0$. Отсюда следует, что $\|x(x_0, t_0, t)\| > \varepsilon$ при $t \geq t_0$, так как в противном случае нашелся бы момент времени $t^* > t_0$, что $\|x(x_0, t_0, t^*)\| = \varepsilon$. Однако в этом случае имелось бы соотношение $V[x(x_0, t_0, t^*), t^*] \leq U[x(x_0, t_0, t^*)] \leq \lambda$, противоречащее определению числа λ . Достаточность доказана.

Необходимость. Пусть тривиальное решение системы (1) минимально устойчиво. Покажем, что в этом случае существует функция $V: D_{h(t_0)} \rightarrow R^+$, удовлетворяющая 1)–3).

Рассмотрим решения $x(x_0, t_0, t)$ системы (1), для которых в соответствии с определением минимальной устойчивости выполняются неравенства $\delta < \|x_0\| < h(t_0)$ и $\|x(x_0, t_0, t)\| > \varepsilon \forall t \geq t_0$. Определим функцию V в произвольной точке $(x_0, t_0) \in D_{h(t_0)}$ по правилу: $V(x_0, t_0) = \inf_{t \geq t_0} \|x(x_0, t_0, t)\|$.

Очевидно эта функция определена однозначно. Кроме того, $V(x_0, t_0) \leq \|x(x_0, t_0, t_0)\| = U(x_0)$, поэтому с учетом произвольности выбора числа δ , $0 < \delta < h(t_0)$, функция U удовлетворяет всем требованиям определения 3. Следовательно, выполнено также и 2).

Проверка требования 3) проводится аналогично доказательству требования 4 теоремы 3.1. [4] (см. необходимость).

Покажем, что выполняется 1). Действительно, поскольку при $\|x_0\| > \delta$ имеем $\|x(x_0, t_0, t)\| > \varepsilon = \varepsilon(\delta, t_0)$ для всех $t \geq t_0$, то для $\|x_0\| > \delta$ получим $V(x_0, t_0) = \inf_{t \geq t_0} \|x(x_0, t_0, t)\| \geq \varepsilon$. Поэтому при $\lambda = 0,5\varepsilon(\delta, t_0)$ функция V удовлетворяет определению 2, что и требовалось доказать.

Теорема 2. Предположим, что тривиальное решение системы (1) устойчиво по Ляпунову. Пусть существуют скалярные функции $V: D_H \rightarrow R$, $\alpha: R \rightarrow R$, удовлетворяющие следующим требованиям: (i) V непрерывно дифференцируема, допускает определенный бесконечно малый высший предел при $x \rightarrow 0$ и $V(x, t) > 0$ для $x \neq 0$ ($x, t \in D_H$), (ii) α интегрируема при $t \geq t_0$ для всех $t_0 \geq R$ и выполняется неравенство $\dot{V}(x, t) \geq \alpha(t)V(x, t)$, ($x, t \in D_H$), (iii) существует конечное число $C = C(t_0)$ такое, что $\int_{t_0}^t \alpha(\tau) d\tau \geq C(t_0)$ при $t \geq t_0$. Тогда решение $x = 0$ системы (1) минимально устойчиво.

Доказательство. Из очевидного соотношения $\frac{dV}{V} = \frac{\dot{V}}{V} dt$ имеем

$$V[x(x_0, t_0, t), t] = V(x_0, t_0) \exp \int_{t_0}^t \frac{\dot{V}}{V} d\tau \quad \text{при } t \geq t_0 \text{ и } x_0 \neq 0.$$

учитывая (i), будем иметь $V[x(x_0, t_0, t), t] \geq V(x_0, t_0) \exp \int_{t_0}^t \alpha(\tau) d\tau$ для $t \geq t_0$ и $x_0 \neq 0$. Теперь, принимая во внимание (i), (iii) (см. определение 3), получим неравенство $U[x(x_0, t_0, t)] \geq V(x_0, t_0) \exp C(t_0)$ для $t \geq t_0$ и $x_0 \neq 0$. Но функция $U(x)$ определена положительно, а $V(x_0, t_0)$ определена положительно по x_0 при фиксированном t_0 , поэтому по заданному числу $\delta > 0$ всегда можно указать число $\varepsilon = \varepsilon(\delta, t_0) > 0$ такое, что если $\|x_0\| > \delta$, то $\|x(x_0, t_0, t)\| > \varepsilon$ при всех $t \geq t_0$, что и требовалось.

Если число C можно выбрать вне зависимости от параметра $t_0 \in I$, то теорема 2 гарантирует равномерную минимальную устойчивость по $t_0 \in I$, (где I — неограниченный интервал R).

Теорема 3. Для того чтобы решение $x = 0$ системы (1) было равномерно минимально устойчивым по $t_0 \in R$, необходимо и достаточно существования функции V со следующими свойствами:

(i) V задана в шаре B_H ,

(ii) V непрерывна в начале координат и $V(0) = 0$,

(iii) V положительно определенная функция,

(IV) для всякой траектории $(x(x_0, 0, t), t)$, $\|x_0\| < h(0)$, системы (1) $V[x(x_0, 0, t)] = V[x_0]$, $t \in R$.

Доказательство. Пусть тривиальное решение системы (1) равномерно минимально устойчиво по $t_0 \in R$. Тогда для любого числа $\alpha > 0$, $0 < \alpha < H$ существует число $h = h(\alpha) > 0$ и для всякого δ , $0 < \delta < h(t_0)$ найдется число $\varepsilon = \varepsilon(\delta) > 0$ такое, что

$$\delta < \|x_0\| < h(\alpha) \Rightarrow \varepsilon < \|x(x_0, t_0, t)\| < \alpha, \quad \forall t \geq t_0. \quad (2)$$

Рассмотрим функцию $V(x_0) = \sup_{t < 0} \|x(x_0, t, 0)\|$, $\|x_0\| < h(\alpha)$. Она однозначно определена и в силу (2) ограничена при $\|x_0\| < h(\alpha)$. Из правого неравенства (2) следует, что $V(x) \leq \alpha$ при $\|x\| < h(\alpha)$ и $V(0) = 0$, т. е. (ii) выполнено. Кроме того, с учетом (2) будем иметь $V(x_0) = \sup_{t < 0} \|x(x_0, t, 0)\| \geq \alpha > 0$ при $\|x_0\| > h(\alpha)$. Значит, V определено положительно.

Оставшийся пункт (IV) проверяется непосредственной подстановкой с помощью того, что $x[x(x_0, 0, t), t, 0] \equiv x_0 \quad \forall t \geq 0$. Достаточность теоремы 3 следует из теоремы 1.

Легко видеть, что для линейных систем справедлива

Теорема 4. Тривиальное решение линейной системы $\dot{x} = Ax$ с постоянной матрицей A минимально устойчиво тогда и только тогда, когда все характеристические числа матрицы A имеют нулевые вещественные части и допускают лишь простые элементарные делители.

Аналогично этому имеет место

Теорема 5. Тривиальное решение системы $\dot{x} = A(t)x$ с непрерывной периодической матрицей $A(t)$ минимально устойчиво тогда и только тогда, когда все ее мультипликаторы ρ_i [5] лежат на окружности $|\rho_i| = 1$ и имеют лишь простые элементарные делители, если их рассматривать как собственные значения соответствующей матрицы монодромии.

З а м е ч а н и е. Метод построения функций Ляпунова в виде связки интегралов, предложенный Н. Г. Четаевым [6], всегда гарантирует минимальную устойчивость исследуемого положения равновесия. Этот факт вытекает непосредственно из теоремы 3.

Рассмотрим пример устойчивой системы, описанный Н. Н. Красовским [2, с. 57]. Один из вариантов его аналитической записи имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sin^2 \frac{1}{x^2 + y^2}, \\ \dot{y} = x + y \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sin^2 \frac{1}{x^2 + y^2}, \text{ если } x^2 + y^2 \neq 0 \end{cases}$$

и $\dot{x} = 0$, $\dot{y} = 0$ при $x^2 + y^2 = 0$.

Функция $V(x, y) = 0,5(x^2 + y^2)$ обладает непрерывной производной по времени $\dot{V}(x, y) = (x^2 + y^2)^{3/2} \cdot \sin^2 \frac{1}{x^2 + y^2}$ при $x^2 + y^2 \neq 0$ ($\dot{V}(0, 0) = 0$). По теореме 1 такая система минимально устойчива, а в силу автономности системы и равномерно минимально устойчива по $t_0 \in R$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л я п у н о в А. М. Общая задача об устойчивости движения.— М.— Л. 1950.
2. К р а с о в с к и й Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения.— М., 1959.
3. К а л и т и н Б. С. r -ограниченность решений дифференциальных систем.— Рукопись деп. в ВИНТИ АН СССР, № 1571-78. Деп. от 11.05.78.
4. З у б о в В. И. Лекции по теории управления.— М., 1975.
5. Д е м и д о в и ч Б. П. Лекции по математической теории устойчивости.— М., 1967.
6. Ч е т а е в Н. Г. Устойчивость движения: Работы по аналитической механике.— М., 1962.

Поступила в редакцию
14.04.80.

Кафедра МОУ

АВТОМАТИЗИРОВАННАЯ СИСТЕМА ПЕРЕВОДА КЛЮЧЕВЫХ СЛОВ (СПЕРКС-1). II

На основании утверждений 1—3, приведенных в первой части работы [1], нами разработан алгоритм построения ядра L^* в банке равномоощных языков L по заданному множеству словарей \bar{L} . Предварительно введем некоторые определения.

Пусть неориентированный граф $G = (X, A)$ является лесом и $T_i = (X_i, A_i)$, $T_j = (X_j, A_j)$ — две его произвольные компоненты. Склеивкой деревьев T_i и T_j назовем дерево $T_{ij} = (X_{ij}, A_{ij})$, где $X_{ij} = X_i \cup X_j$, $A_{ij} = A_i \cup A_j \cup a_{i_k j_n}$, i_k, j_n — любые из номеров вершин, принадлежащих соответственно множествам X_i и X_j . Ребро $a_{i_k j_n}$ назовем **фиктивным** ребром графа $G = (X, A)$. Если $|X_i| = n_i$, $|X_j| = n_j$, то, очевидно, может быть получено $n_i \cdot n_j$ различных склеек деревьев T_i и T_j . Обозначим $G = (X, A) = G^{(0)}$. Будем считать, что процедура построения склейки T_{ij} осуществляется оператором склейки Δ . В результате выполнения оператора Δ для любых двух компонент графа $G^{(0)}$ образуется новый граф $G^{(1)} = \Delta(G^{(0)})$. Если граф $G^{(1)}$ является лесом, то на нем также можно выполнить оператор Δ и т. д. Процедуру последовательного выполнения оператора Δ на исходном графе $G^{(0)}$ назовем **склеиванием** леса и обозначим ее рекуррентной формулой $G^{(s)} = \Delta(G^{(s-1)})$, где $G^{(s-1)}$ — лес, $s = 1, 2, \dots, s^*$, $G^{(s^*)}$ — дерево. Дерево $G^{(s^*)}$ назовем **склеивкой** леса $G^{(0)}$.

Процедура построения ядра L^* осуществляется в соответствии со следующим общим алгоритмом.

Шаг 1. Начало.

Шаг 2. По данному множеству \bar{L} построить базовый граф $G = (X, A)$. Если $A = \emptyset$, то перейти к следующему шагу, иначе — к шагу 6.

Шаг 3. На вершинах графа $G = (X, A)$ построить полный неориентированный граф K_m .

Шаг 4. Построить множество T всех остовных деревьев графа K_m .

Шаг 5. Выбрать из множества T наиболее «подходящее» остовное дерево T^* . Все ребра дерева T^* пометить и перейти к шагу 11.

Шаг 6. Если $G = (X, A)$ — связный граф, то перейти к следующему шагу, иначе — к шагу 9.

Шаг 7. Построить множество T всех остовных деревьев графа $G = (X, A)$.

Шаг 8. Выбрать из множества T «наиболее подходящее» остовное дерево T^* и перейти к шагу 12.

Шаг 9. Для каждой компоненты T_i графа $G = (X, A)$ построить множество всех остовных деревьев и выбрать в каждом из полученных множеств наиболее «подходящее» остовное дерево T_i^* .

Шаг 10. Построить склейку T^* леса, компонентами которого являются деревья T_i^* . Все фиктивные ребра дерева T^* пометить.

Шаг 11. Составить список T' помеченных ребер дерева T^* .

Шаг 12. Конец.

В настоящей работе подробности реализации описанного алгоритма не приводятся, однако необходимо отметить следующее. Выбор наиболее «подходящего» остовного дерева и склейки предполагает возможность наличия на входе алгоритма списка «нежелательных» словарей, что равносильно заданию весов для ребер графа. Задача выбора в этом случае сводится к нахождению кратчайшего остова [2]. В тех ситуациях, когда такой список отсутствует, предпочтение, в силу характера решаемой задачи, отдается остовному дереву, содержащему вершину с наибольшей степенью, а среди деревьев с одинаковой наибольшей степенью их вершин выбирается дерево с наибольшей степенью оставшихся вершин и т. д. При склеивании леса каждый раз выбирается фиктивное ребро $a_{i_k j_n}$ та-

кое, что степени вершин x_{i_k} и x_{j_n} являются максимальными из всех степеней вершин соответствующих деревьев (предполагается, что ребро $a_{i_k j_n}$ не соответствует «нежелательному» словарю). Все это позволяет выделить несколько основных (базовых) языков, что значительно облегчает подготовку исходной информации для ИБ системы.

При реализации алгоритма некоторые шаги в ряде случаев были опущены или объединены.

Итак, в результате выполнения описанного алгоритма построено дерево T^* , ребрам которого соответствует множество словарей, определяющее ядро L^* . На следующем этапе в соответствии с T' формируется само ядро L^* . При этом просматривается список T' и, если он не пуст, то по каждому фиктивному ребру $a_{i_k j_n}$ из T' специалистом-переводчиком устанавливается соответствие типа (1) между элементами языков L_{i_k} и L_{j_n} , т. е. строится словарь (L_{i_k}, L_{j_n}) либо (L_{j_n}, L_{i_k}) . Далее процедура формирования ИБ системы СПЕРКС-1 осуществляется по следующей схеме.

1. Специальной программой, реализующей алгоритм, основанный на полном обходе дерева T^* и использовании процедуры P , формируются так называемые **смысловые гнезда** информационной базы, каждое отдельное смысловое гнездо содержит условно-эквивалентные по смыслу КС всех языков из банка языков L (говоря «условно-эквивалентные», имеем в виду, что процедура P использует свойства симметричности и транзитивности соответствия типа (1), которые могут, хоть и крайне редко, быть нарушены).

2. Все смысловые гнезда выводятся на печать, подвергаются анализу с целью внесения в необходимых случаях требующихся изменений в смысловые гнезда, устанавливающих абсолютную смысловую эквивалентность всех КС для каждого гнезда (изменения вносятся программно).

3. Всем КС каждого смыслового гнезда присваивается его номер, называемый **к о н ц е п т у а л ь н ы м номером (КН)**.

4. Программно формируется в виде совокупности базовых массивов информационная база системы СПЕРКС-1; отдельный базовый массив $B_i (i = \overline{1, m})$ из ИБ соответствует языку L_i и содержит все КС языка L_i (по одному из каждого смыслового гнезда) с соответствующими им КН.

Обработка массива входных документов в системе СПЕРКС-1 осуществляется по следующему алгоритму.

Шаг 1. Чтение массива входных документов, выбор из поля j^* каждого документа всех КС и запись их в отдельный массив КС с присвоением каждому КС номера документа, которому оно соответствует, и порядкового номера данного КС в поле j^* .

Шаг 2. Выбор базового массива B_i , соответствующего языку L_i , указанному в поле i^* .

Шаг 3. Поиск КС из массива КС в массиве B_i с целью получения для каждого КС соответствующего ему КН.

Шаг 4. Выбор по полученным на шаге 3 КН в базовом массиве B_j , соответствующем языку L_j , указанному пользователем, выходных эквивалентов и запись их в выходной массив КС.

Шаг 5. Упорядочение выходного массива КС по номеру документа и порядковому номеру КС в поле j^* .

Шаг 6. Формирование поля j^* каждого входного документа на языке L_j .

Отметим, что в системе предусмотрена обработка «неопознанных» на шаге 3 КС. Программное обеспечение системы СПЕРКС-1 построено по модульному принципу. Оно включает модули, реализующие описанный алгоритм, а также многие сервисные функции по всей работе с ИБ системы, о которых говорилось ранее. Система работает под управлением ОС/ЕС, программирование выполнено на алгоритмическом языке ПЛ/1.

В заключение укажем, что поскольку нами достигнуты определенные результаты по автоматическому анализу и синтезу ЕЯ (см., например,

[3]), в дальнейшем планируется разработка второго варианта системы СПЕРКС-1 для обработки таких входных документов, в поле j^* которых задана неформализованная естественно-языковая информация.

ЛИТЕРАТУРА

1. Король И. А., Совпель И. В.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1984, № 1, с. 30.

2. Кристофидес Н. Теория графов.— М., 1978.

3. Гончаренко В. В., Король И. А., Котельникова Н. М., Музалевская В. М., Совпель И. В.— Тез. докл. Всесоюз. конф.: Переработка текста методами инженерной лингвистики. Минск, 1982, с. 109.

Поступила в редакцию
24.05.82.

Кафедра МО АСУ

УДК 519.926

А. А. ЛЕВАКОВ

РЕГУЛИРУЕМОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

В работе [1] введено понятие управляемости системы динамическим регулятором и показано, что линейная стационарная система управляема стационарным линейным регулятором тогда и только тогда, когда система управляема, а регулятор наблюдаем [2]. Исследование управляемости различных линейных систем с помощью регулятора проведено в [1, 3]. В предлагаемой заметке эти результаты распространены на нелинейные системы.

Рассмотрим объект, описываемый уравнениями:

$\dot{x} = f(t, x, y, u)$, $x(t_0) = x_0$ (1), $u = g(t, x, y)$, (2), $\dot{y} = \omega(t, x, y)$, $y(t_0) = y_0$, (3) где $x \in R^n$, $y \in R^h$, $t \in R_+ = [t_0, +\infty[$, $u \in R^m$, $f: R_+ \times R^n \times R^h \times R^m \rightarrow R^n$, $g: R_+ \times R^n \times R^h \rightarrow R^m$, $\omega: R_+ \times R^n \times R^h \rightarrow R^h$ — j -кратно непрерывно дифференцируемые функции. Обозначим через

$$\begin{cases} x = x(t, t_0, x_0, y_0) \\ y = y(t, t_0, x_0, y_0) \end{cases}$$

решение системы (1) — (3) и через $\Gamma(\beta, t, x_0)$, $\Gamma(t, x_0)$ — множества

$$\Gamma(\beta, t, x_0) = \{x \in R^n \mid x = x(t, t_0, x_0, y'_0), \|y'_0 - y_0\| \leq \beta\},$$

$$\Gamma(t, x_0) = \{x \in R^n \mid x = x(t, t_0, x_0, y_0), y_0 \in R^h\}.$$

Определения: 1. Систему (1) — (3) назовем локально регулируемой вдоль $x(t, t_0, x_0, y_0)$, если для всех $\beta > 0$ и для всех t из некоторого промежутка $[t_0, t_1]$ точка $x(t, t_0, x_0, y_0)$ является внутренней для $\Gamma(\beta, t, x_0)$.

2. Систему (1) — (3) будем называть регулируемой, если $\Gamma(t, x_0) = R^n$ при всех t из некоторого промежутка $[t_0, t_1]$ и при всех $x_0 \in R^n$.

Введем оператор U , действующий на функции $(t_0, x_0, y_0) \rightarrow \xi(t_0, x_0, y_0) \in R^n$ по правилу $U(\xi) = \frac{\partial \xi}{\partial t_0} + \frac{\partial \xi}{\partial y_0} \omega(t_0, x_0, y_0) + \frac{\partial \xi}{\partial x_0} f(t_0, x_0, y_0, g(t_0, x_0, y_0))$. Степени оператора U определим равенствами $U^0(\xi) = \xi$, $U^n(\xi) = U(U^{n-1}(\xi))$, $n \geq 1$. Обозначим через R_j , W_j следующие матрицы:

$$R_j = \left(\frac{\partial U^1(x_0)}{\partial y_0}, \dots, \frac{\partial U^j(x_0)}{\partial y_0} \right), \quad W_j = \left(\left(\frac{\partial U^1(x_0)}{\partial y_0} \right)^T, \dots, \left(\frac{\partial U^j(x_0)}{\partial y_0} \right)^T \right)$$

(τ — знак транспонирования).

Отметим, что матрицы R_j , W_j строятся непосредственно по параметрам системы (1) — (3).

Теорема 1. Если существует натуральное число j такое, что

$$\text{rank } R_j = n, \text{ rank } W_j \geq n, \quad (4)$$

то система (1) — (3) является локально регулируемой вдоль $x(t, t_0, x_0, y_0)$.

Доказательство легко вытекает из теоремы о неявной функции, так как ранг матрицы Якоби отображения $z(t, y'_0) = x(t, t_0, x_0, y'_0) - x(t, t_0, x_0, y_0)$ при $y'_0 = y_0$ и всех t из некоторого промежутка $[t_0, t_1]$ равен n .

Из теоремы 1 следует, что если условие (4) выполняется при всех $y_0 \in Q$, где Q — некоторое подмножество из R^k , то система (1) — (3) является локально регулируемой вдоль $x(t, t_0, x_0, y_0)$ при каждом $y_0 \in Q$. Для голоморфных систем верно почти обратное утверждение.

Теорема 2. Пусть функции ω и g голоморфны около каждой точки (t_0, x_0, y_0) , $y_0 \in Q$, а функция f голоморфна около каждой точки $(t, x_0, y_0, g(t_0, x_0, y_0))$, $y_0 \in Q$. Если система (1) — (3) локально регулируема вдоль $x(t, t_0, x_0, y_0)$ при каждом $y_0 \in Q$, то условие (4) имеет место для всех y_0 из некоторого открытого плотного подмножества множества Q .

Доказательство. Предположим, что система (1) — (3) не удовлетворяет условию (4) при всех y_0 из некоторого открытого подмножества N множества Q , хотя система локально регулируема вдоль $x(t, t_0, x_0, y_0)$ при каждом $y_0 \in Q$. Для любой точки $y_0 \in N$ существует окрестность $A \subset N$ этой точки и отрезок $[t_0, t^*]$, $t^* > t_0$ такие, что функции $t \rightarrow x(t, t_0, x_0, y'_0)$ при всех $y'_0 \in A$ представимы в виде обобщенных рядов Ли

$$x(t, t_0, x_0, y'_0) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(t-t_0)^s}{s!} U^s(x_0), \quad (5)$$

сходящихся равномерно на $[t_0, t^*]$. Из предложения 1.6 [4, с. 55] следует, что система (1) — (3) может быть локально регулируемой вдоль $x(t, t_0, x_0, y_0)$ лишь, когда $k \geq n$. Отсюда и из (5) вытекает, что каждая точка $y'_0 \in A$ является критической [4, с. 58] для отображения $y'_0 \rightarrow z(t, y'_0) = x(t, t_0, x_0, y'_0) - x(t, t_0, x_0, y_0)$ при каждом t из некоторого промежутка $[t_0, t^{**}]$, $t_0 < t^{**} \leq t^*$. Согласно теореме Сарда [4], множество $z(t, A)$ при каждом $t \in [t_0, t^{**}]$ имеет меру нуль в R^n [4], что противоречит локальной регулируемости системы (1) — (3) вдоль $x(t, t_0, x_0, y_0)$.

Рассмотрим теперь линейную систему

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u + K(t)y, \quad x(t_0) = x_0 \quad (6), \quad u = C(t)y + F(t)x, \quad (7)$$

$$\dot{y} = D(t)y + L(t)x, \quad y(t_0) = y_0, \quad (8)$$

где $x \in R^n$, $u \in R^m$, $y \in R^k$, A, B, C, K, F, D, L — матрицы соответствующих размерностей, голоморфные около точки t_0 . Матрицы R_j и W_j для системы (6) — (8) не зависят от y_0 и x_0 . Аналогично теоремам 1 и 2 можно доказать следующее утверждение.

Теорема 3. Система (6) — (8) является регулируемой тогда и только тогда, когда $\text{rank } R_j = n$, $\text{rank } W_j \geq n$ для некоторого натурального числа j .

Следствие. Для регулируемости линейной стационарной системы $\dot{x} = Ax + Bu$, $x(0) = x_0$, $u = Cy$, $\dot{y} = Dy$, $y(0) = y_0$, где A, B, C, D — постоянные матрицы соответствующих размерностей, необходимо и достаточно, чтобы $\text{rank } R_n = n$, $\text{rank } W_n \geq n$.

Пусть $P \subset Q$ множество точек y_0 , для которых не выполняется условие (4). Из теоремы 1 следует, что система (1) — (3) локально регулируема вдоль $x(t, t_0, x_0, y_0)$, если $y_0 \in Q \setminus P$. Если y_0 внутренняя точка для P и функции f, g, ω удовлетворяют условиям гладкости теоремы 2, то система (1) — (3) не является локально регулируемой. Если же y_0 принадлежит ∂P , где ∂P — граница множества P , то система может быть локально регулируемой вдоль $x(t, t_0, x_0, y_0)$, но может и не обладать этим свойством (примеры 2 и 3).

Примеры.

$$1. \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + u, & x_1(0) = 0 \\ \dot{x}_2 = \sin(tx_1), & x_2(0) = 1, \quad u = y_2, \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{y}_1 = x_2^3, & y_1(0) = 0, \\ \dot{y}_2 = y_1^2, & y_2(0) = 0. \end{cases} \quad (9)$$

$$\text{Для системы (9) } R_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad W_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Так как $\text{rank } R_3 = 2$, $\text{rank } W_3 = 2$, то система (9) является локально регулируемой вдоль $x(t; 0, 0, 1; 0, 0)$.

$$2. \begin{cases} \dot{x}_1 = u, x_1(0) = 0, \\ \dot{x}_2 = x_1^2, x_2(0) = 0, u = y_1, \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{y}_1 = y_2, y_1(0) = 0 \\ \dot{y}_2 = 0, y_2(0) = 0, Q = R^2 \end{cases} \quad (10)$$

Так как $\dot{x}_2 \geq 0$, то система (10) не является локально регулируемой вдоль $x(t; 0; 0; 0; 0)$.

$$3. \begin{cases} \dot{x}_1 = u, x_1(0) = 0, \\ \dot{x}_2 = x_1^3, x_2(0) = 0, u = y_1, \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{y}_1 = y_2, y_1(0) = 0 \\ \dot{y}_2 = 0, y_2(0) = 0, Q = R^2. \end{cases} \quad (11)$$

Осуществляя построение множества $\Gamma(\beta, t, 0, 0)$ для системы (11), убеждаемся, что эта система локально регулируема вдоль $x(t; 0; 0; 0; 0)$. Легко проверить, что для систем (10), (11) точка $y_0 = (0, 0)$ принадлежит ∂P .

ЛИТЕРАТУРА

1. Игнатенко В. В.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, 1976, № 2, с. 56.
2. Габасов Р., Кириллова Ф. М. Качественная теория оптимальных процессов.— М., 1971.
3. Игнатенко В. В.— Вестн. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук, 1976, № 3, с. 26.
4. Голубицкий М., Гийемин В. Устойчивые отображения и их особенности.— М., 1977.

Поступила в редакцию
22.10.82.

Кафедра высшей математики

УДК 517.925

В. А. ПРОКАШЕВА

ОДНОРОДНЫЕ СИСТЕМЫ ПЕРВОГО ПОРЯДКА БЕЗ ПОДВИЖНЫХ КРИТИЧЕСКИХ ТОЧЕК (случай $A_0 \neq 0$)

В работе рассматривается система:

$$\begin{cases} a_0 u'^2 + a_1 u'v' + a_2 v'^2 + a_3 u^2 + a_4 uv + a_5 v^2 = 0 \\ b_0 u'^2 + b_1 u'v' + b_2 v'^2 + b_3 u^2 + b_4 uv + b_5 v^2 = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где $a_k = a_k(z)$, $b_k = b_k(z)$, $k = \overline{0,5}$

Введением подстановки $u = w \cdot v$ рассмотрение системы (1) сведется к рассмотрению решений уравнения:

$$A_0(z, w) w'^5 + A_1(z, w) w'^4 + A_2(z, w) w'^2 + A_3(z, w) = 0, \quad (2)$$

где $A_0(z, w) = P \left(\frac{\partial P}{\partial w} b_0 - \frac{\partial P_1}{\partial w} a_0 \right)^2 - \frac{\partial P}{\partial w} \left(\frac{\partial P}{\partial w} b_0 - \frac{\partial P_1}{\partial w} a_0 \right) (P b_0 - P_1 a_0) +$
 $+ a_0 (P b_0 - P_1 a_0)^2,$

$A_1(z, w) = 2P \left(-\frac{\partial P}{\partial w} b_0 - \frac{\partial P_1}{\partial w} a_0 \right) \left(\frac{\partial P}{\partial w} Q_{11} - \frac{\partial P_1}{\partial w} Q_{01} \right) - \frac{\partial P}{\partial w} \left(\frac{\partial P}{\partial w} b_0 - \right.$
 $\left. + \frac{\partial P_1}{\partial w} a_0 \right) (P Q_{11} - P_1 Q_{01}) - \frac{\partial P}{\partial w} \left(\frac{\partial P}{\partial w} Q_{11} - \frac{\partial P_1}{\partial w} Q_{01} \right) (P b_0 - P_1 a_0) +$
 $+ Q_{01} (P b_0 - P_1 a_0)^2 + 2a_0 (P b_0 - P_1 a_0) (P Q_{11} - P_1 Q_{01}),$

$A_2(z, w) = P \left(\frac{\partial P}{\partial w} Q_{11} - \frac{\partial P_1}{\partial w} Q_{01} \right)^2 - \frac{\partial P}{\partial w} \left(\frac{\partial P}{\partial w} Q_{11} - \frac{\partial P_1}{\partial w} Q_{01} \right) (P Q_{11} -$
 $- P_1 Q_{01}) + a_0 (P Q_{11} - P_1 Q_{01})^2 + 2Q_{01} (P b_0 - P_1 a_0) (P Q_{11} - P_1 Q_{01}),$

$A_3(z, w) = Q_{01} (P Q_{11} - P_1 Q_{01})^2$, причем $P = P(z, w) = a_0 w^2 + a_1 w + a_2$,
 $P_1 = P_1(z_1 w) = b_0 w^2 + b_1 w + b_2$, $Q_{01} = Q_{01}(z, w) = a_3 w^2 + a_4 w + a_5$, $Q_{11} =$
 $= Q_{11}(z, w) = b_3 w^2 + b_4 w + b_5.$

Можно доказать, что уравнение (2) в случае $A_0 \neq 0$ представимо в виде:

$$\begin{aligned}
 & (a_0 \omega'^2 + Q_{01}) \left\{ \left[\left(P \frac{\partial P_1}{\partial \omega} - P_1 \frac{\partial P}{\partial \omega} \right) \left(a_0 \frac{\partial P_1}{\partial \omega} - b_0 \frac{\partial P}{\partial \omega} \right) + (P b_0 - P_1 a_0)^2 \right] \omega'^4 + \right. \\
 & + \left[\left(P \frac{\partial P_1}{\partial \omega} - P_1 \frac{\partial P}{\partial \omega} \right) \left(\frac{\partial P_1}{\partial \omega} Q_{01} - \frac{\partial P}{\partial \omega} Q_{11} \right) + 2 (P b_0 - P_1 a_0) (P Q_{11} - P Q_{01}) \right] \omega'^2 + \\
 & \left. + (P Q_{11} - P_1 Q_{01})^2 \right\} = 0, \quad (3)
 \end{aligned}$$

т. е. распадается на два уравнения

$$a_0 \omega'^2 + Q_{01} = 0, \quad (4), \quad B_0 \omega'^4 + B_2 \omega'^2 + B_4 = 0, \quad (5)$$

где B_0, B_2, B_4 определены в (3).

Изучим каждое из уравнений отдельно.

1. Рассмотрим уравнение (4): тогда, если:

а) $a_3 = 0, a_4 = a_5 = 0$, то

$$\omega'^2 = 0, \quad \text{т. е. } \omega = \text{const}; \quad (6^I)$$

б) $a_3 = 0, a_4 = 0, a_5 \neq 0$, то

$$\omega'^2 = -\frac{a_5}{a_0}, \quad \text{т. е. } \omega = \varepsilon \int \sqrt{-\frac{a_5}{a_0}} dz + C_1, \quad \varepsilon = \pm 1; \quad (6^{II})$$

в) $a_3 = 0, a_4 \neq 0, a_5 \neq 0$, то

$$\omega'^2 = -\frac{a_4}{a_0} \left(\omega + \frac{a_5}{a_4} \right), \quad (6^{III})$$

необходимо, чтобы $\frac{a_5}{a_4} = \text{const}$, тогда

$$\omega = \frac{1}{4} \left(\int \sqrt{-\frac{a_4}{a_0}} dz + C_1 \right)^2 - \frac{a_5}{a_4};$$

г) $a_3 = a_5 = 0, a_4 \neq 0$, то

$$a_0 \omega'^2 + a_4 \omega = 0, \quad (6^{IV})$$

$$\omega = \frac{1}{4} \left(\int \sqrt{-\frac{a_4}{a_0}} dz + C_1 \right)^2.$$

д) $a_3 \neq 0$. Уравнение (4) запишем в виде

$$\omega'^2 = -\frac{a_3}{a_0} \left[\omega^2 + \frac{a_4}{a_3} \omega + \frac{a_5}{a_3} \right]. \quad (7)$$

В силу [2] $\frac{a_4}{a_3} = \text{const}, \frac{a_5}{a_3} = \text{const}$, откуда

$$\omega = \frac{C_1}{2} \cdot e^{\int \sqrt{-\frac{a_3}{a_0}} dz} - \left(\frac{a_5}{a_3} - \frac{a_4^2}{4a_3^2} \right) \frac{1}{2C_1} e^{\int \sqrt{-\frac{a_3}{a_0}} dz} - \frac{a_4}{2a_3}, \quad (8)$$

$C_1 = \text{const}$, т. е. в решении нет подвижных критических точек (п. к. т.)

е) $a_3 \neq 0$. Уравнение (4) можно записать в виде

$$(\omega' + a\omega + b)(\omega' + \alpha\omega + \beta) = c, \quad c \neq 0. \quad (9)$$

Обозначив $\omega' + a\omega + b = \lambda(z)$, $\lambda \neq 0$,

$$\omega' + \alpha\omega + \beta = c\lambda^{-1}. \quad (10)$$

Из системы (10) запишем:

$$\omega = \frac{\lambda^2 - \lambda(b - \beta) - c}{(a - \alpha)\lambda} \quad (11), \quad \omega' = \frac{\alpha\lambda^3 + (\beta a - \alpha b)\lambda - ac}{(\alpha - a)\lambda}. \quad (12)$$

Из (11) и (12) имеем уравнение Абеля относительно $\lambda(z)$ [3]

$$(\lambda^2 + c) \frac{d\lambda}{dz} = \lambda(M\lambda^2 + N\lambda + P). \quad (13)$$

Чтобы решение уравнения (13) не содержало п. к. т. необходимо, чтобы $N \equiv 0, P - CM \equiv 0$, где $M = \frac{(a - \alpha)'}{a - \alpha} - \alpha$, $N = \left(\frac{b - \beta}{a - \alpha} \right)' (a - \alpha) + b\alpha - a\beta$, $P = \left(\frac{c}{a - \alpha} \right)' (a - \alpha) + ac$. Тогда $\frac{b}{a} = C_1$, $a = -\alpha = \varepsilon \sqrt{-\frac{a_3}{a_0}}$,

$$b = -\beta = -\varepsilon \frac{a_4}{2\sqrt{-a_0 a_3}}, \quad c = -\frac{4a_3 C_2}{a_0}, \quad a_4^2 = -4a_3 (ca_0 + a_5). \quad (14)$$

С учетом (14) из (13)

$$\lambda = C_3 \sqrt{-\frac{a_3}{a_0}} \cdot e^{\varepsilon \int \sqrt{-\frac{a_3}{a_0}} dz}, \quad C_1, C_2, C_3 - \text{const} \quad (15)$$

Из вышеизложенного следует

Теорема 1. Если выполнено одно из условий (6^I)—(6^{IV}), (8), (14), то уравнение (4) не содержит п. к. т. и интегрируется в квадратурах.

2. Рассмотрим уравнение (5), здесь

$$B_0 = \left| \frac{a_0 b_0}{a_2 b_2} \right|^2 - \left| \frac{a_0 b_0}{a_1 b_1} \right| \left| \frac{a_1 b_1}{a_2 b_2} \right| = B_0(z) \neq 0.$$

Продифференцировав уравнение (5), в силу его решений имеем:

$$\omega'' = \frac{B_0 \frac{\partial \left(\frac{B_2}{B_0} \right)}{\partial z} \omega'^3 + \left(\frac{\partial B_4}{\partial \omega} - \frac{B_2}{B_0} \frac{\partial B_2}{\partial \omega} \right) \omega'^2 + B_0 \frac{\partial \left(\frac{B_4}{B_0} \right)}{\partial z} \omega' - \frac{B_4}{B_0} \frac{\partial B_2}{\partial \omega}}{2(B_2 \omega'^2 + 2B_4)}. \quad (16)$$

Необходимыми условиями в случае $B_2 \neq 0$ являются:

$$\frac{\partial \left(\frac{B_4}{B_0} \right)}{\partial z} = 0, \quad \frac{B_4}{B_2} \frac{\partial \left(\frac{B_2}{B_0} \right)}{\partial z} = 0, \quad \frac{B_4}{B_2} \left(\frac{\partial B_4}{\partial \omega} - \frac{B_2}{B_0} \frac{\partial B_2}{\partial \omega} \right) = 0, \quad \frac{B_4}{B_0} \frac{\partial B_2}{\partial \omega} = 0.$$

Это означает, либо

$$B_4 = 0 \quad (16'), \quad \text{либо} \quad \frac{B_2}{B_0} = \alpha, \quad \frac{B_4}{B_0} = \beta; \quad \alpha, \beta = \text{const}. \quad (16'')$$

Изучим соотношение коэффициентов для каждого случая уравнения (5).

а) $B_2 \neq 0, B_4 \equiv 0$, тогда

$$B_0 \omega'^4 + B_2 \omega'^2 = 0. \quad (17)$$

Уравнение (17) распадается на два уравнения: $\omega'^2 = 0$ и $\omega'^2 = -B_2/B_0$; первое уравнение в решении не содержит п. к. т.; второе уравнение перепишем в виде

$$\begin{aligned} \omega'^2 = & -\frac{1}{B_0} \left(2 \left| \frac{a_0 b_0}{a_4 b_4} \right| \left| \frac{a_0 b_0}{a_1 b_1} \right| \omega^4 + \left[4 \left| \frac{a_0 b_0}{a_2 b_2} \right| \left| \frac{a_0 b_0}{a_4 b_4} \right| + \left| \frac{a_0 b_0}{a_1 b_1} \right| \left| \frac{a_0 b_0}{a_5 b_5} \right| - \right. \right. \\ & \left. \left. - \left| \frac{a_2 b_2}{a_3 b_3} \right| \left| \frac{a_0 b_0}{a_1 b_1} \right| \right] \omega^3 + \left[2 \left| \frac{a_0 b_0}{a_4 b_4} \right| \left| \frac{a_1 b_1}{a_2 b_2} \right| + 2 \left| \frac{a_0 b_0}{a_2 b_2} \right| \left| \frac{a_0 b_0}{a_5 b_5} \right| - \right. \\ & \left. - 2 \left| \frac{a_0 b_0}{a_2 b_2} \right| \left| \frac{a_2 b_2}{a_3 b_3} \right| + \left| \frac{a_0 b_0}{a_1 b_1} \right| \left| \frac{a_1 b_1}{a_5 b_5} \right| \right] \omega^2 + \left[\left| \frac{a_1 b_1}{a_2 b_2} \right| \left| \frac{a_0 b_0}{a_5 b_5} \right| - \left| \frac{a_1 b_1}{a_2 b_2} \right| \left| \frac{a_2 b_2}{a_3 b_3} \right| + \right. \\ & \left. + 2 \left| \frac{a_0 b_0}{a_2 b_2} \right| \left| \frac{a_1 b_1}{a_5 b_5} \right| \right] \omega + \left| \frac{a_1 b_1}{a_2 b_2} \right| \left| \frac{a_1 b_1}{a_5 b_5} \right| \right). \quad (18) \end{aligned}$$

Для того чтобы уравнение (18) не содержало п. к. т., необходимо, чтобы оно было представимо в одном из следующих видов [2]:

$$\omega'^2 = A(z) (\omega - \alpha_1)^2 (\omega - \alpha_2) (\omega - \alpha_3), \quad (19)$$

$$\omega'^2 = A(z) (\omega - \alpha_1) (\omega - \alpha_2) (\omega - \alpha_3) (\omega - \alpha_4), \quad (20)$$

$$\omega' = B(z) (\omega - \alpha_1) (\omega - \alpha_2), \quad (21)$$

причем выполнены условия:

$$\begin{cases} \left| \begin{array}{l} a_0 b_0 \\ a_3 b_3 \end{array} \right| = 0, \\ \left| \begin{array}{l} a_0 b_0 \\ a_4 b_4 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{l} a_1 b_1 \\ a_3 b_3 \end{array} \right| = 0 \\ \left| \begin{array}{l} a_2 b_2 \\ a_3 b_3 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{l} a_1 b_1 \\ a_4 b_4 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{l} a_0 b_0 \\ a_5 b_5 \end{array} \right| = 0 \\ \left| \begin{array}{l} a_2 b_2 \\ a_4 b_4 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{l} a_1 b_1 \\ a_5 b_5 \end{array} \right| = 0 \\ \left| \begin{array}{l} a_2 b_2 \\ a_5 b_5 \end{array} \right| = 0 \end{cases} \quad (22)$$

б) $B_2 \neq 0$, $B_2 = \alpha B_0$, $B_4 = \beta B_0$, тогда уравнение (5) запишется в виде:

$$w'^4 + \alpha w'^2 + \beta = 0. \quad (23)$$

Из (23) находим $w = \varepsilon \int \sqrt{\frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2}} dz + C_1$, C_1 — const.

Замечание. В случае $B_2 \neq 0$, $B_4 \equiv 0$ B_2 не может быть функцией только от z .

в) $B_2 \equiv 0$, $B_4 \neq 0$, тогда $w'^4 = -B_4/B_0$, где $B_4 = (PQ_{11} - P_1 Q_{01})^2$ — многочлен восьмой степени относительно w . Можно записать

$$w'^2 = \varepsilon \frac{PQ_{11} - P_1 Q_{01}}{\sqrt{-B_0}} \quad (24)$$

Приравнивая правые части уравнения (24) и поочередно (19) — (21), получим соответственно системы для определения α_i .

$$\begin{cases} -2\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 = \left(\left| \begin{array}{l} a_0 b_0 \\ a_4 b_4 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{l} a_1 b_1 \\ a_3 b_3 \end{array} \right| \right) \mu, \\ \alpha_1^2 + 2\alpha_1(\alpha_2 + \alpha_3) + \alpha_2\alpha_3 = \left(\left| \begin{array}{l} a_2 b_2 \\ a_3 b_3 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{l} a_1 b_1 \\ a_4 b_4 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{l} a_0 b_0 \\ a_5 b_5 \end{array} \right| \right) \mu, \\ -\alpha_1(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + 2\alpha_2\alpha_3) = \left(\left| \begin{array}{l} a_2 b_2 \\ a_4 b_4 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{l} a_1 b_1 \\ a_5 b_5 \end{array} \right| \right) \mu, \\ \alpha_1^2\alpha_2\alpha_3 = \left| \begin{array}{l} a_2 b_2 \\ a_5 b_5 \end{array} \right| \cdot \mu, \quad \text{где } \mu = \frac{1}{\left| \begin{array}{l} a_0 b_0 \\ a_3 b_3 \end{array} \right|}, \quad A = \frac{\left| \begin{array}{l} a_0 b_0 \\ a_3 b_3 \end{array} \right|}{\varepsilon \sqrt{-B_0}}. \end{cases} \quad (25)$$

$$\begin{cases} -(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) = \left(\left| \begin{array}{l} a_0 b_0 \\ a_4 b_4 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{l} a_1 b_1 \\ a_3 b_3 \end{array} \right| \right) \cdot \mu, \\ \alpha_1\alpha_2 + (\alpha_3 + \alpha_4)(\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_3\alpha_4 = \left(\left| \begin{array}{l} a_2 b_2 \\ a_3 b_3 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{l} a_1 b_1 \\ a_4 b_4 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{l} a_0 b_0 \\ a_5 b_5 \end{array} \right| \right) \cdot \mu, \\ -[\alpha_1\alpha_2(\alpha_3 + \alpha_4) + \alpha_3\alpha_4(\alpha_1 + \alpha_2)] = \left(\left| \begin{array}{l} a_2 b_2 \\ a_4 b_4 \end{array} \right| + \left| \begin{array}{l} a_1 b_1 \\ a_5 b_5 \end{array} \right| \right) \cdot \mu, \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4 = \left| \begin{array}{l} a_2 b_2 \\ a_5 b_5 \end{array} \right| \cdot \mu. \end{cases} \quad (26)$$

$$\begin{cases}
 \alpha_1 + \alpha_2 = -\frac{1}{2} \left(\left| \frac{a_0 b_0}{a_4 b_4} \right| + \left| \frac{a_1 b_1}{a_3 b_3} \right| \right) \mu, \\
 \alpha_1 \alpha_2 = \varepsilon \sqrt{\left| \frac{a_2 b_2}{a_5 b_5} \right|} \mu, \\
 \left| \frac{a_2 b_2}{a_3 b_3} \right| + \left| \frac{a_1 b_1}{a_4 b_4} \right| + \left| \frac{a_0 b_0}{a_5 b_5} \right| = \frac{1}{4} \left(\left| \frac{a_0 b_0}{a_4 b_4} \right| + \left| \frac{a_1 b_1}{a_3 b_3} \right| \right)^2 \mu + 2\varepsilon \sqrt{\left| \frac{a_2 b_2}{a_5 b_5} \right|} \mu^{-1} \\
 \left| \frac{a_2 b_2}{a_4 b_4} \right| + \left| \frac{a_1 b_1}{a_3 b_3} \right| = \varepsilon \left(\left| \frac{a_0 b_0}{a_4 b_4} \right| + \left| \frac{a_1 b_1}{a_3 b_3} \right| \right) \cdot \mu \sqrt{\left| \frac{a_2 b_2}{a_5 b_5} \right|} \mu.
 \end{cases} \quad (27)$$

Здесь $B = \varepsilon \sqrt{A}$.

Уравнения (19)–(21) исследовались Брио и Буке, их решения не содержат п. к. т. [3].

Замечание. В случае $B_2 = 0$, $B_4 = 0$ уравнение (5) примет вид $\omega'^4 = 0$, т. е. не содержит п. к. т.

Итак, получаем следующую теорему.

Теорема 2. Пусть выполнено одно из условий (25)–(27), (16) и (22), (16''). Тогда уравнение (5) не имеет п. к. т.

ЛИТЕРАТУРА

1. Айнс Э. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения.— Харьков, 1939.
2. Голубев В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений.— М.— Л., 1950.
3. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, изд. 5-е.— М., 1976.

Поступила в редакцию
27.10.82.

Кафедра дифференциальных уравнений

УДК 519.1

М. М. КОВАЛЕВ, Н. Н. ПИСАРУК

НЕЗАВИСИМЫЕ ПОТОКИ И ПОЛИМАТРОИДЫ

Метод построения матроидов, индуцированных путями в графах, является центральным для проблем теории трансверсалей (см. [1]). В настоящей заметке этот метод обобщается на полиматроиды и применяется для решения задачи Фуджишэж [2] о максимальных независимых потоках. Отсутствующие здесь определения из теории полиматроидов можно найти в [3].

Пусть $V_1, V_2 \subseteq V$ — множества источников и стоков орграфа $G = (V, E)$. Независимым потоком называется вектор $x \in Z^E$, удовлетворяющий ограничениям

$$0 \leq x \leq d, \quad (1), \quad x(E_i^+) - x(E_i^-) = 0, \quad i \in V \setminus (V_1 \cup V_2), \quad (2)$$

$$0 \leq u(S) \leq R_1(S), \quad S \in 2^{V_1}, \quad (3), \quad 0 \leq v(S) \leq R_2(S), \quad S \in 2^{V_2}, \quad (4)$$

где d — вектор пропускных способностей, $u_i = x(E_i^+) - x(E_i^-)$, $v_i = x(E_i^-) - x(E_i^+)$, R_k — субмодулярные неубывающие неотрицательные функции на 2^{V_k} , символ 2^V означает семейство всех подмножеств множества V . Известно, что ограничения (3) и (4) задают полиматроиды, обозначаем их соответственно P_1 и P_2 . Предполагаем, что функции R_k принимают целые значения и термин полиматроид употребляем также для обозначения множества, образованного пересечением P_k и решеткой целочисленных векторов.

1. Индуцированные полиматроиды. Дополним орграф источником s , стоком t и множеством дуг (s, i) , $i \in V_1$; (j, t) , $j \in V_2$. Новый орграф обозначим G^* . Пропускные способности новых дуг равны ∞ , а старых не

изменяются. Задача о максимальном независимом потоке свелась к задаче о максимальном потоке в орграфе G^* при дополнительном условии: $u \in P_1$, $v \in P_2$. Теперь u , v — дуговые потоки по новым дугам. Поток (u, x, v) в орграфе G^* назовем t -независимым, если $v \in P_2$. Обозначим через Q_1 множество таких векторов $z \in Z^{V_1}$, что существует t -независимый поток (u, x, v) со свойством $u = z$.

Теорема 1.1. Q_1 — полиматроид.

Доказательство. Пусть $y^0 \leq y$ и $y \in Q_1$. Покажем, что $y^0 \in Q_1$. Пусть (u, x, v) такой t -независимый поток в G^* , что $u = y$. Пусть $y_e > y_e^0$, где $e = (s, i)$, $i \in V_1$. Из соотношений баланса для вершины i вытекает существование дуги $e_1 = (i, i_1)$ со свойством $x_{e_1} > 0$. Продолжая этот процесс, достигнем вершины t и построим некоторый путь L . Уменьшим поток x вдоль пути L на величину $\varepsilon_1 = \min_{i \in L} \{(y_e - y_e^0), \min x_j\}$. Новый поток

(u^1, x^1, v^1) является также t -независимым, так как по определению полиматроида $v^1 \in P_2$. Кроме того, $y^0 \leq u^1 < y$. Аналогичным образом уменьшаем поток u^1 . В конце концов получим t -независимый поток $(\bar{u}, \bar{x}, \bar{v})$ со свойством $y^0 = \bar{u}$, а это означает, что $y^0 \in Q_1$.

Пусть $y, y^0 \in Q_1$, $y(V_1) = y^0(V_1) + 1$ и пусть $\varphi = (u, x, v)$, $\varphi^0 = (u^0, x^0, v^0)$ — t -независимые потоки в G^* , со свойствами $u = y$ и $u^0 = y^0$. Пусть G_φ^* — граф остаточных пропускных способностей [4]. Тогда $\Delta\varphi = \varphi \ominus \varphi^0$ поток в G_φ^* . По теореме о разложении $\Delta\varphi = \sum_C \varphi_C + \sum_L \varphi_L$, где φ_C, φ_L — элементарные

потоки вдоль соответственного цикла C и простого пути L из s в t . В силу того, что P_2 -полиматроид существует индекс j , что $v_j^0 > v_j$ и $v + \delta_j \in P_2$, δ_j — j -й единичный орт. Рассмотрим два случая. В первом в разложении $\Delta\varphi$ существует элементарный поток вдоль пути L' из s в t , который оканчивается дугой (j, t) . Пусть $\varphi' = \varphi^0 \oplus \varphi_{L'}(1)$, где $\varphi_{L'}(1)$ — элементарный единичный поток вдоль пути L' . Ясно, что $\varphi' = (u', x', v')$ — t -независимый поток в G^* и $u' \geq u^0$, $u(V_1) = u'(V_1)$. Поэтому $y' = u'$, и $y' \in Q_1$, это и доказывает, что Q_1 — полиматроид. Во втором случае в разложении $\Delta\varphi$ нет пути L из s в t , содержащего дугу (j, t) . Снова рассмотрим два случая: а) в разложении $\Delta\varphi$ существует цикл C' , содержащий дугу (j, t) и проходящий через s ; б) такого цикла не существует. В случае а) пусть L' есть часть цикла C' , ведущая из s в t . Дальше доказательство такое же, как и в случае 1. В случае б) для произвольного цикла C' , входящего в разложение $\Delta\varphi$ и содержащего дугу (j, t) , положим $\varphi' = \varphi^0 \oplus \varphi_{C'}(1)$. Ясно, что $\varphi' = (u', x', v')$ — t -независимый поток и $u' = u^0$. Теперь, рассматривая вместо потока φ^0 поток φ' , повторим все рассуждения снова. Продолжая таким образом, мы придем к случаю 1 или подслучаю а) случая 2. Тем самым теорема полностью доказана.

Следствие 1.1. Ранговая функция R_{Q_1} полиматроида Q_1 в точке $A \in V_1$ равна максимальному t -независимому потоку в орграфе G^* с пропускными способностями: $\bar{d}_e = \infty$ для e из $s \times A$ и из $V_2 \times t$; $\bar{d}_e = 0$ для $e \in s \times (V_1 \setminus A)$; $\bar{d}_e = d_e$ для $e \in E$.

Следствие 1.2. Задача о максимальном независимом потоке эквивалентна задаче

$$\max_{y \in P_1 \cap Q_1} y(V_1). \quad (5)$$

Задача (5) известна как задача о максимальном полиматроидном пересечении, для решения последней существуют алгоритмы с полиномиальным числом обращений к оракулам, проверяющим принадлежность вектора y соответственно полиматроидам P_1 и Q_1 . Полиматроид Q_1 явно не задан. Укажем, как проверять принадлежность: $y \in Q_1$. Определим множество $Q_2(y) = \{z \in Z_+^{V_1} : \text{существует поток } (u, x, v) \text{ в } G^*, \text{ что } v = z \text{ и } u \leq y\}$.

Теорема 1.2. $Q_2(y)$ — полиматроид.

Следствие 1.3. Вектор $z \in Q_2(y)$ тогда и только тогда, когда величина

максимального потока в орграфе G^* со следующими пропускными способностями: y для дуг из $s \times V_1$, d для дуг из E ; z для дуг из $V_2 \times t$ равна $z(V_2)$.

Следствие 1.4. Вектор $y \in Q_1$ тогда и только тогда, когда $y(V_1) = \max \{z(V_2) : z \in Q_2(y) \cap P_2\}$.

З а м е ч а н и е 1. Из теоремы 1.2 вытекает алгоритм решения задачи о максимальном независимом потоке с помощью ее сведения к полиматроидному пересечению.

З а м е ч а н и е 2. Теоремы 1.1, 1.2 справедливы и в том случае, когда вместо кольца целых чисел Z взять поле R — действительных чисел.

2. Существование независимых потоков. В [5] получен следующий критерий непустоты полиматроидного пересечения с заданной гиперплоскостью.

Теорема 2.1. Пусть $N = \{1, 2, \dots, n\}$ и пусть P_1 и P_2 — два полиматроида в R_+^N с ранговыми функциями R_1 и R_2 соответственно. Тогда $P(\alpha) = \{x \in P_1 \cap P_2 : x(N) = \alpha\} \neq \emptyset$, если и только если $R_1(A) + R_2(N \setminus A) \geq \alpha$ для всех $A \subseteq N$.

Докажем аналогичную теорему для независимых потоков. Пусть $S, T \subseteq V$. Пара (S, T) называется (S, T) -разрезом множества V , если $S \cup T = V, S \cap T = \emptyset$.

Теорема 2.2. Независимый поток величины α существует в орграфе G тогда и только тогда, когда $R_1(V_1 \cap T) + d(E \cap (S \times T)) + R_2(V_2 \cap S) \geq \alpha$ для всех (S, T) -разрезов.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу теоремы 2.1 и следствий 1.1, 1.2 независимый поток величины α существует тогда и только тогда, когда $R_1(A) + R_{Q_1}(V_1 \setminus A) \geq \alpha$ для любых $A \subseteq V_1$. Неравенство $R_{Q_1}(V_1 \setminus A) \geq \alpha - R_1(A)$ в силу теоремы 1.2 и следствия 1.4 справедливо тогда и только тогда, когда для любых $B \subseteq V_2$ имеет место неравенство

$$R_2(B) + R_{Q_2}(\bar{d})(V_2 \setminus B) \geq \alpha - R_1(A). \quad (6)$$

Пропускные способности d^* дуг графа G^* определим правилом $d_e^* = 0$ для $e \in B \times t$ и $d_e^* = \bar{d}_e$ для остальных дуг. Из следствия 1.3 вытекает, что $R_{Q_2(d)}(V_2 \setminus B) = \min d^*(E^* \cap (S^* \times T^*))$, где минимум берется по всем разрезам (S^*, T^*) орграфа G^* , но для минимального разреза (S^0, T^0)

$$d^*(E^* \cap (S^0 \times T^0)) = d^*(E \cap (S^0 \times T^0)) + d^*(s \times A) + d^*(B \times t) = d(E \cap (S^0 \times T^0)), \quad (7)$$

т. е. неравенство (6) эквивалентно следующему неравенству:

$$R_2(B) + d(E \cap (S^0 \times T^0)) \geq \alpha - R_1(A). \quad (8)$$

для любых $A \subseteq V_1, B \subseteq V_2$. Так как неравенство (8) справедливо для минимального разреза, оно тем более верно для любого (S, T) -разреза, обладающего свойством $V_1 \cap T \subseteq A, V_2 \cap S \subseteq B$. Уменьшая число независимых параметров в (8) по правилу $B = V_2 \cap S, A = V_1 \cap T$, получаем утверждение теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мейсон Дж. Проблемы комбинаторного анализа.— М., 1980, с. 7.
2. Fujishige S.— J. Operations Res. Soc. Japan, 1978, vol. 21, p. 189.
3. Емеличев В. А., Ковалев М. М., Кравцов М. К. Многогранники, графы, оптимизация.— М., 1981.
4. Адельсон-Вельский Г. М., Диниц Е. А., Карзанов А. В. Поточные алгоритмы.— М., 1975.
5. Edmonds J.— Proceedings of the Calgary International Conference on Combinatorial Structures and their Applications, Gordon and Breach, New York, 1970, p. 66.

Поступила в редакцию
10.11.82.

Кафедра математического обеспечения АСУ

О НАГРУЖЕННОСТИ ФРИКЦИОННОЙ МУФТЫ ПРИ КВАДРАТИЧНОМ ЗАКОНЕ ВКЛЮЧЕНИЯ

Будем рассматривать переходные процессы однозвенной двухмассовой динамической системы с приводным асинхронным электродвигателем переменного тока, имеющим жесткую характеристику (угловая скорость ведущего диска $\omega_g = \text{const}$) [1, 2].

На основании принципа Даламбера [3] имеем систему дифференциальных уравнений, описывающую эти процессы:

$$\begin{cases} I_M \ddot{\varphi}_M = M_M(t, a) - c_R (\varphi_M - \varphi_C), \\ I_C \ddot{\varphi}_C = c_R (\varphi_M - \varphi_C) - M_C, \end{cases} \quad (1)$$

где I_M, I_C — моменты инерции ведомого диска муфты и разгоняемой массы; φ_M, φ_C — углы поворота масс с моментами инерции соответственно I_M и I_C ; c_R — приведенная крутильная жесткость; M_C — момент сопротивления; $M_M(t, a)$ — момент трения муфты (т. е. активный крутящий момент, передающийся на систему при помощи фрикционной муфты). Изучаемый процесс рассматривается на двух временных промежутках $I_1 = [0; 1]$ и $I_2 = [1; \tau]$, $\tau > 1$. На I_1 удельное давление возрастает, буксование между дисками муфты имеет место. При $1 \leq t \leq \tau$ удельное давление постоянно, но буксование продолжается. В момент времени τ буксование заканчивается, и диски муфты (ведущий и ведомый) вращаются как одно целое.

В настоящей статье находится тот закон включения муфты (из класса квадратичных полиномов), при котором работа буксования за одно включение наименьшая, а также определяются динамические нагрузки, которые испытывают при этом элементы муфты. Эти нагрузки характеризуются моментом упругих сил.

В новых переменных $\varphi_M = \varphi_1$, $\varphi_C = \varphi_2$, $\dot{\varphi}_M = \varphi_3$, $\dot{\varphi}_C = \varphi_4$ и с учетом того, что $M_M(t, a) = at^2 + (\bar{M} - a)t$, (1) запишется в виде

$$\begin{cases} \dot{\varphi}_1 = \varphi_3, \\ \dot{\varphi}_2 = \varphi_4, \\ \dot{\varphi}_3 = [at^2 + (\bar{M} - a)t - c_R(\varphi_1 - \varphi_2)]/I_M, \\ \dot{\varphi}_4 = [c_R(\varphi_1 - \varphi_2) - M_C]/I_C, \end{cases} \quad (2)$$

где $\bar{M} \leq a \leq \bar{M}$, $\bar{M} = \text{const}$ (постоянный момент трения полностью включенной муфты, т. е. когда $1 \leq t \leq \tau$). Система (2) решается при нулевых начальных условиях (ведомый диск муфты и разгоняемая масса в начальный момент покоятся) $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = \varphi_3(0) = \varphi_4(0) = 0$. Качество переходного процесса будем оценивать [1, 2] работой буксования за одно включение

$$L = L_1 + L_2 = \int_0^1 M_M(t, a) [\omega_g - \dot{\varphi}_1(t, a)] dt + \int_1^{\tau(a)} \bar{M} [\omega_g - \dot{\varphi}_1(t, a)] dt, \quad (3)$$

где $\tau(a)$ (момент окончания буксования) удовлетворяет трансцендентному уравнению $\omega_g - \dot{\varphi}_1(\tau, a) = 0$. Момент упругих сил вычисляется по формулам:

$$M_g(t, a^*) = \begin{cases} c_R [\varphi_1(t, a^*) - \varphi_2(t, a^*)] = c_R \varphi(t, a^*), & t \in I_1, \\ c_R [\tilde{\varphi}_1(t, a^*) - \tilde{\varphi}_2(t, a^*)] = c_R \tilde{\varphi}(t, a^*), & t \in I_2, \end{cases}$$

где a^* — значение параметра a , при котором $L(a)$ принимает наименьшее значение на отрезке $[0; \tau]$, $\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2$ — компоненты решения системы (2) на промежутке $[1; \tau]$. Максимальный момент упругих сил определяется

путем нахождения наибольшего значения функции $M_g(t, a^*)$ на отрезке $[0; \tau]$.

Из (2) с учетом нулевых начальных условий получим [4]:

$$\varphi(t, a) = \varphi_1(t, a) - \varphi_2(t, a) = A(a) \sin [Bt + \alpha(a)] + C(a)t^2 + D(a)t + E(a), \quad (4)$$

где $A(a) = \sqrt{(2a/(B^2 I_M) - M_c/I_c)^2 + (a - \bar{M})^2/(B I_M)^2}/B^2$,

$$B^2 = c_K/(1/I_M + 1/I_c), \quad \operatorname{tg} \alpha(a) = B I_M (2a/(B^2 I_M) - M_c/I_c)/(a - \bar{M}), \quad (5)$$

$$C(a) = a/(B^2 I_M), \quad D(a) = (\bar{M} - a)/(B^2 I_M), \quad E(a) = [M_c/I_c - 2a/(B^2 I_M)]/B^2.$$

Используя (4) и третье уравнение системы (2), имеем

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_1(t, a) = \varphi_3(t, a) = & \frac{1}{I_M} \left\{ \frac{a - c_K C}{3} t^3 + \frac{\bar{M} - a - c_K D}{2} t^2 - c_K E t + \right. \\ & \left. + \frac{A c_K}{B} [\cos (Bt + \alpha) - \cos \alpha] \right\}. \end{aligned} \quad (6)$$

Подставляя выражения $M_M(t, a) = at^2 + (\bar{M} - a)t$ и $\dot{\varphi}_1(t, a)$ на основании (6) в формулу (3), после интегрирования от 0 до 1 работа буксования на первом отрезке

$$\begin{aligned} L_1(a) = & \frac{\omega_g}{2} \left(\bar{M} - \frac{a}{3} \right) - \frac{1}{I_M} \left\{ \frac{a^2}{72} + \frac{1}{2} \left[c_K \left(\frac{1}{45} C + \frac{1}{20} D + \frac{1}{6} E \right) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{1}{6} \bar{M} \right] a + \bar{M} \left[\frac{1}{8} \bar{M} - c_K \left(\frac{1}{15} C + \frac{1}{8} D + \frac{1}{3} E \right) \right] + \frac{A c_K K(a)}{B} \right\}, \end{aligned} \quad (7)$$

где $K(a) = \frac{1}{B^2} \left\{ \frac{\bar{M} B^2 - 2a}{B} \sin (B + \alpha) + (\bar{M} + a) \cos (B + \alpha) + 2a \sin \alpha - \left[\bar{M} \left(1 + \frac{B^2}{2} \right) - a \left(1 + \frac{B^2}{6} \right) \right] \cos \alpha \right\}$; C, D, E, A, α выражаются через a по формулам (5).

На отрезке $[1; \tau]$ из (2) при начальных условиях $\tilde{\varphi}_k(1) = \varphi_k(1)$, $k = \overline{1, 4}$ (т. е. условиях «склеивания решений» при $t=1$ и $\forall a \in [-\bar{M}; \bar{M}]$)

$$\tilde{\varphi}(t, a) = \tilde{\varphi}_1(t, a) - \tilde{\varphi}_2(t, a) = A_1(a) \sin [Bt + \alpha_1(a)] + F/B^2, \quad (8)$$

где $A_1(a) = \sqrt{(B^2 \Phi(a) - F)^2/B^2 + \Omega^2(a)}/B$,

$$\operatorname{tg} [B + \alpha_1(a)] = (B^2 \Phi(a) - F)/(B \Omega(a)), \quad F = \bar{M}/I_M + M_c/I_c, \quad (9)$$

$$\Phi(a) = \varphi(1, a), \quad \Omega(a) = \dot{\varphi}(1, a).$$

Система (2) на промежутке $[1; \tau]$ с учетом формулы (8) дает

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_1(t, a) = \tilde{\varphi}_3(t, a) = & \frac{1}{I_M} \left\{ \left(\bar{M} - \frac{c_K E}{B^2} \right) (t - 1) + \right. \\ & \left. + \frac{c_K A_1}{B} [\cos (Bt + \alpha_1) - \cos (B + \alpha_1)] \right\} + \varphi_3(1, a), \end{aligned} \quad (10)$$

где $\varphi_3(1, a) = \varphi_1(1, a)$ берется из равенства (6). Из формулы (3) с использованием выражения (10) работа трения муфты на отрезке $[1; \tau]$

$$\begin{aligned} L_2(a) = & \bar{M} \left\{ \left[\omega_g - \varphi_3(1, a) - \frac{c_K A_1}{B I_M} \cos (B + \alpha_1) \right] (\tau - 1) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{I_M} \left[\left(\bar{M} - \frac{c_K F}{B^2} \right) \frac{(\tau - 1)^2}{2} + \frac{c_K A_1}{B^2} (\sin (B\tau + \alpha_1) - \sin (B + \alpha_1)) \right] \right\}, \end{aligned} \quad (11)$$

где A_1, α_1, F вычисляются по формулам (9), τ удовлетворяет трансцендентному уравнению $\omega_g - \frac{1}{I_M} \left\{ \left(\bar{M} - \frac{c_K F}{B^2} \right) (\tau - 1) + \frac{c_K A_1}{B} [\cos (B\tau + \alpha_1) - \cos (B + \alpha_1)] \right\} - \varphi_3(1, a) = 0$. Это уравнение при каждом фиксированном $a \in [-\bar{M}; \bar{M}]$ решается с определенной точностью методом половинного деления на отрезке $[0; 10]$.

Выражения (7) и (11) позволяют определить при каждом a из указанного промежутка суммарную работу буксования $L(a) = L_1(a) + L_2(a)$ на всем временном отрезке $[0; \tau]$.

Программирование велось на языке Фортран с использованием следующих исходных данных $I_M = 0,1$ кгс·м·с²; $I_C = 0,5$ кгс·м·с²; $c_h = 5$ кгс·м/рад; $\omega_g = 230$ с⁻¹; $\bar{M} = 60$ кгс·м; $M_c = 20$ кгс·м. Результаты расчетов отражает следующая таблица

a	L_1	τ	L_2	L
-60	8553,20	4,110	15601,98	24155,18
...
0	6622,71	4,152	16087,16	22709,87
...
60	4514,68	4,198	16510,81	21025,49

Из изложенного получается, что наименьшая работа буксования муфты за одно включение $L_{\min} \approx L|_{a^*=60} = 21025,49$, а соответствующий максимальный динамический крутящий момент $M_{g\max} \approx 92,144$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Солонский А. С.— В сб.: Повышение эффективности использования техники в сельском хозяйстве. Горки, 1970, т. 63, с. 143.
2. Матагов В. И., Солонская Г. А., Солонская К. А.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. I, физ., мат. и мех., 1980, № 1, с. 72.
3. Яблонский А. А. Курс теоретической механики, ч. 2.— М., 1971.
4. Матвеев Н. М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений.— М., 1967.

Поступила в редакцию
01.12.82.

Кафедра дифференциальных уравнений

УДК 517.544.8.545

Э. И. ЗВЕРОВИЧ, Г. Г. ЧАЕВСКИЙ

КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ КРУГОВЫХ МНОГОУГОЛЬНИКОВ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

1. В плоскости комплексного переменного $z = x + iy$ рассмотрим область D , полученную выбрасыванием круга $|z| \leq \rho$ из прямоугольника $|\operatorname{Re} z| < \omega$, $|\operatorname{Im} z| < \omega'$, где $0 < \rho < \min\{\omega, \omega'\}$. Обозначим $D^* = \{z \in D | \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0\}$. Рассматривается задача конформного отображения кругового пятиугольника D^* на верхнюю полуплоскость. Задаются соответствие граничных точек: $F(\omega + i\omega') = \infty$, $F(i\rho) = 0$. При такой нормировке отображающая функция $F(z)$ существует и определяется с точностью до положительного множителя. Продолжая ее через прямолинейные участки границ, получаем двойкопериодическую функцию с основными периодами 2ω , $2i\omega'$, фундаментальной областью которой является область D , причем на окружности $|t| = \rho$ выполняется условие $F(\bar{t}) = F(t)$. Отображающую функцию будем искать в виде $F(z) = \Phi(z) - P(z - \omega - i\omega')$, где $P(u)$ — эллиптическая функция Вейерштрасса с основными периодами 2ω , $2i\omega'$; $\Phi(z)$ — аналитическая, двойкопериодическая, H -непрерывно продолжимая на ∂D . Условие $F(\bar{t}) = F(t)$, $|t| = \rho$ переписывается тогда в виде краевой задачи Карлемана для двойкопериодических функций:

$$\Phi(\bar{t}) - \Phi(t) = P(\bar{t} - \omega - i\omega') - P(t - \omega - i\omega'). \quad (1)$$

Для функции $\Phi(z)$ справедливо интегральное представление:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=\rho} \varphi(\tau) \zeta(\tau - z) d\tau + C, \quad \varphi(\bar{t}) + \varphi(t) \equiv 0, \quad \int_{|\tau|=\rho} \varphi(t) dt = 0, \quad (2)$$

где ζ — дзета-функция Вейерштрасса, соответствующая примитивным периодам 2ω , $2i\omega'$. Воспользовавшись формулами Сохоцкого для интеграла (2), сводим задачу (1) к квазифредгольмову интегральному уравнению:

$$\begin{aligned} \varphi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=\rho} \varphi(\tau) \left[\zeta(\bar{\tau}-\bar{t}) \left(-\frac{\rho^2}{\tau^2} \right) - \zeta(\tau-t) \right] d\tau = \\ = P(\bar{t}-\omega-i\omega') - P(t-\omega-i\omega'). \end{aligned} \quad (3)$$

Легко показать однозначную разрешимость уравнения (3). Не останавливаясь на этом, перейдем к его решению. С этой целью разложим ядро уравнения в ряд. Исходим из разложения [1]:

$$\begin{aligned} \zeta(z) = \frac{1}{z} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{2n-1} z^{2n-1}, \quad |z| < \min\{2\omega, 2\omega'\}, \\ \zeta\left(\frac{\rho^2}{\tau} - \frac{\rho^2}{t}\right) \left(-\frac{\rho^2}{\tau^2} \right) - \zeta(\tau-t) = -\frac{1}{\tau} + \\ + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{a_k}{2k-1} \left(1 - \frac{\rho^{4k}}{\tau^{2k+1} t^{2k-1}} \right) (\tau-t)^{2k-1}. \end{aligned} \quad (4)$$

Так как $\varphi(\bar{t}) + \varphi(t) \equiv 0$, то $\int_{|\tau|=\rho} \frac{\varphi(\tau)}{\tau} d\tau = 0$.

Функцию $\varphi(t)$ представим в виде ряда Лорана, учитывая, что $\varphi(t) = -\varphi(\bar{t}) = \varphi(-t)$:

$$\varphi(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j \left(\frac{t^{2j}}{\rho^{2j}} - \frac{\rho^{2j}}{t^{2j}} \right), \quad |t| = \rho. \quad (5)$$

Далее

$$P(t-\omega-i\omega') - P(\bar{t}-\omega-i\omega') = \sum_{m=1}^{\infty} b_{2m} \rho^{2m} \left(\frac{t^{2m}}{\rho^{2m}} - \frac{\rho^{2m}}{t^{2m}} \right), \quad (6)$$

где b_{2m} — коэффициенты лорановского разложения функции $P(z-\omega-i\omega')$ в точке $z=0$. Подставив (4), (5), (6) в уравнение (3), имеем:

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m \left(\frac{t^{2m}}{\rho^{2m}} - \frac{\rho^{2m}}{t^{2m}} \right) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{a_k}{2k-1} \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=\rho} \left(1 - \frac{\rho^{4k}}{\tau^{2k+1} t^{2k-1}} \right) \times \\ \times (\tau-t)^{2k-1} \left(\frac{\tau^{2j}}{\rho^{2j}} - \frac{\rho^{2j}}{\tau^{2j}} \right) d\tau = \sum_{m=1}^{\infty} b_{2m} \rho^{2m} \left(\frac{t^{2m}}{\rho^{2m}} - \frac{\rho^{2m}}{t^{2m}} \right). \end{aligned} \quad (7)$$

С помощью вычетов считаются интегралы:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=\rho} \left(1 - \frac{\rho^{4k}}{\tau^{2k+1} t^{2k-1}} \right) (\tau-t)^{2k-1} \left(\frac{\tau^{2j}}{\rho^{2j}} - \frac{\rho^{2j}}{\tau^{2j}} \right) d\tau = \\ = -\rho^{2k} C_{2k-1}^{2(k-j)} \left(\frac{t^{2(k-j)}}{\rho^{2(k-j)}} - \frac{\rho^{2(k-j)}}{t^{2(k-j)}} \right), \end{aligned}$$

если $1 \leq j \leq k$, при других значениях j интегралы равны нулю. Подставив значения интегралов в (7), получим:

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m \left(\frac{t^{2m}}{\rho^{2m}} - \frac{\rho^{2m}}{t^{2m}} \right) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{a_k}{2k-1} \rho^{2k} \sum_{j=1}^{k-1} C_{2k-1}^{2j} \left(\frac{t^{2j}}{\rho^{2j}} - \frac{\rho^{2j}}{t^{2j}} \right) \varphi_{k-j} + \\ + \sum_{m=1}^{\infty} b_{2m} \rho^{2m} \left(\frac{t^{2m}}{\rho^{2m}} - \frac{\rho^{2m}}{t^{2m}} \right). \end{aligned}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых функциях $\frac{t^{2m}}{\rho^{2m}} - \frac{\rho^{2m}}{t^{2m}}$, имеем бесконечную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\varphi_m = \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{a_k}{2k-1} C_{2k-1}^{2m} \rho^{2k} \varphi_{k-m} + b_{2m} \rho^{2m}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (8)$$

Теорема. Система (8) вполне регулярна.

Доказательство. Полная регулярность системы означает [3],

что существует $\Theta(\rho) \in]0, 1[$ такое, что сумма модулей коэффициентов каждой строки матрицы (8) не превосходит $(1 - \Theta(\rho))$, т. е.

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{a_k}{2k-1} C_{2k-1}^{2m} \rho^{2k} \leq 1 - \Theta(\rho), \quad m = 1, 2, \dots \quad (9)$$

Введем функцию $f(\rho) = \frac{1}{\rho} - \zeta(\rho) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{a_k}{2k-1} \rho^{2k-1}$. Без ограничения общности можно считать, что $\omega \leq \omega'$. Оценим левую часть неравенства (9):

$$0 < \sum_{k=m+1}^{\infty} C_{2k-1}^{2m} \frac{a_k}{2k-1} \rho^{2k} = \frac{f^{(2m)}(\rho)}{(2m)!} \rho^{2m+1} = \\ = 1 - \rho \frac{\rho^{2m}}{(2m)!} \zeta^{(2m)}(\rho) \leq 1 - \Theta(\rho), \quad (10)$$

где обозначено $\Theta(\rho) = \inf_{m \in \mathbb{N}} \left\{ \rho \frac{\rho^{2m}}{(2m)!} \zeta^{(2m)}(\rho) \right\}$. Покажем, что $0 < \Theta(\rho) < 1$

при $0 < \rho < \omega$. С этой целью рассмотрим степенной ряд: $f(z) = \frac{1}{z} -$

$\zeta(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\rho)}{n!} (z - \rho)^n$, сходящийся при $|z - \rho| < 2\omega - \rho$. Так как $0 < \rho < \omega$, то ряд будет сходиться, в частности, при $z = 2\rho$, а его общий член поэтому должен стремиться к нулю. Имеем равенство

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{f^{(2m)}(\rho)}{(2m)!} \rho^{2m+1} = 0.$$

Отсюда и из (10) заключаем, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \rho \frac{\rho^{2m}}{(2m)!} \zeta^{(2m)}(\rho) = 1. \quad (11)$$

Воспользовавшись дифференциальным уравнением для функции P , можно показать, что все производные четных порядков функции $\zeta(\rho)$ строго положительны, а все производные нечетных порядков строго отрицательны при $0 < \rho < \omega$. Этот вывод и равенство (11) показывают, что $\Theta(\rho) > 0$. Далее $\zeta''(\rho) = -P'(\rho)$ строго убывает при $0 < \rho < \omega$ и $\zeta''(\omega) = -P'(\omega) = 0$.

$$\lim_{\rho \rightarrow +0} \rho \frac{\rho^2}{2} \zeta''(\rho) = \lim_{\rho \rightarrow +0} \frac{\rho^3}{2} (-P'(\rho)) = 1,$$

поэтому $\Theta(\rho) = \inf_{m \in \mathbb{N}} \left\{ \rho \frac{\rho^{2m}}{(2m)!} \zeta^{(2m)}(\rho) \right\} \leq \rho \frac{\rho^2}{2} \zeta''(\rho) < 1$ при $0 < \rho < \omega$.

Таким образом, неравенство $0 < \Theta(\rho) < 1$ установлено, и тем самым полная регулярность системы (8) доказана.

Пусть (φ_j) — решение системы. Тогда отображающая функция записывается в следующем виде:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=\rho} \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j \left(\frac{\tau^{2j}}{\rho^{2j}} - \frac{\rho^{2j}}{\tau^{2j}} \right) \zeta(\tau - z) d\tau - P(z - \omega - i\omega') + \\ + C = \sum_{j=1}^{\infty} \rho^{2j} \frac{\varphi_j}{(2j-1)!} \zeta^{(2j-1)}(z) - P(z - \omega - i\omega') + C.$$

Постоянную C находим из условия нормировки $F(i\rho) = 0$.

$$C = P(i\rho - \omega - i\omega') - \sum_{j=1}^{\infty} \rho^{2j} \frac{\varphi_j}{(2j-1)!} \zeta^{(2j-1)}(\rho).$$

2. Приведем пример еще одного вида кругового пятиугольника, конформное отображение которого строится с помощью вышеуказанного метода. Рассмотрим правильный шестиугольник с центром в точке $z=0$, радиуса 1, с вершинами в точках $a_k = \exp\left(\frac{\pi i}{6}(2k+1)\right)$, ($k = 0, 1, \dots, 5$). Через D обозначим область, полученную выбрасыванием из внутренности

данного шестиугольника круга $|z| \leq \rho$, $(0 < \rho < \frac{\sqrt{3}}{2})$. Обозначим $D^* = \{z = re^{i\varphi} \in D \mid 0 < \varphi < \frac{\pi}{3}\}$. Требуется построить функцию $F(z)$, реализующую конформное отображение D^* на угол $0 < \arg \xi < \frac{2\pi}{3}$, причем $F\left(\exp \frac{\pi i}{6}\right) = \infty$, $F(\rho) = 0$. Тогда функция $\sqrt{F^3(z)}$ будет отображать D^* на верхнюю полуплоскость. Продолжая функцию $F(z)$ по принципу симметрии через прямолинейные участки границы, получим «тремяпериодическую» функцию $F(z)$, имеющую простые полюсы в вершинах шестиугольника, фундаментальной областью которой является D . Кроме того, на окружности $|z| = \rho$ выполняется условие: $F(\bar{t}) = F(t)$. Отображающую функцию будем искать в виде $F(z) = \Phi(z) + W(z)$, где $\Phi(z)$ H -непрерывно продолжима на ∂D , а $W(z)$ -функция, построенная в работе [2]. Тогда имеем краевое условие задачи Карлемана для «тремяпериодических» функций: $\Phi(\bar{t}) - \Phi(t) = W(t) - W(\bar{t})$. Эта задача с помощью интегрального представления $\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=\rho} \varphi(\tau) \zeta(\tau-z) d\tau + C$, $\varphi(\bar{t}) + \varphi(t) \equiv 0$, $\int_{|t|=\rho} \varphi(t) dt = 0$ (ζ — функция соответствует периодам $\omega = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\sqrt{3}$, $\omega' = \bar{\omega}$) сводится к интегральному уравнению:

$$\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_{|\tau|=\rho} \varphi(\tau) \left[\zeta(\bar{\tau} - \bar{t}) \cdot \left(-\frac{\rho^2}{\tau^2}\right) - \zeta(\tau - t) \right] d\tau = W(t) - W(\bar{t}). \quad (12)$$

Применяя к его решению тот же метод, что и в пункте 1, получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\varphi_m = \sum_{k=m+1}^{\infty} C_{2k-1}^{2m} \frac{a_k}{2k-1} \rho^{2k} \varphi_{k-m} + d_{2m} \rho^{2m}, \quad (13)$$

где d_{2m} — коэффициенты разложения функции $W(z)$ в окрестности нуля. Полная регулярность системы (13) доказывается абсолютно аналогично, как и в пункте 1. Отображающая функция через решение системы (φ_j) записывается:

$$F(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j \frac{\rho^{2j}}{(2j-1)!} \zeta^{(2j-1)}(z) + W(z) - \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_j \frac{\rho^{2j}}{(2j-1)!} \zeta^{(2j-1)}(\rho) - W(\rho).$$

Предложенный метод построения отображающих функций применим для весьма специальных видов круговых многоугольников, однако он имеет то преимущество, что нет необходимости в вычислении аксессуарных параметров.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ахизер Н. И. Элементы теории эллиптических функций.— М., 1948.
2. Жукова Н. И., Зверович Э. И.— Сиб. мат. ж., 1976, т. 17, № 5.
3. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа.— М., 1962.

Поступила в редакцию
10.12.82.

Кафедра теории функций

УДК 519.10

М. К. КРАВЦОВ

К ОЦЕНКЕ СВЕРХУ РАДИУСА ТРАНСПОРТНОГО МНОГОГРАННИКА

Под радиусом $r(M)$ многогранника M , как обычно, понимаем радиус графа $G(M)$ многогранника M , т. е. наименьший из эксцентриситетов

вершин в графе $G(M)$ [1]: $r(M) = \min_x \max_y r(x, y)$, где $r(x, y)$ — кратчайшее расстояние по числу ребер между вершинами x и y графа $G(M)$.

В настоящей работе получена достижимая верхняя оценка радиуса невырожденного транспортного многогранника с любым заданным числом граней (максимальной размерности). Построен также невырожденный транспортный многогранник порядка 3×4 радиуса 4 и указана линейная функция. Для этого многогранника найдена такая начальная (стартовая) вершина, из которой нельзя перейти к оптимальной вершине с помощью метода потенциалов за число итераций, не превосходящее 4, в том случае, если выбор переменной, которая вводится в базисное множество, на каждой итерации осуществляется согласно следующему правилу Φ : переменной, подлежащей включению в базис, соответствует наибольшая по абсолютной величине отрицательная характеристика.

1. Максимальный радиус. Справедлива следующая

Теорема. Пусть $2 \leq m \leq n$, $n \geq 3$, $0 \leq k \leq n-1$. Максимальный радиус в классе невырожденных транспортных многогранников порядка $m \times n$ с $(m-1)n+k$ гранями равен числу $m+k-1$, если $0 \leq k \leq n-2$, и не превосходит числа $m+n-2$, если $k=n-1$.

Доказательство. Согласно теореме [2], невырожденный транспортный многогранник $M(a, b) = \{x = \|x_{ij}\|_{m \times n} \mid \sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, j = \overline{1, n}, \sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, i = \overline{1, m}, x_{ij} \geq 0, i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}\}$ порядка $m \times n$, $2 \leq m \leq n$, $n \geq 3$, определенный векторами $a = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ и $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ с действительными положительными компонентами $(\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j)$, имеет $(m-1)n+k$ граней ($0 \leq k \leq n$) тогда и только тогда, когда выполняются неравенства:

i) при $k=n-1$

$$b_2 < \sum_{i=2}^m a_i < b_1, a_2 < \sum_{j=2}^n b_j < a_1; \quad (1)$$

ii) при $0 \leq k < n-m$

$$b_{n-k+1} < \sum_{i=2}^m a_i < b_{n-k}; \quad (2)$$

iii) при $n-m \leq k \leq n$, $k \neq n-1$ либо (2), либо

$$a_{n-k+1} < \sum_{j=2}^n b_j < a_{n-k}, \quad (3)$$

где $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_m$, $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$, $a_0 = b_0 = +\infty$, $a_{m+1} = b_{n+1} = 0$. Будем предполагать, что при $k \neq n-1$ для многогранника $M(a, b)$ выполняются условия (2), так как случай, когда для многогранника $M(a, b)$ выполняются условия (3), сводится к первому, если перейти от многогранника $M(a, b)$ к многограннику $M(b, a)$.

Пусть $0 \leq k \leq n-1$. Тогда для любой вершины $x = \|x_{ij}\|_{m \times n}$ многогранника $M(a, b)$ из условий (1) и (2) следуют неравенства $x_{ij} > 0$, $j = \overline{1, n-k}$. Поэтому существует вершина $z = \|z_{ij}\|_{m \times n} \in M(a, b)$ с компонентами $z_{1j} = b_j$, $j = \overline{1, n}$, $j \neq n-k$, $z_{1n-k} = b_{n-k} - \sum_{i=2}^m a_i$, $z_{in-k} = a_i$, $i = \overline{2, m}$, $z_{ij} = 0$ для остальных индексов.

Докажем, что любая вершина x многогранника $M(a, b)$ находится от z на расстоянии не более, чем $m+k-1$. С этой целью для вершины x многогранника $M(a, b)$ определим множество $T(x) = \{(i, j) \mid (i, j) \in \{2, m\} \times \{1, n-k-1\}, x_{ij} > 0\}$, если $0 \leq k \leq n-2$ и множества $R(x) = \{i \mid i \in \{2, m\}, \exists j_i \in \{1, n-k\}, x_{ij_i} > 0\}$, $S(x) = \{(i, j) \mid (i, j) \in R(x) \times$

$\times \overline{\{n-k+1, n\}}, x_{ij} > 0\}$, $H(x) = \{(i, j) \mid (i, j) \in (\overline{\{2, m\}} \setminus R(x)) \times \overline{\{n-k+1, n\}}, x_{ij} > 0\}$, если $0 \leq k \leq n-1$.

Сначала покажем, что расстояние $r(x, y)$ между вершинами x и y многогранника $M(a, b)$ удовлетворяет неравенству

$$r(x, y) \leq |T(x)|^*, \quad (4)$$

где вершина $y = \|y_{ij}\|_{m \times n} \in M(a, b)$ имеет вид: $y_{ij} = b_j, j = \overline{1, n-k-1}$, $y_{1n-k} = x_{1n-k} - \sum_{(s, t) \in T(x)} x_{st}$, $y_{in-k} = \sum_{i=1}^{n-k} x_{it}, i = \overline{2, m}, y_{ij} = 0 \forall (i, j) \in T(x)$, $y_{ij} = x_{ij}$ для остальных индексов.

Действительно, если $T(x) = \emptyset$, то $r(x, y) = 0$, так как $x = y$. Пусть $(i_1, j_1) \in T(x) \neq \emptyset$. Отсюда, учитывая, что в строке с любым номером $i, i = \overline{2, m}$, среди элементов $x_{ij}, j = \overline{1, n-k}$, только один может оказаться положительным, получаем $x_{i_1 n-k} = 0$. Следовательно, найдется вершина $x' \in M(a, b)$ с компонентами

$$x'_{ij} = \begin{cases} x_{ij} - x_{i_1 j_1}, & \text{если } (i, j) \in \{(i_1, j_1), (1, n-k)\}, \\ x_{ij} + x_{i_1 j_1}, & \text{если } (i, j) \in \{(1, j_1), (i_1, n-k)\}, \\ x_{ij} & \text{для остальных индексов.} \end{cases}$$

Ясно, что $r(x, x') = 1$ и $T(x') = T(x) \setminus \{(i_1, j_1)\}$. Поэтому за $|T(x)|$ подобных преобразований мы переходим от вершины x к вершине y , и, значит, выполняется неравенство (4).

Аналогичным образом доказываем, что

$$r(y, p) \leq |S(x)|, \quad (5)$$

где вершина $p = \|p_{ij}\|_{m \times n} \in M(a, b)$ имеет вид: $p_{1n-k} = y_{1n-k} - \sum_{(s, t) \in S(x)} y_{st}$, $p_{1j} = y_{1j} + \sum_{i \in R(x)} y_{ij}, j = \overline{n-k+1, n}, p_{in-k} = a_i \forall i \in R(x), p_{ij} = 0 \forall (i, j) \in S(x)$, $p_{ij} = y_{ij}$ для остальных индексов.

Покажем теперь, что

$$r(p, z) \leq |H(x)|. \quad (6)$$

В самом деле, если $H(x) = \emptyset$, то $r(p, z) = 0$, поскольку $p = z$. Пусть $H(x) \neq \emptyset$. Тогда $\overline{\{2, m\}} \setminus R(x) \neq \emptyset$. Возьмем произвольный индекс $i_1 \in \overline{\{2, m\}} \setminus R(x)$. Нетрудно убедиться, что пара $(i_1, n-k)$ образует с некоторыми парами из множества $\{(i, j) \mid i \in \overline{\{1, m\}} \setminus R(x), j \in \overline{\{n-k, n\}}, p_{ij} > 0\}$ цикл: $(i_1, n-k), (1, n-k), (1, j_1), (i_2, j_1), (i_2, j_2), \dots, (i_s, j_s), (i_1, j_s)$. Построим вершину $p' \in M(a, b)$, компоненты которой определяют следующим образом:

$$p'_{ij} = \begin{cases} p_{ij} - \delta, & \text{если } (i, j) \in \{(1, n-k), (i_2, j_1), (i_3, j_2), \dots, (i_s, j_{s-1}), (i_1, j_s)\}, \\ p_{ij} + \delta, & \text{если } (i, j) \in \{(i_1, n-k), (1, j_1), (i_2, j_2), \dots, (i_s, j_s)\}, \\ p_{ij} & \text{для остальных индексов,} \end{cases}$$

где $\delta = \min(x_{1n-k}, x_{i_2 j_1}, x_{i_3 j_2}, \dots, x_{i_s j_{s-1}}, x_{i_1 j_s})$. Понятно, что $r(p, p') = 1$ и $p'_{i_1 n-k} > 0$, причем $|H(p')| = |H(x)| - 1$. Поэтому, повторяя рассуждения, приведенные выше, заключаем, что неравенство (6) верно.

Из неравенств (4)–(6) следует, что $r(x, z) \leq |T(x)| + |S(x)| + |H(x)|$. Отсюда, принимая во внимание очевидное равенство $|T(x)| + |S(x)| + |H(x)| = m + k - 1$, находим, что $r(x, z) \leq m + k - 1$.

Для завершения доказательства этой теоремы достаточно показать, что радиус невырожденного транспортного многогранника $M(a_k, b_k)$ порядка $m \times n, 2 \leq m \leq n, n \geq 3$ с $(m-1)n + k$ гранями ($0 \leq k \leq n-2$), определенного векторами

$$a_k = ((n-k-1)((m-1)n+1) + k + 1, \underbrace{n, n, \dots, n}_{m-1}),$$

* Напомним, что через $|T|$ обозначается число элементов конечного множества T .

$$b_k = ((m-1)n+1, \dots, (m-1)n+1, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_k),$$

не меньше числа $m+k-1$. Действительно, в силу целочисленности многогранника $M(a_k, b_k)$ и в связи с тем, что $b_j=1, j=n-k+1, n$, заключаем, что всякий j -й столбец ($n-k+1 \leq j \leq n$) любой матрицы x , представляющей вершину многогранника $M(a_k, b_k)$, содержит только одну положительную компоненту и она, как нетрудно видеть, может находиться на любом месте. Отсюда, учитывая, что для каждого $i, 2 \leq i \leq m$, в позициях $(i, 1), (i, 2), \dots, (i, n-k)$ может находиться только одна положительная компонента вершины x , причем на любом месте, получаем, что для всякой вершины x многогранника $M(a_k, b_k)$ существует такая вершина $y(x) \in M(a_k, b_k)$, число общих положительных компонент которых равно $n-k$. Следовательно, $r(M(a_k, b_k)) \leq m+k-1$. Теорема доказана.

Воспользовавшись теоремой 3 [3], можно получить следующие результаты: 1) максимальный радиус транспортного многогранника порядка $m \times n$, $\min(m, n) \geq 3$, $\max(m, n) \geq 4$, равен числу $m+n-1$; 2) у всякого невырожденного транспортного многогранника порядка $m \times n$, $\min(m, n) \geq 3$, $\max(m, n) \geq 5$, имеется по меньшей мере $\binom{mn-2m-2n+2}{t+1} (mn-m-n-t)$ -граней, где $0 \leq t \leq mn-2m-2n+1$, радиус каждой из которых совпадает с радиусом самого многогранника.

Из последнего утверждения на основании следствия 7.5 гл. VI [4] следует, что при взаимно простых m и n радиус всякой грани транспортного многогранника порядка $m \times n$, $\min(m, n) \geq 3$, $\max(m, n) \geq 5$, с максимальным числом вершин совпадает с радиусом самого многогранника и равен числу $m+n-1$.

2. К оценке сложности метода потенциалов. Число итераций, необходимых для решения транспортной задачи линейного программирования методом потенциалов [5], существенно зависит от выбора как стартовой (начальной) вершины, так и переменной, которая вводится в базисное множество. Удачный их выбор может значительно сократить количество итераций и тем самым ускорить решение задачи.

В большинстве случаев выбор переменной, которая вводится в базисное множество, осуществляется согласно правилу φ (см., например, [6, 7]). В связи с этим возникает вопрос: верно ли, что количество итераций метода потенциалов нахождения минимума линейной функции $F(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$ на классе невырожденных транспортных многогранников порядка $m \times n$, $2 \leq m \leq n$, $n \geq 3$, с $(m-1)n+k$ гранями ($1 \leq k \leq n-1$) не превосходит максимального радиуса рассматриваемых многогранников, если в качестве начальной (стартовой) вершины взять вершину z , построенную при доказательстве теоремы, а выбор переменной, которая вводится в базисное множество, на каждой итерации осуществлять по правилу φ ? Отрицательный ответ на этот вопрос для $m=3, n=4, k=2$ дает следующий

Пример 1. Найти минимум функции $F_1(x) = 7x_{11} + 7x_{12} + 7x_{13} + 7x_{14} + 6x_{21} + 7x_{22} + 5x_{23} + 2x_{24} + 4x_{31} + 7x_{32} + 3x_{33} + x_{34}$ на транспортном многограннике $M(a^1, b^1)$ порядка 3×4 , определенного векторами $a^1 = (26, 4, 4)$ и $b^1 = (18, 10, 5, 1)$.

Легко видеть, что многогранник $M(a^1, b^1)$ является невырожденным, а число его граней равно 10. Непосредственной проверкой убеждаемся, что радиус многогранника $M(a^1, b^1)$ максимален и равен числу 4. В качестве стартовой вершины многогранника $M(a^1, b^1)$ принимается вершина

$$z = \begin{vmatrix} 18 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

В то же время метод потенциалов, базирующийся на правиле φ , за 5 итераций строит вершину многогранника $M(a^1, b^1)$, в которой достигается минимум функции $F_1(x)$.

Однако следует заметить, что метод потенциалов позволяет, отправляясь от вершины z , построить решение данной задачи за 4 итерации, если выбор переменной, которая вводится в базисное множество, на каждой итерации осуществлять согласно следующему правилу ψ : переменная, подлежащая включению в базис обеспечивает наибольшее уменьшение целевой функции.

В заключение приведем пример транспортной задачи, в которой использование правила φ дает лучший результат по сравнению с правилом ψ .

Пример 2. Найти минимум функции $F_2(x) = 8x_{11} + 8x_{12} + 8x_{13} + 8x_{14} + 4x_{21} + 8x_{22} + 3x_{23} + 2x_{24} + 4x_{31} + 8x_{32} + 5x_{33} + 3x_{34}$ на невырожденном транспортном многограннике $M(a^2, b^2)$ порядка 3×4 с 10 гранями, определенными векторами $a^2 = (35, 9, 6)$ и $b^2 = (20, 20, 7, 3)$.

В самом деле, отправляясь от вершины

$$z = \begin{vmatrix} 20 & 5 & 7 & 3 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

метод потенциалов, основываясь на правиле $\psi(\varphi)$, за 5 (в лучшем случае за 3, а в худшем — за 4) итераций строит вершину многогранника $M(a^2, b^2)$, в которой достигается минимум функции $F_2(x)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Харари Ф., Палмер Э. Перечисление графов.— М., 1977.
2. Кравцов М. К., Емеличев В. А.— Весті АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук, 1976, № 5, с. 97.
3. Кравцов М. К.— Докл. АН СССР, 1983, т. 270, № 2, с. 278.
4. Емеличев В. А., Ковалев М. М., Кравцов М. К. Многогранники, графы, оптимизация.— М., 1981.
5. Канторович Л. В., Гавурин М. К.— В сб.: Проблемы повышения эффективности работы транспорта. М., 1949, с. 110.
6. Данциг Дж. Линейное программирование, его применения и обобщения. М., 1966.
7. Гольштейн Е. Г., Юдин Д. Б. Задачи линейного программирования транспортного типа.— М., 1969.

Краткие сообщения

УДК 517.926

Н. Ф. НАУМОВИЧ

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ СИСТЕМЫ С ЗАКОНОМ ПЛОЩАДЕЙ

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$z' = h(z, \tau), \quad (z, \tau) \in ZT, \quad (1)$$

где $' = d/d\tau$, а символом ZT обозначена область из R^{n+m+1} .

Функцию $h: ZT \rightarrow R^{n+m}$ предполагаем такой, что любая начальная задача

$$z|_{\tau=\sigma} = \xi, \quad (\xi, \sigma) \in ZT \quad (2)$$

для уравнения (1) однозначно разрешима в дифференцируемых функциях (см., например, [1, с. 162]). Выделим, как и в [2], основные координаты $x_k = z_k$, $k=1, 2, \dots, n$, дополнительные координаты $y_j = z_{n+j}$, $j=1, 2, \dots, m$, а также временную координату τ .

В соответствии с таким распределением координат в R^{n+m+1} функцию h можно представить в виде $h = (f, g)$ и систему (1) записать в форме

$$\begin{cases} x' = f(x, y, \tau) \\ y' = g(x, y, \tau), \end{cases} \quad (x, y, \tau) \in ZT. \quad (3)$$

Введем новую независимую переменную t с помощью уравнения $d\tau/dt = 1$ (см., например, [3, с. 15—16]). Тогда система (1) примет вид

$$dz/dt = h(z, \tau), \quad d\tau/dt = 1, \quad (z, \tau) \in ZT. \quad (4)$$

Отнесем τ к дополнительным координатам и для системы (4) получим n основных координат $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $m+1$ дополнительных $(y, \tau) = (y_1, y_2, \dots, y_m, \tau)$.

Полагая $u = (z, \tau)$, $H = (f, g, 1) = (h, 1)$, запишем систему (4) в виде

$$du/dt = H(u), \quad u \in ZT. \quad (5)$$

Применив, согласно [2], критерий закона площадей к уравнению (5), предполагая дифференцируемость f , приходим к критерию закона площадей для системы (3), а тем самым, и для уравнения (1), а именно: имеет место следующая

Теорема. Для наличия закона площадей у уравнения (1), где f — дифференцируемая функция, необходимо и достаточно выполнение тождества

$$\begin{aligned} & \langle \partial f / \partial z(z, \tau), f(z, \tau) \rangle \langle x, x \rangle + \langle \partial f / \partial \tau, f(z, \tau) \rangle \langle x, x \rangle - \\ & - \langle x, f(z, \tau) \rangle \langle x, \partial f / \partial z(z, \tau) \rangle - \langle x, f(z, \tau) \rangle \langle x, \partial f / \partial \tau \rangle = \\ & = 0, \quad (z, \tau) \in ZT. \end{aligned} \quad (6)$$

(Символ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ означает скалярное произведение). В частности, применение (6) к системе

$$\begin{cases} x' = p(x, y, z, \tau) \\ y' = q(x, y, z, \tau) \\ z' = r(x, y, z, \tau), \end{cases} \quad (7)$$

где p, q, r — скалярные функции; x, y, z, τ — скалярные переменные, из которых x, y — основные, приводит к тождеству

$$yrdp/\partial x + yqdp/\partial y + yr\partial p/\partial z - xrdq/\partial x - xqdp/\partial y - xrdq/\partial z + yd\partial p/\partial \tau - xdp/\partial \tau = 0, (x, y, z, \tau) \in ZT. \quad (8)$$

Приведенный критерий позволяет выделить классы систем заданного вида, обладающие законом площадей. Например, среди систем вида

$$\begin{cases} x' = a_1x + a_2y + f(\tau) \\ y' = b_1x + b_2y + g(\tau), \end{cases}$$

где a_1, a_2, b_1, b_2 — постоянные; f, g — дифференцируемые функции, законом площадей обладают системы

$$\begin{cases} x' = \alpha x + \mu \exp(-\alpha\tau) \\ y' = \alpha y + \nu \exp(-\alpha\tau) \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x' = \alpha x + by + f(\tau) \\ y' = cx - \alpha y + g(\tau), \end{cases}$$

где $\alpha, \mu, \nu, a, b, c$ — произвольные постоянные, а f и g являются решениями системы линейных уравнений

$$\begin{cases} f' = -\alpha f - bg \\ g' = -\alpha g + cf. \end{cases}$$

Аналогичным образом, среди систем

$$\begin{cases} x' = a_1(\tau)x + a_2(\tau)y \\ y' = b_1(\tau)x + b_2(\tau)y \end{cases}$$

законом площадей обладают системы

$$\begin{cases} x' = \psi(\tau)x + c_2\nu(\tau)y \\ y' = c_1\nu(\tau)x + (\varphi(\tau) + \psi(\tau))y, \end{cases}$$

где $\psi(\tau)$ — произвольная функция, а $\varphi(\tau) = \left(c + \int_{\tau_0}^{\tau} \exp\left(-2 \int_{\tau_0}^{\xi} \psi(\xi) d\xi\right) d\tau \right)^{-1} \times$

$\times \exp\left(-2 \int_{\tau_0}^{\tau} \psi(\tau) d\tau\right), \nu(\tau) = \exp\left(-\int_{\tau_0}^{\tau} (2\psi(\tau) + \varphi(\tau)) d\tau\right).$

Отметим, что некоторые из полученных систем могут быть и вырожденными ($x'y - y'x$ — тождественная постоянная) (см. [2]). Например, система $x' = \alpha x, y' = \alpha y$ ($\mu = 0, \nu = 0$) вырождена.

ЛИТЕРАТУРА

1. Богданов Ю. С. Лекции по дифференциальным уравнениям. — Минск, 1977.
2. Богданова М. Ю., Наумович Н. Ф. — Дифференц. уравнения, 1983, т. 19, № 9, с. 1613.
3. Немецкий В. В., Степанов В. В. Качественная теория дифференциальных уравнений. — М.—Л., 1949.

Поступила в редакцию
29.06.82.

Кафедра высшей математики

УДК 517.925.12

КАСИМ МУХАМЕД АЛЬ-ХАЙДЕР

ОБ ИЗОХРОННОСТИ ГАМИЛЬТОНОВЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ С ПОЛИНОМАМИ 4-й СТЕПЕНИ

В работе [1] проблема изохронности гамильтоновых систем с полиномами 3-й степени решена полностью. В настоящей заметке рассматривается система Гамильтона вида

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y - A_{20}x^2 - A_{11}xy - 3A_{02}y^2 - A_{30}x^3 - A_{21}x^2y - A_{12}xy^2 - \\ &\quad - A_{40}x^4 - A_{31}x^3y - A_{22}x^2y^2 - A_{13}xy^3 - A_{04}y^4, \\ \dot{y} &= x + 3B_{20}x^2 + 2A_{20}xy + \frac{1}{2} A_{11}y^2 + B_{30}x^3 + 3A_{30}x^2y + A_{21}xy^2 + \frac{1}{3} A_{12}y^3 \\ &\quad + B_{40}x^4 + 4A_{40}x^3y + \frac{3}{2} A_{31}x^2y^2 + \frac{2}{3} A_{22}xy^3 + \frac{1}{4} A_{13}y^4. \end{aligned} \quad (1)$$

Теорема. Для того чтобы система (1) была изохронной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялась одна из следующих серий условий:

$$1. A_{20} = \left(\frac{\alpha^2}{\beta^2} - 2\right) A_{02}, \quad A_{11} = 2\left(\frac{2\alpha}{\beta} - \frac{\beta}{\alpha}\right) A_{02}, \quad B_{20} = -\frac{\alpha}{\beta} A_{02}, \quad A_{30} = \frac{2\alpha}{\beta^3} A_{02}^2, \quad A_{21} = \frac{6}{\beta^2} A_{02}^2, \quad A_{12} = \frac{6}{\alpha\beta} A_{02}^2, \quad A_{03} = \frac{2}{\alpha^2} A_{02}^2, \quad B_{30} = 2\frac{\alpha^2}{\beta^4} A_{02}^2, \quad \text{где } \alpha^2 + \beta^2 = 1, \quad \alpha \cdot \beta \neq 0,$$

$$2. A_{02} = A_{11} = B_{20} = A_{30} = A_{21} = A_{12} = A_{03} = 0, \quad B_{30} = 2A_{20}^2,$$

$$3. A_{02} = A_{20} = B_{20} = A_{30} = A_{21} = A_{12} = B_{30} = 0, \quad A_{03} = \frac{1}{2} A_{11}^2, \quad \text{причем } A_{ij} = B_{40} = 0, \quad i + j = 4.$$

Доказательство. Достаточность доказана в [1]. Докажем необходимость. Пусть система (1) имеет в точке $O(0, 0)$ изохронный центр, тогда, согласно теореме 10 [2], начало координат для системы (1) должно быть единственной особой точкой в комплексной области.

Оказывается, что всегда существует такое вещественное число α_0 , что замена переменных $x_1 = \alpha_0 x + \sqrt{1 - \alpha_0^2} y$, $y_1 = -\sqrt{1 - \alpha_0^2} x + \alpha_0 y$, где $-1 \leq \alpha_0 \leq 1$, приводит систему (1) к виду

$$\dot{x}_1 = -y_1 - a_{20}x_1^2 - a_{11}x_1y_1 - 3a_{02}y_1^2 - a_{30}x_1^3 - a_{21}x_1^2y_1 - a_{12}x_1y_1^2 - a_{03}y_1^3 - a_{40}x_1^4 - a_{31}x_1^3y_1 - a_{22}x_1^2y_1^2, \quad (2)$$

$$\dot{y}_1 = x_1 + 3b_{20}x_1^2 + 2a_{20}x_1y_1 + \frac{1}{2}a_{11}y_1^2 + b_{30}x_1^3 + 3a_{30}x_1^2y_1 + a_{21}x_1y_1^2 + \frac{1}{3}a_{12}y_1^3 + b_{40}x_1^4 + 4a_{40}x_1^3y_1 + \frac{3}{2}a_{31}x_1^2y_1^2 + \frac{2}{3}a_{22}x_1y_1^3.$$

При рассмотрении поведения траекторий системы (2) на круге Пуанкаре легко видеть, что система (2) имеет, по крайней мере, одну особую точку на экваторе сферы Пуанкаре, т. е. на бесконечности.

Учитывая вышесказанное и формулу о сумме индексов из [3], приходим к тому, что сумма индексов всех особых точек на экваторе сферы Пуанкаре должна быть равна нулю.

Вычисляя методом векторных полей [4] индексы всех особых точек на бесконечности и учитывая изложенные рассуждения и первое необходимое условие изохронности системы (2)

$$2a_{20}^2 + 10(b_{20}^2 + a_{02}^2) + \frac{1}{2}a_{11}^2 + 4a_{20}a_{02} + 2a_{11}b_{20} - \frac{2}{3}a_{21} - b_{30} - a_{03} = 0, \quad (3)$$

получим следующий результат: если бы один из коэффициентов b_{40} , a_{40} , a_{31} , a_{22} был бы отличен от нуля, то система (2) была бы неизохронной. В частности, для изохронности системы (1) необходимо, чтобы $B_{40} = A_{40} = A_{31} = A_{22} = A_{13} = A_{04} = 0$.

При этом система (1) примет вид, который рассматривался в работе [1]. Последний факт завершает доказательство необходимости.

Следствие. Если в системе (1) хотя бы один из коэффициентов A_{40} , B_{40} , A_{31} , A_{13} , A_{22} , A_{04} не обращается в нуль, то система (1) является неизохронной.

З а м е ч а н и е. При доказательстве необходимости теоремы возникают системы, которые имеют единственную особую точку $O(0, 0)$, однако они неизохронны. Так, например, рассмотрим систему вида

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -y - 3axy - 3a^2x^2y - a^3x^3y, \\ \dot{y} &= x + \frac{3}{2}ay^2 + 3a^2xy^2 + \frac{3}{2}a^3x^2y^2. \end{aligned} \quad (4)$$

Система (4) имеет в начале координат неизохронный центр, так как для нее условие (3) не выполняется при $a \neq 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аль-Хайдер К. М.—Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1983, № 2, с. 63.
2. Амелькин В. В.—Дифференц. уравнения, 1977, т. 13, № 6, с. 979.
3. Анри Пуанкаре. О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями.— М., 1947, с. 47.
4. Красносельский М. А., Перов А. И., Повалоцкий А. И., Забрейко П. П. Векторные поля на плоскости.— М., 1963.

Поступила в редакцию
22.12.82.

Кафедра дифференциальных уравнений

УДК 517.98

В. Т. ЕРОФЕЕНКО

**СПЕКТРАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ОПЕРАТОРОВ
СИММЕТРИЧНОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ И ДИВЕРГЕНЦИИ**

Рассмотрим класс S_n^m симметричных тензоров $u(x)$ валентности m над евклидовым пространством E_n с достаточно гладкими коэффициентами

$$u(x) = a^{i_1 \dots i_m}(x) dx_{i_1} \otimes dx_{i_2} \otimes \dots \otimes dx_{i_m}, \quad (1)$$

где $a^{i_1 \dots i_m}$ — инварианты относительно перестановок индексов i_1, i_2, \dots, i_m , $x = (x_1 \dots x_n)$, повторяющиеся индексы означают суммирование от 1 до n .

Определим оператор симметричного дифференцирования d ,

$$du = \frac{\partial a^{i_1 \dots i_m}(x)}{\partial x_{i_{m+1}}} S_{m+1}(dx_{i_1} \otimes \dots \otimes dx_{i_m} \otimes dx_{i_{m+1}}), \quad (2)$$

преобразующий S_n^m в S_n^{m+1} [1, 2] (S_k — оператор симметризации [2]) и оператор дивергенции

$$\operatorname{div} u = \frac{\partial a^{i_1 \dots i_m}(x)}{\partial x_{i_m}} dx_{i_1} \otimes \dots \otimes dx_{i_{m-1}}, \quad (3)$$

преобразующий S_n^m в S_n^{m-1} .

Установим взаимно однозначное соответствие между симметричными тензорами (1) и однородными полиномами по переменным y_1, \dots, y_n [3]

$$u \leftrightarrow \hat{u} = a^{i_1 \dots i_m}(x) y_{i_1} \dots y_{i_m}, \quad du \leftrightarrow d\hat{u} = \frac{\partial a^{i_1 \dots i_m}(x)}{\partial x_{i_{m+1}}} y_{i_1} \dots y_{i_m} y_{i_{m+1}}. \quad (4)$$

$$\operatorname{div} u \leftrightarrow \operatorname{div} \hat{u} = \frac{\partial a^{i_1 \dots i_m}(x)}{\partial x_{i_m}} y_{i_1} \dots y_{i_{m-1}}.$$

Введем оператор ∂ , преобразующий S_n^m в S_n^{m+1} $\partial u = S_{m+1}(Y \otimes \operatorname{div} u)$, $\partial u \leftrightarrow \partial \hat{u} = \hat{Y} \operatorname{div} \hat{u}$, где $Y = \sum_{i=1}^n dx_i \otimes dx_i$, $Y \leftrightarrow \hat{Y} = \sum_{i=1}^n y_i^2$.

Разложим пространство S_n^m на подпространства $H_i^m = P_i^{(m)}(S_n^m)$, инвариантные относительно группы $SO(n, R)$ [4], $i = 0, 1, \dots, N_m$, $N_m = \left[\frac{m}{2} \right]$,

$$P_i^{(m)} P_j^{(m)} = \delta_{ij} P_i^{(m)}, \quad \sum_{i=0}^{N_m} P_i^{(m)} = E. \quad (5)$$

Для операторов проектирования $P_i^{(m)}$ имеем [4]

$$P_k^{(m)}(\hat{u}) = \sum_{p=k}^{N_m} a_{km}^p B_p(\hat{u}), \quad B_p(\hat{u}) = \sum_{k=p}^{N_m} b_{pm}^k P_k^{(m)}(\hat{u}), \quad (6)$$

$$\text{где } a_{km}^p = \frac{(-1)^{p-k} (v-2k-1) \Gamma(v-k-p-1)}{4^p k! (p-k)! \Gamma(v-k)}, \quad b_{pm}^k = \frac{4^p k! \Gamma(v-k)}{(k-p)! \Gamma(v-k-p)},$$

$$B_p = \widehat{Y}^p \Delta^p, \quad v = \frac{n}{2} + m.$$

Оператору $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial y_i^2}$ соответствует оператор следа tr [3]: $\Delta \widehat{u} \leftrightarrow \leftrightarrow m(m-1) \text{tr } u$.

Лемма. Имеет место коммутационное соотношение для операторов d и B_k ($k=0, 1, \dots$)

$$d(B_k u) = B_k(du) - 2kmY \circ B_{k-1} \text{div } u. \quad (7)$$

Доказательство. Докажем формулу

$$d(\Delta^k \widehat{u}) = \Delta^k(d\widehat{u}) - 2km\Delta^{k-1} \text{div } \widehat{u}. \quad (8)$$

Учитывая (4),

$$\begin{aligned} \Delta^k(d\widehat{u}) &= \Delta^{k-1} \left[\frac{\partial a^{i_1 \dots i_m}(x)}{\partial x_{i_{m+1}}} \Delta(y_{i_1} \dots y_{i_m} y_{i_{m+1}}) \right] = \\ &= \Delta^{k-1} \left\{ \frac{\partial a^{i_1 \dots i_m}(x)}{\partial x_{i_{m+1}}} \left[y_{i_{m+1}} \Delta(y_{i_1} \dots y_{i_m}) + 2 \frac{\partial}{\partial y_{i_{m+1}}} (y_{i_1} \dots y_{i_m}) \right] \right\} = \\ &= \Delta^{k-1} \left\{ \frac{\partial a^{i_1 \dots i_m}(x)}{\partial x_{i_{m+1}}} y_{i_{m+1}} \Delta(y_{i_1} \dots y_{i_m}) + 2 \frac{\partial}{\partial x_{i_{m+1}}} [a^{i_1 \dots i_m}(x) y_{i_2} \dots \right. \\ &\quad \left. y_{i_m} + a^{i_1 i_{m+1} i_3 \dots i_m}(x) y_{i_1} y_{i_3} \dots y_{i_m} + \dots + a^{i_1 \dots i_{m+1}}(x) y_{i_1} \dots y_{i_{m-1}}] \right\} = \\ &= \Delta^{k-1} \left[\frac{\partial a^{i_1 \dots i_m}(x)}{\partial x_{i_{m+1}}} y_{i_{m+1}} \Delta(y_{i_1} \dots y_{i_m}) \right] + 2m \Delta^{k-1} \text{div } \widehat{u} = \dots \\ &= \Delta^{k-2} \left[\frac{\partial a^{i_1 \dots i_m}(x)}{\partial x_{i_{m+1}}} y_{i_{m+1}} \Delta^2(y_{i_1} \dots y_{i_m}) \right] + 4m \Delta^{k-1} \text{div } \widehat{u} = \dots \\ &= \frac{\partial a^{i_1 \dots i_m}(x)}{\partial x_{i_{m+1}}} \Delta^k(y_{i_1} \dots y_{i_m}) y_{i_{m+1}} + 2mk \Delta^{k-1} \text{div } \widehat{u} = \\ &= d(\Delta^k \widehat{u}) + 2mk \Delta^{k-1} \text{div } \widehat{u}. \end{aligned}$$

Получена формула (8). Умножая (8) на \widehat{Y}^k и переходя от полиномов к симметричным тензорам, получим соотношение (7).

Теорема. Имеет место спектральное разложение оператора ∂ относительно оператора симметричного дифференцирования d

$$P_s^{(m+1)} \partial P_k^{(m)}(\omega) = \lambda_{km}^s P_s^{(m+1)} dP_k^{(m)}(\omega), \quad \omega \in S_n^m, \quad (9)$$

где $\lambda_{km}^s = \frac{1}{m} [s(n+2m-2s) - k(n+2m-2k-2)]$, $s=0, 1, \dots, N_{m+1}$, $k=0, \dots, N_m$.

Доказательство. Из (7) при $k=1$

$$d(B_1 u) = B_1(du) - 2m \text{div } u. \quad (10)$$

Применим к (10) оператор $P_s^{(m+1)}$ и положим $u = P_k^{(m)} \omega$, тогда, учитывая второе соотношение (6) и ортогональность (5), получим (9).

Приложение. Пусть $\{t^{ij}\}$, $\{\varepsilon^{ij}\}$ — компоненты тензоров напряжений и деформаций, $\{u^i\}$ — компоненты вектора перемещений. Обобщенный закон Гука для изотропного тела описывается соотношением [5]

$$t^{ij} = 2\mu \varepsilon^{ij} + \lambda \delta_{ij} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u^i}{\partial x_i}, \quad \lambda, \mu - \text{const}. \quad (11)$$

Представим указанные тензоры в форме (1) $t = \sum_{i,j=1}^3 t^{ij} dx_i \otimes dx_j$, $\varepsilon = \sum_{i,j=1}^3 \varepsilon^{ij} dx_i \otimes dx_j$, $u = \sum_{i=1}^3 u^i dx_i$, $Y = \sum_{i,j=1}^3 \delta_{ij} dx_i \otimes dx_j$, тогда соотношение (11) примет вид $t = 2\mu\varepsilon + \lambda Y \operatorname{div} u$.

Учитывая, что $\varepsilon = du$ [2], получим тензорное дифференциальное уравнение относительно перемещений u

$$2\mu du + \lambda \partial u = t. \quad (12)$$

Применим к (12) оператор $P_s^{(2)}$ ($s = 0, 1$), тогда $2\mu P_s^{(2)}(du) + \lambda P_s^{(2)}(\partial u) = t_s$, $t_s \equiv P_s^{(2)}(t)$.

Воспользуемся формулой (9) при $m = 1$, $n = 3$, $k = 0$, откуда

$$P_s^{(2)}(du) = \frac{t_s}{2\mu + \lambda \lambda_{0,1}^s}.$$

Суммируя по s , получим в силу второго равенства (5) тензорное уравнение $du = b$, где $b = \frac{t_0}{2\mu} + \frac{t_1}{2\mu + 3\lambda}$, эквивалентное (12). Условие $\delta b = 0$ [1] является необходимым и достаточным условием разрешимости уравнения (12).

ЛИТЕРАТУРА

1. Ерофеев В. Т.— Рукопись деп. в ВИНТИ от 19.01.79, № 257—79.
2. Ерофеев В. Т., Родов А. М.— Весті АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук, 1975, № 3, с. 47.
3. Hannabuss K. C.— J. Inst. Math. and Apl., 1974, vol. 14, № 1, p. 83.
4. Plebanski J.— Report. Math. Phys., 1970, vol. 1, № 2, p. 87.
5. Лурье А. И. Теория упругости.— М., 1970.

Поступила в редакцию
22.12.82.

Кафедра уравнений математической физики

УДК 517.544

Т. Н. ЖОРОВИНА

ОБ ОДНОЙ ТРЕХЭЛЕМЕНТНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ РИМАНА НА ТОРЕ

Рассмотрим прямоугольник $[0, P] \times [-iM, iM]$. Пусть контур L представляет собой отрезок $[0, P]$ вещественной прямой, на котором задано краевое условие

$$\varphi^+(x) = a\varphi^-(x) + b\overline{\varphi^-(x)}, \quad x \in L. \quad (1)$$

Требуется найти все аналитические двоякопериодические с периодами P , $2iM$ функции $\varphi(z)$, H -непрерывно продолжимые на L , где должно выполняться краевое условие (1) ($a, b \in \mathbb{C}$).

Введем вспомогательную вектор-функцию $F(z) = \begin{bmatrix} F_1(z) \\ F_2(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi(z) \\ \overline{\varphi(z)} \end{bmatrix}$. Записывая условие (1) и сопряженное к нему через функцию $F(z)$ и решая полученную систему относительно $F_1^+(x)$ и $F_2^+(x)$, приходим к краевой задаче Римана

$$F^+(x) = AF^-(x), \quad x \in L \quad (2)$$

с постоянной матрицей $A = \frac{1}{a} \begin{bmatrix} |a|^2 - |b|^2 & b \\ -\bar{b} & 1 \end{bmatrix}$ (функция $F(z)$ должна удовлетворять условию симметрии $\overline{F(z)} = IF(z)$, где $I = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$).

Задача (2) решается приведением матрицы A к жордановой нормальной форме. Для этого введем новую неизвестную функцию $\Phi(z)$ по пра-

вилу $F(z) = S\Phi(z)$, где S — некоторая невырожденная матрица. Подставляя $F(z) = S\Phi(z)$ в (2), получаем:

$$\Phi^+(x) = [S^{-1}AS] \cdot \Phi^-(x), \quad x \in L. \quad (3)$$

Матрицу S выбираем таким образом, чтобы матрица задачи (3) $S^{-1}AS$ была жордановой, т. е. чтобы выполнялось условие

$$S^{-1}AS = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ c & \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

где λ_1, λ_2 — собственные значения матрицы A ,

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 + |a|^2 - |b|^2 \pm \sqrt{(1 + |a|^2 - |b|^2)^2 - 4|a|^2}}{2a},$$

а число c равно нулю, если $\lambda_1 \neq \lambda_2$, и равно единице при $\lambda_1 = \lambda_2$. Элементы матрицы S находятся из (4).

В случае $\lambda_1 \neq \lambda_2$ задача (3) равносильна паре скалярных задач Римана

$$\Phi_1^+(x) = \lambda_1 \Phi_1^-(x), \quad x \in L, \quad (5), \quad \Phi_2^+(x) = \lambda_2 \Phi_2^-(x), \quad x \in L. \quad (6)$$

Из теоремы 1 [1] следует, что число $l_1(l_2)$ решений задачи (5) (или (6)) для функций совпадает с числом $l'_1(l'_2)$ решений союзной однородной краевой задачи для дифференциалов. В нашей задаче реализуется особый случай, и для числа $l_1(l_2)$ известна точная оценка: $0 \leq l_1(l_2) \leq 1$.

Используя результаты работ [1, 2], получаем, что при выполнении условий $\lambda_j > 0$, $\frac{P \cdot \ln \lambda_j}{4M\pi} \in Z$ задача (5) или (6) (соответственно) имеет нетривиальное решение вида

$$\Phi_{0j}^+(z) = k_j \exp \left\{ zi \frac{\ln \lambda_j}{2M} \right\}, \quad \Phi_{0j}^-(z) = \frac{k_j}{\lambda_j} \exp \left\{ zi \frac{\ln \lambda_j}{2M} \right\}$$

(k_j — произвольная постоянная). В остальных случаях задача (5) или (6) (соответственно) имеет только тривиальное решение. Случай $\lambda_1 = \lambda_2$ исследуется аналогично.

Возвращаясь к задаче (1) и учитывая условие симметрии, будем иметь следующий результат.

Теорема 1. Если $1 + |a|^2 - |b|^2 = 2 \operatorname{Re} a$, то общее решение задачи (1) есть константа. Если $a \in R$, $1 + a^2 - |b|^2 \neq 2a$,

$$\lambda = \frac{1 + a^2 - |b|^2 + \sqrt{(1 + a^2 - |b|^2)^2 - 4a^2}}{2a}$$

и такое, что выполняются условия $\lambda > 0$, $\frac{P \cdot \ln \lambda}{4M\pi} \in Z$, то задача (1) имеет 2 линейно независимых решения.

В остальных случаях задача (1) имеет только тривиальное решение.

Общее решение задачи (1) в случае, когда $a \in R$, $1 + a^2 - |b|^2 \neq 2a$, $\lambda > 0$, $\frac{P \cdot \ln \lambda}{4M\pi} \in Z$, записывается в виде: $\in Z$,

$$\begin{aligned} \varphi^+(z) &= \alpha \left[(a\lambda - 1) \exp \left\{ iz \frac{\ln \lambda}{2M} \right\} - \frac{b}{\lambda} \exp \left\{ -iz \frac{\ln \lambda}{2M} \right\} \right] + \\ &+ i\beta \left[(a\lambda - 1) \exp \left\{ iz \frac{\ln \lambda}{2M} \right\} + \frac{b}{\lambda} \exp \left\{ -iz \frac{\ln \lambda}{2M} \right\} \right]; \\ \varphi^-(z) &= \alpha \left[\left(a - \frac{1}{\lambda} \right) \exp \left\{ iz \frac{\ln \lambda}{2M} \right\} - b \exp \left\{ -iz \frac{\ln \lambda}{2M} \right\} \right] + \\ &+ i\beta \left[\left(a - \frac{1}{\lambda} \right) \exp \left\{ iz \frac{\ln \lambda}{2M} \right\} + b \exp \left\{ -iz \frac{\ln \lambda}{2M} \right\} \right]. \end{aligned}$$

где α и β — произвольные вещественные постоянные.

ЛИТЕРАТУРА

- Зверович Э. И. — УМН, 1971, т. 26, вып. 1, с. 113.

УДК 517.925

В. Х. КОВАЧЕВ

О ПРИВЕДЕНИИ НЕКОТОРЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С РАЦИОНАЛЬНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ К «ТРЕУГОЛЬНОМУ» ВИДУ ПРИ ПОМОЩИ БИЛИНЕЙНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

В работе [1] рассмотрено невырожденное билинейное преобразование $axu + bxv + cyu + dyv = h, Axu + Bxv + Cyu + Dyv = H,$ (1) или $x = (\gamma u + \delta v) : R(u, v), y = (\alpha u + \beta v) : R(u, v),$ где $R(u, v) = \xi u^2 + \eta uv + \zeta v^2, \xi = [a, c], \eta = [a, d] + [b, c], \zeta = [b, d], \alpha = [a, h], \beta = [b, h], \gamma = [h, c], \delta = [h, d],$ а символом вида $[a, c]$ обозначен определитель

$$\begin{vmatrix} a & c \\ A & C \end{vmatrix}.$$

Заметим, что должно выполняться $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \neq 0, \Delta = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0.$ Ищем такие уравнения

$$\frac{dv}{du} = \frac{\tilde{P}(u, v)}{\tilde{Q}(u, v)}, \tag{2}$$

которые при помощи преобразования (1) можно привести к «треугольному» виду

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x, y)}{Q(x)}. \tag{3}$$

Здесь $\tilde{P}, \tilde{Q}, P, Q$ являются многочленами. Кроме того, считаем, что выполнено одно из следующих двух условий:

а) $Q(x) = B_0 + B_1x, P(x, y) = \sum_{i=0}^n A_{i0}x^i + A_{01}y,$ где n — натуральное число, а $A_{n0} \neq 0;$

б) $Q(x) = \sum_{i=0}^2 B_i x^i, P(x, y) = \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^i A_{i-j, i} x^{i-j} y^j.$

Отметим, что уравнение (3) в случае а) интегрируется в элементарных функциях.

Выясним, какие уравнения вида (2) можно получить из уравнения вида (3), удовлетворяющего одному из условий а) и б), при помощи преобразования (1). Тогда при помощи обратного преобразования эти уравнения можно привести к виду (3).

Преобразованное уравнение (2) имеет вид

$$\frac{dv}{du} = \frac{\tilde{P}(u, v)}{\tilde{Q}(u, v)},$$

где $\tilde{P}(u, v) = \left\{ a(u, v) Q \left(\frac{\gamma u + \delta v}{R(u, v)} \right) - A(u, v) P \left(\frac{\gamma u + \delta v}{R(u, v)}, \frac{\alpha u + \beta v}{R(u, v)} \right) \right\} R^n(u, v),$

$\tilde{Q}(u, v) = \left\{ B(u, v) P \left(\frac{\gamma u + \delta v}{R(u, v)}, \frac{\alpha u + \beta v}{R(u, v)} \right) - b(u, v) Q \left(\frac{\gamma u + \delta v}{R(u, v)} \right) \right\} R^n(u, v).$

Здесь и в дальнейшем n — это точная степень многочлена p (для случая б) $n=2$), $a(u, v), b(u, v), A(u, v), B(u, v)$ — однородные многочлены второй степени, чьи коэффициенты зависят от $\xi, \eta, \zeta, \alpha, \beta, \gamma, \delta.$

Многочлены $P, Q,$ если не произведем сокращения, должны быть суммами однородных многочленов степени $2n+2, 2n+1, \dots, n+2.$ Слагае-

мые высшей степени однородности в числителе и знаменателе должны иметь вид

$$(\xi u^2 + \eta uv + \zeta v^2)^n \sum_{i=0}^2 C_{2-i, i} u^{2-i} v^i$$

и

$$(\xi u^2 + \eta uv + \zeta v^2)^n \sum_{i=0}^2 D_{2-i, i} u^{2-i} v^i$$

соответственно, где $C_{20} = \xi\sigma$, $C_{11} = 2\xi\tau$, $C_{02} = -\zeta\sigma + \eta\tau$, $D_{20} = -\eta\sigma + \xi\tau$, $D_{11} = -2\zeta\sigma$, $D_{02} = -\zeta\tau$, а $\sigma = B_0\alpha - A_{00}\gamma$, $\tau = B_0\beta - A_{00}\delta$.

Пусть слагаемые высшей степени однородности имеют указанный вид. Отсюда определяем сначала ξ , η , ζ , а потом и σ и τ , если выполнены необходимые условия. Если например $\xi \neq 0$, эти условия имеют вид $2C_{02}\xi + 2C_{20}\zeta = C_{11}\eta$, $2D_{20}\xi + 2C_{20}\eta = C_{11}\xi$, $D_{11}\xi + 2C_{20}\zeta = 0$, $2D_{02}\xi + C_{11}\zeta = 0$. Далее, слагаемые $2n+1$ -й степени однородности являются произведениями $(\xi u^2 + \eta uv + \zeta v^2)^{n-1}$ и однородных многочленов третьей степени, чьи коэффициенты зависят от уже известных ξ , η , ζ , как и от γ , δ и от $\varphi = (B_1 - A_{01})\alpha - A_{10}\gamma$, $\psi = (B_1 - A_{01})\beta - A_{10}\delta$, $z = A_{01}\Delta$.

Отсюда можем определить φ , ψ и z , только если выполняются определенные условия, связывающие упомянутые выше коэффициенты и ξ , η , ζ , а отношение $\delta : \gamma$ удовлетворяет уравнению, вообще говоря, второй степени. Таким образом, получаем 0, 1, 2 или бесконечное число допустимых значений для отношения $\frac{\delta}{\gamma} \in R \cup \{\infty\}$.

Если в случае а) $n = 1$, определяем γ и δ так, чтобы их отношение было среди найденных выше допустимых значений. Теперь уже знаем φ , ψ и z . Определяем α и β так, что $\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. Таким образом находим A_{01} . Зная σ , τ , φ , ψ и α , β , γ , δ , можем найти остальные коэффициенты B_0 , B_1 , A_{00} , A_{10} .

Если в случае а) $n \geq 2$, слагаемые степени однородности $2n+2-i$, $2 \leq i \leq n$, должны иметь вид $A_{10}(\xi u^2 + \eta uv + \zeta v^2)^{n-i}[(\eta\gamma - \xi\delta)u^2 + 2\xi\gamma uv + \zeta\delta v^2](\gamma u + \delta v)^i$. Отсюда находим в лучшем случае одно значение отношения $\frac{\delta}{\gamma} \in R \cup \{\infty\}$. Если оно находится среди найденных выше, определяем, как и раньше, коэффициенты уравнения (3).

Рассмотрим теперь случай б). Коэффициенты слагаемых четвертой степени в числителе и знаменателе выражаются через ξ , η , ζ , α , β , γ , δ и A_{20} , A_{11} , A_{02} , B_2 . Если эти коэффициенты и ξ , η , ζ удовлетворяют определенным условиям, а $\delta : \gamma$ является общим корнем двух уравнений, вообще говоря, второй степени и находится среди допустимых значений, найденных выше, для подходящего выбора α и β отсюда можно выразить коэффициенты A_{20} , A_{11} , A_{02} , B_2 . После этого, зная уже α , β , γ , δ , определяем остальные коэффициенты уравнения (3), как выше.

Таким образом, находим совокупность алгебраических условий на коэффициенты уравнения (2), при выполнении которых можем привести его к «треугольному» виду (3), удовлетворяющего одному из условий а) или б), при помощи уже вполне определенного преобразования вида (1). В общем случае надо проверить, можно ли добиться выполнения этих условий путем умножения $\tilde{P}(u, v)$ и $\tilde{Q}(u, v)$ на один и тот же многочлен.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ковачев В. Х.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1983, № 2, с. 45.

Поступила в редакцию
10.01.83.

Кафедра высшей математики ФПМ

НЕЛИНЕЙНЫЕ МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, ОСНОВАННЫЕ НА ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОМ ПРОДОЛЖЕНИИ РЕШЕНИЯ

Применительно к задаче Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$u_i'(t) = f_i(t, u_1(t), \dots, u_m(t)), \quad i=1, 2, \dots, m, \quad (1)$$

рассмотрим несколько примеров новых численных методов, построенных с использованием непосредственно проверяемых точных соотношений

$$\hat{u}_i = u_i + (\lambda_i u_i + a_i) [\exp(\lambda_i \tau) - 1] / \lambda_i + \int_t^{t+\tau} \varphi_i(x) \exp[\lambda_i(t + \tau - x)] dx \quad (2)$$

или

$$\hat{u}_i = u_i + (\lambda_i \hat{u}_i + a_i) [1 - \exp(-\lambda_i \tau)] / \lambda_i + \int_t^{t+\tau} \varphi_i(x) \exp[\lambda_i(t - x)] dx, \quad (3)$$

где $u_i = u_i(t)$, $\hat{u}_i = u_i(t + \tau)$, $\tau > 0$, $\varphi_i(x) = f_i(x, u_1(x), \dots, u_m(x)) - \lambda_i u_i(x) - a_i$, а конкретные значения параметров λ_i и a_i выделенной в явном виде экспоненциальной составляющей решения могут выбираться по-разному.

Подчинив, скажем, выбор λ_i и a_i требованиям $\lambda_i y_i + a_i = \dot{f}_i$ или $\lambda_i \hat{y}_i + a_i = \dot{f}_i$, где $y_i \approx u_i$, $\hat{y}_i \approx \hat{u}_i$, $\dot{f}_i = \dot{f}_i(t, y_1, \dots, y_m)$, $\dot{f}_i = \dot{f}_i(t + \tau, \hat{y}_1, \dots, \hat{y}_m)$, и пренебрегая интегральными членами в равенствах (2), (3), придем соответственно к численным методам первого порядка точности вида

$$\hat{y} = y + \tau R \dot{f} \quad (4) \quad \text{или} \quad \hat{y} = y + \tau Q \dot{f}, \quad (5)$$

где $y = (y_1, \dots, y_m)^T$, $\hat{y} = (\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_m)^T$, $\dot{f} = (\dot{f}_1, \dots, \dot{f}_m)^T$, $\dot{f} = (\dot{f}_1, \dots, \dot{f}_m)^T$, $R = \text{diag} \{\rho_1, \dots, \rho_m\}$, $Q = \text{diag} \{q_1, \dots, q_m\}$, $\rho_i = [\exp(\lambda_i \tau) - 1] / (\lambda_i \tau)$, $q_i = \rho_i \exp(-\lambda_i \tau)$, при этом параметры λ_i остаются свободными.

Укажем сейчас на некоторые способы выбора λ_i , обеспечивающие сохранение в разностном варианте важных свойств, присущих точным решениям специальных классов систем вида (1).

Известно, например, что евклидова норма $\|u\| = \sqrt{(u, \hat{u})}$ любого нетривиального решения системы

$$u'(t) = Au(t) \quad (6)$$

с симметричной отрицательно определенной матрицей A убывает при $t \rightarrow \infty$ и стремится к нулю [1, с. 102]. Оказывается, выбор параметров λ_i , скажем, по правилу

$$\lambda_i = \lambda = (Ay, y) / (y, y), \quad y \neq 0, \quad i=1, 2, \dots, m, \quad (7)$$

сохраняет подобное свойство и для приближенных решений системы (6), полученных при любых конечных значениях шага $\tau > 0$ методом вида (5).

Действительно, в этом случае справедливо равенство $\hat{y} = Sy$, где $S = (E - \tau qA)^{-1}$, $q = \rho \exp(-\lambda \tau)$, $\rho = [\exp(\lambda \tau) - 1] / (\lambda \tau)$, при этом на всех шагах вычислительного процесса положительная величина q отделена от нуля, так как значение λ , вычисленное по правилу (7), не выходит за границы спектра матрицы A . Поэтому спектр симметричной матрицы перехода S принадлежит открытому отрезку $(0, 1)$ и отделен от единицы, что обеспечивает не только убывание евклидовой нормы приближенного решения, но и выход его на нулевое положение равновесия.

Обратим внимание на то, что когда значения λ_i могут выбираться различными для разных составляющих решения (см., например, [2, с. 64 или 3, с. 105]), соответствующая матрица перехода S оказывается, вообще говоря, несимметричной и установление факта принадлежности на каждом шаге вычислений ее спектра открытому отрезку $(0, 1)$ еще не завершает доказательства отмеченного выше свойства.

Убывание евклидовой нормы любого нетривиального решения системы

(6) имеет место и для несимметричных отрицательно определенных матриц A . Сохранение подобного свойства при любых $\tau > 0$ в случае метода (4) обеспечивает, например, выбор λ_i по правилу

$$\lambda_i = \lambda = (Ay, Ay) / (Ay, y), \quad y \neq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (8)$$

В самом деле, при $y \neq 0$ непосредственно находим, что $(\hat{y}, \hat{y}) = (y, y)s$, где $s = 1 + 2\alpha\tau + \beta\tau^2 > 0$, $\alpha = (Ay, y) / (y, y) < 0$, $\beta = (Ay, Ay) / (y, y) > 0$. Легко проверить также, что в рассматриваемом случае $s < 1$. Действительно, так как при любых конечных значениях λ и τ величина ρ положительна, то неравенство $s < 1$ равносильно неравенствам $\rho\tau < -2\alpha/\beta$ или $1/\rho\tau > -\beta/(2\alpha)$. Поскольку $1/\rho\tau > -\lambda$, то при

$$\lambda \leq \beta / (2\alpha) \quad (9)$$

неравенство $s < 1$ заведомо будет выполняться. Сопоставление (8) и (9) доказывает высказанное утверждение.

В заключение заметим, что доказанные применительно к (6) свойства неявного метода (5), (7) имеют место и в варианте (5), (8), в то время как отмеченное здесь свойство явного метода (4), (8) с заменой (8) на (7) уже не сохраняется. Можно указать, однако, другие способы выбора λ_i в (4), которые позволяют не только сохранить это свойство, но и еще более повысить уровень согласованности дифференциальной и соответствующей разностной задач. Отметим также, что рассмотренные методы могут быть перенесены на системы неоднородных уравнений, связанные с (6), обобщены на случай устойчивых систем более общего вида (1), а также использованы при построении соответствующих нелинейных разностных схем в случае граничных задач для дифференциальных уравнений с частными производными.

ЛИТЕРАТУРА

1. Самарский А. А. Теория разностных схем.— М., 1977.
2. Бобков В. В.— Вести. Белорусского ун-та. Сер. I, физ., мат. и мех., 1981, № 3, с. 61.
3. Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырский П. И. Начала теории вычислительных методов. Дифференциальные уравнения.— Минск, 1982.

Поступила в редакцию
24.02.83.

Кафедра вычислительной математики

УДК 519.24

Н. Н. ТРУШ

УМЕНЬШЕНИЕ СМЕЩЕНИЯ ПРИ ОЦЕНИВАНИИ СПЕКТРАЛЬНЫХ ПЛОТНОСТЕЙ

Рассмотрим действительный стационарный случайный процесс x_t , $t \in Z$, со спектральной плотностью $f(\lambda)$, $\lambda \in \Pi = [-\pi, \pi]$. Вопросам построения оценки спектральной плотности $f(\lambda)$, $\lambda \in \Pi$, по наблюдениям за процессом x_t , $t \in Z$, посвящена обширная литература (см., например, библиографический указатель в монографии Д. Бриллинджера [4], а также [1—4]). В настоящей работе рассматривается метод уменьшения смещения оценки спектральной плотности $f(\lambda)$, $\lambda \in \Pi$.

Будем предполагать, что если оценка $\hat{f}_{(k)}^T(\lambda)$ спектральной плотности $f(\lambda)$, построенная по T наблюдениям x_0, \dots, x_{T-1} за процессом x_t , $t \in Z$, является асимптотически несмещенной со смещением, убывающим как T^{-k} , то математическое ожидание такой оценки представимо в виде:

$$M\hat{f}_{(k)}^T(\lambda) = f(\lambda) + \sum_{j=k}^{\infty} \frac{a_j^{(k)}(\lambda)}{T^j}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (1)$$

где $a_j^{(k)}(\lambda)$, $j = k, k+1, \dots$, — некоторые действительные функции, не зависящие от T , а $\lambda \in \Pi$.

Рассмотрим оценку $\hat{f}_{(1)}^T(\lambda)$. При решении практических задач представ-

ляется довольно интересным уменьшение величины смещения $\frac{a_1^{(1)} \lambda}{T}$

оценки $\hat{f}_{(1)}^T(\lambda)$. С этой целью в качестве оценки спектральной плотности $f(\lambda)$ рассмотрим статистику $\hat{f}_{(2)}^T(\lambda)$, задаваемую соотношением: $\hat{f}_{(2)}^T(\lambda) = T \hat{f}_{(1)}^T(\lambda) - \frac{T-1}{T} \sum_{i=0}^{T-1} \hat{f}_{(1),i}^{T-1}(\lambda)$, где $\hat{f}_{(1),i}^{T-1}(\lambda)$ — обозначает оценку $\hat{f}_{(1)}^{T-1}(\lambda)$ спектральной плотности $f_i(\lambda)$, построенную по $T-1$ наблюдениям (выброшено i -ое, $i=0, T-1$, наблюдение из T наблюдений за процессом x_t , $t \in Z$).

Исследуем построенную оценку на смещенность. Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} M \hat{f}_{(2)}^T(\lambda) &= f(\lambda) + \sum_{j=1}^{\infty} a_j^{(1)}(\lambda) \left[\frac{1}{T^{j-1}} - \frac{1}{(T-1)^{j-1}} \right] = \\ &= f(\lambda) + \sum_{j=2}^{\infty} \frac{a_j^{(1)}(\lambda)}{T^j} b_j^{(1)}(T), \end{aligned}$$

где $b_j^{(1)}(T) = T^j \left[\frac{1}{T^{j-1}} - \frac{1}{(T-1)^{j-1}} \right]$, $j = 2, 3, \dots$.

Найдем $\lim_{T \rightarrow \infty} b_j^{(1)}(T)$, $j = 2, 3, \dots$, $\lim_{T \rightarrow \infty} b_j^{(1)}(T) = \lim_{T \rightarrow \infty} T^j \left[\frac{(T-1)^{j-1} - T^{j-1}}{T^{j-1}(T-1)^{j-1}} \right] = -C_{j-1}^{j-2}$. Следовательно, оценка $\hat{f}_{(2)}^T(\lambda)$ является асимптотически несмещенной оценкой спектральной плотности $f(\lambda)$ со смещением, убывающим как T^{-2} .

Далее предположим, что оценка $\hat{f}_{(k-1)}^T(\lambda)$ удовлетворяет равенству (1), $k = 3, 4, \dots$. Построим оценку

$$\begin{aligned} \hat{f}_{(k)}^T(\lambda) &= \frac{1}{T^{k-1} - (T-1)^{k-1}} \cdot \left[T^{k-1} \hat{f}_{(k-1)}^T(\lambda) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{(T-1)^{k-1}}{T} \sum_{i=0}^{T-1} \hat{f}_{(k-1),i}^{T-1}(\lambda) \right]. \end{aligned} \quad (2)$$

Найдем $M \hat{f}_{(k)}^T(\lambda)$, $k = 3, 4, \dots$. $M \hat{f}_{(k)}^T(\lambda) = f(\lambda) = \sum_{j=k}^{\infty} \frac{a_j^{(k-1)}(\lambda)}{T^j} b_j^{(k-1)}(T)$,

где $b_j^{(k-1)}(T) = \frac{T^j}{T^{k-1} - (T-1)^{k-1}} \left[\frac{1}{T^{j-k+1}} - \frac{1}{(T-1)^{j-k+1}} \right]$, $j = k, k+1, \dots$.

Заметим, что $\lim_{T \rightarrow \infty} b_j^{(k-1)}(T) = -\frac{j-k+1}{k-1}$. Следовательно, оценка $\hat{f}_{(k)}^T(\lambda)$ является асимптотически несмещенной оценкой спектральной плотности $f(\lambda)$ со смещением, убывающим как T^{-k} .

Далее найдем вид коэффициентов $a_j^{(k)}(\lambda)$ в представлении (1), $j = k, k+1, \dots$, $k = 2, 3, \dots$, при $T \rightarrow \infty$. Нетрудно видеть, что

$$\lim_{T \rightarrow \infty} a_j^{(k)}(\lambda) = \lim_{T \rightarrow \infty} a_j^{(k-1)}(\lambda) \cdot b_j^{(k-1)}(T) = (-1)^{k-1} C_{j-1}^{k-1} a_j^{(1)}(\lambda),$$

где $j = k, k+1, \dots$.

Таким образом, имеет место следующая

Теорема. Если для оценки $\hat{f}_{(k-1)}^T(\lambda)$ спектральной плотности $f(\lambda)$, $\lambda \in \Pi$, выполняется соотношение (1), то для оценки $\hat{f}_{(k)}^T(\lambda)$, задаваемой выражением (2), справедливо соотношение

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left[M \hat{f}_{(k)}^T(\lambda) - \sum_{j=k}^{\infty} \frac{a_j^{(k)}(\lambda)}{T^j} \right] = f(\lambda),$$

где $d_j^{(k)}(\lambda) = (-1)^{k-1} a_j^{(1)}(\lambda) C_{j-1}^{k-1}$, $k = 2, 3, \dots$.

Заметим, что существует несколько методов уменьшения величины смещения для параметрических оценок (см., например, [5, 6]).

ЛИТЕРАТУРА

1. Бен т к у с Р.— Литовский матем. сб., 1977, т. 14, № 4, с. 37.
2. Жур бен ко И. Г.— Весті АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук, 1978, № 4, с. 36.
3. Жур бен ко И. Г., Труш Н. Н.— Литовский матем. сб., 1979, т. 19, № 1, с. 65.
4. Бри л л и н д ж е р Д. Временные ряды. Обработка данных и теория.— М., 1980.
5. Тер п у г о в А. Ф. Математическая статистика.— Томск, 1974.
6. Кок с Д., Хин к ли Д. Теоретическая статистика.— М., 1978.

Поступила в редакцию
18.02.83.

Кафедра теории вероятностей и математической
статистики

УДК 519.62

В. Н. ШАЛИМА

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Учет специфики решаемых задач позволяет указать методы их численного решения, более эффективные в сравнении с методами, предназначенными для решения задач более общего вида (см., например, [1, 2]). Рассмотрим один из способов построения таких методов для задач с начальными условиями в случае систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка.

Пусть на отрезке $[t_0, T]$ необходимо численно решить следующую задачу Коши:

$\dot{u}_k = a_k(t, \bar{u}) u_k + f_k(t, \bar{u})$, $u_k(t_0) = u_{k0}$, $k = 1, 2, \dots, s$, $\bar{u} = [u_1, \dots, u_s]$, (1)
где $a_k(t, \bar{u})$, $f_k(t, \bar{u})$, $k = 1, \dots, s$ предполагаются достаточно гладкими в некоторой области изменения аргументов.

Непосредственно проверяется, что задача (1) эквивалентна следующей системе интегральных уравнений:

$$u_k(t) = u_k(t_0) \exp\left(\int_{t_0}^t a_k(\eta, \bar{u}(\eta)) d\eta\right) + \\ + \int_{t_0}^t \exp\left(\int_{\eta}^t a_k(\xi, \bar{u}(\xi)) d\xi\right) f_k(\eta, \bar{u}(\eta)) d\eta. \quad (2)$$

Заменим отрезок интегрирования $[t_0, T]$ сеткой $\bar{\omega}_\tau = \{t_j = t_0 + j\tau, j = 0, 1, \dots, N, N\tau = T - t_0\}$ и предположим, что вычисления доведены до точки t_j , $0 \leq j < N$. Тогда на основании равенств (2) можно записать

$$u_k(t_{j+1}) = u_k(t_j) \exp\left(\tau \int_0^1 a_k(t_j + \alpha\tau, \bar{u}(t_j + \alpha\tau)) d\alpha\right) + \\ + \tau \int_0^1 \exp\left((1-\beta)\tau \int_0^1 a_k(\tilde{\gamma}, \bar{u}(\tilde{\gamma})) d\gamma\right) f_k(t_j + \beta\tau, \bar{u}(t_j + \beta\tau)) d\beta, \quad (3)$$

где $\tilde{\gamma} = t_j + \beta\tau + (1-\beta)\tau\gamma$.

Воспользовавшись результатами работы [3], заменим интегралы в равенствах (3) квадратурными суммами; тогда получим

$$u_k(t_{j+1}) \approx u_k(t_j) \exp\left(\tau \sum_{i=1}^{q_0} A_i a_k(t_j + \alpha_i\tau, \bar{u}(t_j + \alpha_i\tau))\right) \left(+$$

$$+ \tau \sum_{m=1}^{q_1} B_m \exp \left((1 - \beta_m) \tau \sum_{n=1}^{q_2} C_n a_k (\tilde{\gamma}_{n,m}, \bar{u}(\tilde{\gamma}_{n,m})) \right) f_k(\beta_m), \quad (4)$$

где $\tilde{\gamma}_{n,m} = t_j + \beta_m \tau + (1 - \beta_m) \tau \gamma_n$, $f_k(\beta_m) = f_k(t_j + \beta_m \tau, \bar{u}(t_j + \beta_m \tau))$. Подчинив выбор параметров $A_i, \alpha_i, B_m, \beta_m, C_n, \gamma_n$ требованию достаточно высокой алгебраической степени точности соответствующих квадратурных формул и учитывая присутствие множителя τ перед суммами в равенствах (4), мы можем построить многомодульные методы, подобные методам, приведенным в [4].

Укажем в качестве примера на следующий метод четвертого порядка точности, опустив для простоты записей индекс k :

$$\begin{aligned} y_{j+\frac{1}{6}} &= e^{\frac{\tau}{6} a_j} \left[y_j + \frac{\tau}{6} f_j^{[1]} \right], \quad y_{j+\frac{1}{3}} = y_j e^{\frac{\tau}{3} a_{j+\frac{1}{6}}} + \frac{\tau}{3} f_{j+\frac{1}{6}} e^{\frac{\tau}{6} a_j + \frac{1}{6}}, \\ y_{j+\frac{1}{2}} &= y_j e^{\frac{\tau}{8} [a_j + 3a_{j+\frac{1}{3}}]} + \frac{\tau}{8} [f_j^{[1]} e^{\frac{\tau}{2} a_j} + 3f_{j+\frac{1}{3}} e^{\frac{\tau}{6} a_j + \frac{1}{3}}], \\ y_{j+1}^{[4]} &= y_j e^{\frac{\tau}{2} [a_j - 3a_{j+\frac{1}{3}} + \frac{1}{3} + 4a_{j+\frac{1}{2}}]} + \frac{\tau}{2} [f_j^{[1]} e^{\tau a_j} - 3f_{j+\frac{1}{3}} e^{\frac{2}{3} \tau a_j + \frac{1}{3}} + \\ &\quad + 4f_{j+\frac{1}{2}} e^{\frac{\tau}{2} a_j + \frac{1}{2}}], \\ y_{j+1}^{[5]} &= y_j e^{\frac{\tau}{6} [a_j + 4a_{j+\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} + a_{j+1}^{[4]}]} + \frac{\tau}{6} [f_j^{[1]} e^{\frac{\tau}{2} a_j + \frac{1}{2}} + \\ &\quad + 4f_{j+\frac{1}{2}} e^{\frac{\tau}{4} [a_j + \frac{1}{2} + a_{j+1}^{[4]}]} + f_{j+1}^{[4]}]. \end{aligned}$$

Здесь i может принимать значения 4 или 5. Заметим, что при $a_k(t, \bar{u}) = a_k = \text{const}$ и $f_k(t, \bar{u}) \equiv 0$, предлагаемые методы являются точными и, следовательно, в случае $a_k < 0, k=1, 2, \dots, s$ A -устойчивыми.

В тех случаях, когда поведение подынтегральной функции во втором интервале равенств (3) определяется поведением экспоненциального множителя, можно попытаться учесть это влияние на пути построения методов, используя квадратурные формулы с экспоненциальным весом. Так, если $a_k = \text{const}, k=1, 2, \dots, s$ потребуем, чтобы квадратурная формула

$$\int_0^1 \exp((1 - \beta) a \tau) f(t_j + \beta \tau, u(t_j + \beta \tau)) d\beta \approx \sum_{m=1}^q B_m f(t_j + \beta_m, u(t_j + \beta_m))$$

была точной для всевозможных алгебраических многочленов до степени $p-1$ ($1 \leq p \leq 2q$) включительно. Это требование приводит к следующей системе уравнений:

$$\sum_{m=1}^q B_m \beta_m^\mu = E_\mu, \quad (5)$$

$$\text{где } E_\mu = \int_0^1 \exp((1 - \beta) a \tau) \beta^\mu d\beta, \quad \mu = 0, 1, \dots, p-1.$$

Выбрав B_m и β_m удовлетворяющими системе (5), можно записать

$$y_{j+1} = y_j e^{a\tau} + \tau \sum_{m=1}^q B_m f_{j+\beta_m}. \quad (6)$$

Дальнейший процесс построения методов аналогичен [4].

В качестве примера приведем следующий метод первого порядка точности

$$y_{j+1} = y_j e^{a\tau} + \frac{1}{a} (e^{a\tau} - 1) f_j.$$

В заключение отметим, что методы, построенные на основании равенств (5), (6), являются точными на решении уравнения $\dot{y} = ay + b$, где $b = \text{const}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бахвалов Н. С.— В кн.: Численные методы. М., 1973, т. 1, с. 632.
2. Калиткин Н. Н.— В кн.: Численные методы. М., 1978, с. 512.
3. Бобков В. В.— Весті АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук, 1967, № 4, с. 27.
4. Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырский П. И. Начала теории вычислительных методов. Дифференциальные уравнения.— Минск, 1982.

Поступила в редакцию
05.04.83

Кафедра вычислительной математики

АННОТАЦИИ ДЕПОНИРОВАННЫХ СТАТЕЙ *

УДК 539.26 : 681.142.2

А. Фонсека Дуарте, Л. Коусо Фернандес, Р. Хиро Сид, Г. А. Гуманский, В. В. Углов. **Простая программа для обработки рентгенодифрактометрических данных на ЭВМ.** № 1979-82. Деп. от 22.04.82.

Описана программа, предназначенная для вычисления структуры веществ с целью облегчения трудоемкой работы по обработке рентгеноструктурных данных, снятых по точкам.

УДК 51(056)

А. А. Гусак. **Математика в Белорусском государственном университете имени В. И. Ленина.** № 534-82. Деп. от 18.11.82.

Указываются основные направления и наиболее существенные результаты научных исследований математических кафедр. Отмечаются работы выпускников и сотрудников Белгосуниверситета имени В. И. Ленина, удостоенные премий республиканского и союзного значений. Освещаются международные связи математиков БГУ имени В. И. Ленина с коллегами зарубежных университетов, а также вопросы подготовки кадров для развивающихся и социалистических стран.

УДК 517.983.27 : 519.245 : 519.872

Н. Н. Леонов. **Интегральные уравнения для инвариантных мер цепей Маркова и метод существенной выборки.** № 280-83. Деп. от 17.01.83.

Стационарное распределение однородной цепи Маркова с пространством состояний общего вида представляется в виде итеративного решения некоторого линейного интегрального уравнения второго рода, что позволяет привлечь к вычислению стационарных характеристик этой цепи развитую теорию решения линейных интегральных уравнений методом Монте-Карло и, в частности, использовать метод существенной выборки, который, как известно (РЖМат, 1976, 2В265К), непосредственно к стационарным задачам для цепей Маркова применить нельзя. Приведен вычислительный алгоритм и некоторые примеры.

УДК 519.17

Л. Н. Батурин. **Синтез сетей по симметричной положительной матрице требований.** № 281-83. Деп. от 17.01.83.

Рассматривается задача синтеза по заданной матрице требований полной неориентированной сети с ограничениями на функцию пропускной способности. Найдены условия, необходимые для реализации матрицы требований как матрицы максимальных потоков полной сети и предложен алгоритм синтеза для нахождения значений функции пропускной способности, удовлетворяющей заданным ограничениям.

УДК 681.3

А. С. Липницкий, Г. Н. Черников, Г. И. Шпаковский. **Оценка эффективности параллельной вычислительной системы.** № 346-83. Деп. от 20.01.83.

Разработана методика оценки эффективности многопроцессорной вычислительной системы ОКМД-класса с индивидуальной адресацией, и производится анализ эффективности такой системы.

УДК 681.3

А. С. Липницкий, Н. В. Серикова, Г. Н. Черников. **Выбор генератора функций расстановки для параллельной вычислительной системы.** № 347-83. Деп. от 20.01.83.

Разработана методика выбора генератора функций расстановки для многопроцессорной вычислительной системы с индивидуальной адресацией ОКМД-класса. На основе разработанной методики произведен выбор оптимального генератора функций расстановки.

* Копии депонированных статей можно заказать по адресу: 140010, Московская обл., г. Люберцы, 10, Октябрьский проспект, 403. Производственно-издательский комплекс ВИНТИ, отдел распространения; тел. 271-90-10, доб. 26-29.

УДК 218:517(944)947

Е. В. Радкевич. О сходимости метода Ньютона решения нелинейных разностных уравнений, аппроксимирующих систему уравнений теплопроводности в случае второй краевой задачи. № 348-83. Деп. от 20.01.83.

Рассматривается разностная схема решения системы двух уравнений теплопроводности с крайевыми условиями второго рода. Полученная в результате аппроксимации исходной задачи разностной схемой система нелинейных разностных уравнений решается методом Ньютона. Доказывается сходимость метода Ньютона к решению исходной задачи.

УДК 519.62

В. И. Репников. Разностные методы с расширенной областью устойчивости. № 349-83. Деп. от 20.01.83.

Предлагается способ улучшения согласованности в поведении решений дифференциального и разностного уравнений при численном решении задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Построены примеры разностных схем. Приведены результаты численного эксперимента. Указывается на возможность использования предлагаемых методов при построении разностных схем в случае граничных задач для дифференциальных уравнений с частными производными.

УДК 621.382

Т. Н. Войтик, И. М. Грибло, В. И. Лойко, А. В. Ткач. Влияние расположения кремниевых пластин в кассете на процессы дефектообразования при термообработке. № 350-83. Деп. от 20.01.83.

Проведены экспериментальные исследования (кремний *p*-типа) по влиянию расположения пластин в кварцевой кассете на процессы дефектообразования. Получены результаты по разности плотности дефектов (дислокаций, преципитатов) на крайних пластинах в кассете и пластинах, расположенных посередине. Отмечена максимальная плотность дефектов на крайних пластинах $((2-9,8) \cdot 10 \text{ см}^{-2})$. Экспериментально установлена корреляция между плотностью дефектов и параметрами тестовых транзисторов. Показано, что одной из причин повышенной плотности дефектов на пластинах является большой прогиб исходных подложек (40 мкм).

УДК 517.928

Данг Динь Тяу. Исследование устойчивости нулевого решения дифференциальных уравнений в банаховом пространстве с помощью укороченных систем. № 351-83. Деп. от 20.01.83.

Для дифференциальных уравнений в банаховом пространстве исследуется слабая устойчивость и сильная неустойчивость нулевого решения сведением к исследованию укороченных дифференциальных уравнений. Изучена взаимопомощь между понятиями неустойчивости (по Ляпунову) и сильной неустойчивости, и получен критерий сильной неустойчивости в терминах предельных множеств. Рассмотрены конкретные примеры, иллюстрирующие полученные результаты.

УДК 546.791

А. Н. Акимов, Л. И. Конюшко. Колебательные спектры и структура пленок и порошков триоксида вольфрама, полученного из растворов WCl_5 в ДМФ. № 428-83. Деп. от 26.01.83.

Спектрально-структурными исследованиями изучены порошки и пленки WO_3 на различных подложках, полученные гидролитическим осаждением из растворов WCl_6 в ДМФ.

УДК 621.315.592

Б. В. Климович, Н. А. Поклонский. Диаграммная техника вычисления прыжковой электропроводности. № 429-83. Деп. от 26.01.83.

Графическая техника Константинова — Переля модифицирована на случай вычисления некогерентной (прыжковой) электропроводности. Получены интегральные кинетические уравнения. В качестве примера рассмотрена электропроводность двухузельного кластера с одним электроном на низких частотах приложенного поля.

УДК 539.12:530.145

В. А. К о р о б о в. О перенормировках и устранении расходимостей в КЭД каноническим преобразованием. № 430-83. Деп. от 26.01.83.

Строится каноническое преобразование операторов поля для приближенной диагонализации оператора Гамильтона и оператора заряда в рамках квантовой электродинамики. При этом на определяющие каноническое преобразование функции накладываются такие граничные условия, что на больших расстояниях получается гамльтониан с перенормированными зарядами и массой электрона, а на малых расстояниях происходит устранение расходимостей. В простом приближении получены перенормированные заряд и масса электрона.

УДК 681.3

А. С. Л и п н и ц к и й, Г. Н. Ч е р н и к о в, Г. И. Ш п а к о в с к и й. Двухпризнаковая память с хеш-доступом, ч. 1. Структура и функционирование. № 431-83. Деп. от 26.01.83.

Разработана структура двухпризнаковой памяти с хеш-доступом.

УДК 537.311.3-378.147-388

В. Г. Ш е п е л е в и ч, В. Л. Г е л ь ф а н д. Разработка лабораторной работы «Электросопротивление сплавов». № 501-83. Деп. от 27.01.83.

Приведены методические указания по постановке лабораторной работы «Электросопротивление сплавов». Подобраны сплавы, описана методика их изготовления, предложен метод измерения электросопротивления. Лабораторная работа позволяет изучить основные закономерности влияния легирования на электросопротивление металлов.

УДК 681.322.06

Н г у е н К у а н г Т а н. Структурный подход к проектированию диалоговых программ для автоматизированных обучающих систем. № 503-83. Деп. от 27.01.83.

Предлагается разработанный в БГУ имени В. И. Ленина системно-структурный подход к проектированию диалоговых обучающих программ для автоматизированных обучающих систем. Дается анализ современных методов и технологий программирования. Описываются управляющие структуры языка проектирования логического сценария обучающих курсов ЯСД. Рассматриваются конкретные этапы создания программного продукта в предлагаемом подходе.

УДК 62-50

З а б е л л о Л. Е. Минимизация квадратичных функционалов и проблема второй вариации для управляемых систем с запаздыванием. № 505-83. Деп. от 27.01.83.

Методом динамического программирования исследуется на минимум достаточно общий квадратичный функционал на траекториях линейной нестационарной системы с запаздыванием по состоянию.

Полученные результаты исследуются при выводе необходимого и достаточного условия сильной положительности второй вариации в задачах Майера для неособого случая. Формулировки теорем в основном упираются в существование решения уравнения Риккати.

Целый ряд утверждений получен при исследовании второй вариации в особом случае.

УДК 518.5

Г у а р д а д о Э р н а н д е с М. Б. Синтез специальных транспортных сетей без транзитных вершин. № 777-83. Деп. от 14.02.83.

Определяется множество дуг двусторонней транспортной сети, которое обеспечивает поток, удовлетворяющий спрос и минимизирующий максимальное значение потоков по дугам. В сети допускаются дуги между парами источников (стеков). Предлагается алгоритм решения задачи на основе найденного в явном виде оптимального значения дуговых потоков. Сложность предложенного алгоритма $O(n^2)$, где n — число вершин сети.

УДК 681.3

А. С. Липницкий, Г. Н. Черников, Г. И. Шпаковский. Двухпризнаковая память с хеш-доступом, ч. 2. Анализ некоторых характеристик. № 776-83. Деп. от 04.02.83.

Дан анализ некоторых характеристик двухпризнаковой памяти с хеш-доступом. Приводится оценка объема оборудования.

УДК 517.928

Тагбино Тамба. О сферической совместности линейных дифференциальных систем. № 778-83. Деп. от 14.02.83.

Устанавливаются необходимые и достаточные условия сферической совместности и сферического совпадения однородной линейной и квазилинейной систем. Для этих систем доказываются также теоремы о сферической совместности и сферическом совпадении по последовательности.

УДК 621.391-621.396

А. В. Сидоренко. Потенциальная точность оптической передачи непрерывного радиосигнала. № 779-83. Деп. от 14.02.83.

Предложена модель оптической системы передачи непрерывного сигнала при наличии флуктуационных помех, включая мультипликативные. Определена структурная схема оптимального приемника. Получены аналитические выражения для расчета точности передачи амплитуды и фазы непрерывного радиосигнала.

УДК 548-162.01

В. М. Анищик, Н. Н. Дорожкин. Расчет структурных констант метода функции Грина для сложных решеток. № 598Бе-Д83. Деп. от 26.04.83.

Предлагается методика расчета структурных констант метода функции Грина для сложных решеток с суммированием только по векторам обратной решетки. При этом та часть структурных констант, которая сильно зависит от энергии и волнового вектора, рассчитывается точно, а оставшаяся разлагается в ряд по энергии. Время счета структурных констант с использованием данной методики значительно сокращается по сравнению с точным учетом их энергетической зависимости.

УДК 519.21

Н. М. Зуев, К. К. Ибрагима. Исследование старших спектральных плотностей $m(d)$ -зависимых случайных процессов. № 599Бе-Д83. Деп. от 25.04.83.

Вводится понятие $m(d)$ -зависимого случайного процесса и строится пример такого процесса. Для $m(d)$ -зависимых случайных процессов получены оценки старших спектральных плотностей и их производных.

УДК 519.21

К. К. Ибрагима. О свойствах коэффициентов перемешивания случайных процессов. № 600Бе-Д83. Деп. от 25.04.83.

Приводятся и доказываются свойства коэффициентов перемешивания случайных процессов.

УДК 681.53 : 548.1

В. С. Тишков. Применение ЭВМ при расчете параметров ближнего порядка. № 602Бе-Д83. Деп. от 25.04.83.

Представлены вычислительная программа на языке ФОРТРАН для расчета параметров ближнего порядка вещества, а также примеры ее работы при вычислении параметров ближнего порядка модельных объемов различной формы и величины, имеющих структуру кремния.

УДК 681.53 : 548.1

В. С. Тишков. Применение ЭВМ при расчете теоретических радиальных функций распределения атомной плотности. № 602Бе-Д83. Деп. от 25.04.83.

Представлена вычислительная программа на языке ФОРТРАН-IV в системе ДОС, предназначенная для расчета теоретических радиальных функций распределения атомной плотности по известным параметрам структуры ближнего порядка моделируемого вещества, а также примеры ее работы при вычислении функций углового распределения интенсивности рассеяния электронов и кривых радиального распределения атомной плотности для моделей решетки кремния, имеющих, соответственно, структуру ближнего порядка типа алмаза, вюрцита и пентагонального додекаэдра.

УДК 543.422.4.062

В. А. Мироненко, М. А. Ксенофонов. Автоматизация процессов сбора и обработки спектральной информации. № 604Бе-Д83. Деп. от 04.05.83.

На примере взаимодействия суммарных сланцевых фенолов с формальдегидом показана возможность более полной автоматизации процессов сбора и обработки спектральной информации в исследованиях с применением количественного анализа ИК спектров. Приводится вариант программной стыковки ИК спектрофотометра с ЭВМ, сокращающий затраты времени при машинной обработке спектров.

УДК 519.1

М. М. Ковалев, Н. Н. Писарук. Потоковые задачи оптимизации на полиматроидах. № 605Бе-Д83. Деп. от 04.05.83.

Исследуются задачи выпуклой дискретной оптимизации на полиматроидах и обобщенных полиматроидах. Полученные результаты применяются для решения различных субмодулярно-графовых задач.

УДК 539.12 : 530.145

В. А. Коробов. О связанных состояниях полей в КЭД. № 606Бе-Д83. Деп. от 04.05.83.

Исследуется приближенное построение связанных состояний электронного и электромагнитного полей в рамках квантовой электродинамики. Используется как преобразование операторов полей, так и построение пробных состояний, что соответствует выделению квадратичного по операторам полей аппроксимирующего гамильтониана, учитывающего взаимодействие полей и устраняющего законы сохранения, справедливые для полного гамильтониана (на достаточно больших расстояниях происходит их восстановление калибровочной инвариантности, следует квантование электрического заряда наблюдаемых частиц. Рассматривается также возможность получения кварковых моделей в рамках КЭД как локального приближения после преобразования операторов затравочных полей в гамильтониане системы. Невылетание дробно-заряженных кварков следует из восстановления калибровочной инвариантности, а векторных бозонов («глюонов») — из граничных условий на функции, определяющие преобразование оператора затравочного электромагнитного поля. Единственными параметрами являются заряд и масса «голого» электрона.

УДК 535.37

К. Х. Туан. Спектрально-люминесцентные характеристики борсодержащих органических комплексов. № 607Бе-Д83. Деп. от 04.05.83.

Экспериментально исследованы и приведены основные спектрально-люминесцентные характеристики семи борсодержащих соединений в толуоле и ацетонитриле. Показано, что центральный атом бора и два атома кислорода в молекуле связаны координационной связью. Сделано предположение о том, что спектр поглощения толуольных растворов веществ № 1—6 состоит из двух полос, обусловленных переносом заряда и $n \rightarrow \pi^*$ -переходом электронов в молекуле, причем первый член в замещении определяет длинноволновое смещение второй полосы поглощения, а второй и третий — коротковолновой сдвиг второй полосы поглощения относительно основной.

Обладая большим квантовым выходом флуоресценции и сравнительно высоким коэффициентом экстинкции, исследуемые вещества могут быть использованы в качестве активных лазерных сред в сине-зеленой области спектра.

УДК 517.977

В. С. Глушков. Оптимизация непрерывных линейных систем в классе кусочно-постоянных управлений. № 609Бе-Д83. Деп. от 04.05.83.

Рассматривается задача максимизации линейного функционала на траекториях непрерывной нестационарной линейной системы. Для ее решения предлагаются прямой и двойственный алгоритмы с адаптивной нормировкой. На итерациях алгоритмов интегрируются исходная и сопряженная системы. Точность интегрирования изменяется от итерации к итерации (выбирается минимальной среди обеспечивающих нормальный ход итерации). Приводятся модификации алгоритмов, рассчитанные на случай многомерного управления.

УДК 621.383.292

В. М. Лутковский, Ю. П. Макаров, И. А. Малевич. Побочные явления в фотоэлектронных умножителях. № 610Бе-ДЗ. Деп. от 04.05.83.

Дается обобщающий обзор результатов экспериментального исследования послепульсных явлений и собственного излучения отечественных и зарубежных фотоумножителей. На основании изучения спектральных характеристик и динамики развития собственного излучения при увеличении анодного тока сделан вывод о существенном вкладе процесса десорбции молекул и атомов остаточных газов и паров щелочных металлов с последних динодов в механизм развития побочных явлений, сопровождающих процесс усиления фототока. Предложена обобщенная модель фотоумножителя, учитывающая внутренние обратные связи и послеэмиссию вторичных эмиттеров, и на ее основании рассмотрены некоторые особенности процесса детектирования нестационарных потоков оптического излучения.

УДК 535.34

С. И. Каськова, Г. С. Романов, Л. К. Станчиц, К. Л. Степанов. Таблицы термодинамических функций и ионизационный состав плазмы углерода. № 611Бе-Д83. Деп. от 04.05.83.

Содержатся данные по термодинамическим функциям и компонентному составу плазмы углерода. Приведенные результаты получены по системе уравнений Саха в кольцевом приближении в большом каноническом ансамбле. Расчеты выполнены в диапазоне температур плазмы 10^3 —1 эВ и плотностей $1,78 \cdot 10^{-7}$ —1 г/см³ с логарифмическим шагом по температуре $\Delta \lg T = 0,1$ и плотности $\Delta \lg \rho = 0,25$.

УДК 535.34

С. И. Каськова, Г. С. Романов, Л. К. Станчиц, К. Л. Степанов. Таблицы термодинамических функций и ионизационный состав плазмы алюминия. № 612Бе-Д83. Деп. от 04.05.83.

Содержатся данные по термодинамическим функциям и компонентному составу плазмы алюминия. Приведенные результаты получены по системе уравнений Саха в кольцевом приближении большого канонического ансамбля. Расчеты выполнены в диапазоне температур плазмы 10^3 —1 эВ и плотностей $1,78 \cdot 10^{-7}$ —1 г/см³ с логарифмическим шагом по температуре $\Delta \lg T = 0,1$ и плотности $\Delta \lg \rho = 0,25$.

УДК 681.325

В. В. Данилевич, А. Г. Зенькович, Е. В. Новиков. Многофункциональный аналого-цифровой преобразователь в стандарте КАМАК. № 613Бе-Д83. Деп. от 04.05.83.

Рассматривается многопредельный преобразователь амплитуда—время—код с программным управлением порогом и коэффициентом преобразования, реализованный в модуле КАМАК двойной ширины. Приводятся результаты исследований метрологических характеристик преобразователя.

УДК 62-501/503

Н. Н. Скриган. Параметрический подход к анализу и синтезу измерительных систем. № 616Бе-Д83. Деп. от 04.05.83.

Разрабатывается метод анализа и синтеза сигналов и систем, основанный на параметрическом представлении моделей реальных объектов и позволяющий уменьшить противоречие между простотой и адекватностью этих моделей. Вводится понятие син-

хронной измерительной системы и рассматриваются инструментальные погрешности синхронных измерительных систем, обусловленные собственными шумами устройств, формирующих шкалу времени для синхронных измерительных систем. Рассмотрены вопросы спектрального анализа сигналов и систем, полученных в результате использования параметрического подхода. Показано, что в этом случае необходимо использовать аппарат преобразований Фурье — Стильбеса, являющихся обобщением преобразований Фурье и обеспечивающих однозначное описание исследуемых сигналов и систем в базисе квазигармонических функций.

УДК 517.928

Тагбино Тамба. О разрешимости сингулярных систем линейных дифференциальных уравнений в специальных случаях. № 617Бе-Д83. Деп. от 16.05.83.

Для сингулярных систем линейных дифференциальных уравнений устанавливаются достаточные условия наличия r -параметрического семейства решений. Для этих систем устанавливаются также в ряде случаев достаточные условия существования заданного числа линейно-независимых решений и достаточные условия зависимости решения от произвольных непрерывно-дифференцируемых функций.

УДК 621.315.592+537.32 : 536.48(076.5)

А. К. Федотов, Л. Д. Воронько. Разработка лабораторной работы «Изучение термоэда в полупроводниковых материалах при низких температурах». № 640Бе-Д83. Деп. от 18.05.83.

Описывается конструкция низкотемпературной ячейки для измерения термоэда полупроводниковых материалов в области температур 100—300 °К, а также методические указания по проведению лабораторной работы на указанную тему для студентов четвертого курса, специализирующихся по физике полупроводников.

УДК 330 : 115 : 62-50

Л. А. Пилипчук. Двойственный метод решения двухпродуктовой транспортной задачи с дополнительными ограничениями. № 644Бе-Д83. Деп. от 02.06.83.

Построен двойственный конечный метод решения сетевой двухпродуктовой транспортной задачи с дополнительными ограничениями. Предложенная оценка субоптимальности позволяет остановить процесс решения после достижения заданной точности приближения к оптимальному мультипоток по целевой функции.

УДК 519.1

А. М. Кочкаров, В. А. Перепелица. Парето-оптимальные решения многокритериальной задачи покрытия графа цепями. № 645Бе-Д83. Деп. от 02.06.83.

Работа посвящена 3-критериальным постановкам задачи покрытия графа цепями. Доказаны ряд лемм и теорем, выясняющих либо необходимые, либо достаточные условия принадлежности однородных, т. е. состоящих из цепей одного типа покрытий, Паретовскому множеству. Для одного класса задач предложен малотрудоемкий алгоритм, который «почти всегда» находит такое подмножество Паретовского множества, которое принадлежит всякому полному решению задачи F .

СОДЕРЖАНИЕ

ФИЗИКА

<i>Титов А. Д., Хапалюк А. П.</i> Гибридные направляемые моды симметричного плоского прозрачного волновода	3
<i>Барышевский В. Г., Кутень С. А.</i> О возможности исследования фазовых переходов в сегнетоэлектриках с помощью положительных мюонов	8
<i>Орлов Л. Н., Гуану Се.</i> О влиянии температуры на спектры отражения	11
<i>Чан Ван.</i> Влияние сверхтонкого расщепления ядерных уровней на поворот плоскости поляризации гамма-квантов в поляризованных мишенях	14
<i>Аншаков О. М., Гурачевский В. Л., Холмецкий А. Л., Чудаков В. А.</i> Мессбауэровская спектроскопия тонких пленок с регистрацией конверсионных электронов	18
<i>Барышевский В. Г., Черепица С. В.</i> Влияние гравитационного поля земли на прецессию спина нейтронов	21
<i>Патек М., Хапалюк А. П.</i> Метод расчета параметров основной моды резонатора с линзой	25

МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

<i>Калитин Б. С.</i> Минимальная устойчивость решений дифференциальных систем	30
<i>Король И. А., Совпель И. В.</i> Автоматизированная система перевода ключевых слов (СПЕРКС-1). II	33
<i>Леваков А. А.</i> Регулируемость нелинейных систем	35
<i>Прокашева В. А.</i> Однородные системы первого порядка без подвижных критических точек (случай $A_0 \neq 0$)	37
<i>Ковалев М. М., Писарук Н. Н.</i> Независимые потоки и полиматронды	41
<i>Гладкова Г. А., Матагов В. И., Солонская К. А.</i> О нагруженности фрикционной муфты при квадратичном законе включения	44
<i>Зверович Э. И., Чаевский Г. Г.</i> Конформные отображения круговых многоугольников специального вида	46
<i>Кравцов М. К.</i> К оценке сверху радиуса транспортного многогранника	49

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

<i>Наумович Н. Ф.</i> Нестационарные системы с законом площадей	54
<i>Касим Мухамед Аль-Хайдер.</i> Об изохронности гамильтоновых дифференциальных систем с полиномами 4-й степени	55
<i>Ерофеевко В. Т.</i> Спектральное разложение операторов симметричного дифференцирования и дивергенции	57
<i>Жоровина Т. Н.</i> Об одной трехэлементной краевой задаче Римана на торе	59
<i>Ковачев В. X.</i> О приведении некоторых дифференциальных уравнений с рациональной правой частью к «треугольному» виду при помощи билинейного преобразования	61
<i>Бобков В. В.</i> Нелинейные методы численного решения дифференциальных уравнений, основанные на экспоненциальном продолжении решения	63
<i>Труш Н. Н.</i> Уменьшение смещения при оценивании спектральных плотностей	64
<i>Шалима В. Н.</i> Об одном классе численных методов решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений специального вида	66
Аннотации депонированных статей	69

РЕФЕРАТЫ

УДК 621.372.8

Титов А. Д., Хапалюк А. П. Гибридные направляемые моды симметричного плоского прозрачного волновода.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1984, № 2.

Исследованы гибридные направляемые HE- и EH-моды симметричного плоского диэлектрического волновода в случае прозрачности слоя и окружающей среды. Показано, что собственные решения реализуются неоднородными плоскими волнами при некомпланарном относительно нормали к границам распространении и только при угле некомпланарности $\pi/2$. Несобственные решения реализуются, кроме того, при угле падения $\pi/2$. Все направляемые моды относятся к классу поверхностных волн.

Библ. 10 назв., ил. 2.

УДК 539.1

Барышевский В. Г., Кутень С. А. О возможности исследования фазовых переходов в сегнетоэлектриках с помощью положительных мюонов.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1984, № 2.

Показано, что пучки поляризованных мюонов можно использовать для исследования структурных фазовых переходов в сегнетоэлектриках. Получено кинетическое уравнение, описывающее процессы релаксации спина мюона в сегнетоэлектрике.

Библ. 12 назв.

УДК 535.39

Орлов Л. Н., Гуану Се. О влиянии температуры на спектры отражения.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1984, № 2.

С помощью дисперсионных соотношений в рамках одноосцилляторной модели исследовано влияние температуры на показатель преломления, коэффициент экстинкции вещества, а также на коэффициент отражения света при нормальном падении. Показано, что в зависимости от величины отстройки частоты относительно центра линии поглощения с ростом температуры величины спектрального коэффициента отражения могут как уменьшаться, так и возрастать.

Библ. 6 назв., ил. 2.

УДК 539.12.04

Чан Ван. Влияние сверхтонкого расщепления ядерных уровней на поворот плоскости поляризации гамма-квантов в поляризованных мишенях.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1984, № 2.

Исследовано влияние сверхтонкого расщепления ядерных уровней на вращение плоскости поляризации и двойное лучепреломление при движении гамма-квантов в мишени с поляризованными ядрами. Показано, что при наличии расщепления для ядер со спином возможны двойное лучепреломление и поворот плоскости поляризации даже при совпадении энергии гамма-квантов с энергией ядерного перехода.

Библ. 4 назв.

УДК 539.1+539.2

Аншаков О. М., Гурачевский В. Л., Холмецкий А. Л., Чудаков В. А. Мессбауэровская спектроскопия тонких пленок с регистрацией конверсионных электронов.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1984, № 2.

Предложена методика регистрации конверсионных электронов, сопровождающих переход резонансно возбужденного ядра ^{57}Fe в основное состояние, с помощью сцинтилляционных детекторов с тонкими пластмассовыми сцинтилляторами. Изучены параметры сцинтилляторов различных толщин. С помощью пластмассового сцинтиллятора толщиной 50 мкм измерен мессбауэровский спектр конверсионных электронов фольги из α -железа.

Библ. 6 назв., ил. 3.

УДК 539.43

Барышевский В. Г., Черепица С. В. Влияние гравитационного поля Земли на прецессию спина нейтронов.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1984, № 2.

Показано, что в условиях динамической дифракции нейтронов в немагнитном кристалле эффект влияния гравитационного поля Земли на прецессию нейтронов становится заметным и появляется возможность его обнаружения.

Библ. 3 назв.

УДК 621.372.412

Патек М., Хапалюк А. П. Метод расчета параметров основной моды резонатора с линзой.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1984, № 2.

В параксиальном приближении найдены параметры низшей моды открытого оптического резонатора с линзой и сферическими зеркалами. Для таких расчетов предложен метод замены исходного резонатора с линзой двумя эквивалентными резонаторами без линзы. Предложены простые аналитические и графические методы определения параметров эквивалентных резонаторов.

Библ. 7 назв., ил. 2.

УДК 517.9

Калитин Б. С. Минимальная устойчивость решений дифференциальных систем.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1 физ., мат. и мех., 1984, № 2.

Введено понятие минимальной устойчивости нулевого решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Доказан ряд теорем-критериев этого свойства.

Библ. 6 назв.

УДК 519.768 : 17

Король И. А., Совпель И. В. Автоматизированная система перевода ключевых слов (СПЕРКС-1). II.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1984, № 2.

Рассматривается алгоритм построения дерева T^* , ребрам которого соответствует множество словарей, определяющее ядро L^* . Дается процедура формирования информационной базы, а также алгоритм обработки массива входных документов в системе СПЕРКС-1.

Библ. 3 назв.

УДК 519.926

Леваков А. А. Регулируемость нелинейных систем.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1984, № 2.

Введено понятие регулируемости систем, обобщающее понятие управляемости с помощью регулятора, получены условия регулируемости нелинейных нестационарных дифференциальных систем.

Библ. 4 назв.

УДК 517.925

Прокашева В. А. Однородные системы первого порядка без подвижных критических точек (случай $A_0 \neq 0$).— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1984, № 2.

Получены необходимые и достаточные условия отсутствия подвижных критических точек (п. к. т.) для системы:

$$\begin{cases} a_0 u'^2 + a_1 u' \cdot v' + a_2 v'^2 + a_3 u^2 + a_4 u \cdot v + a_5 v^2 = 0 \\ b_0 u'^2 + b_1 u' \cdot v' + b_2 v'^2 + b_3 u^2 + b_4 u \cdot v + b_5 v^2 = 0 \end{cases}$$

при условии

$$A_0 = a_0 \left\{ \left| \begin{array}{cc} a_0 b_0 & a_1 b_1 \\ a_2 b_2 & a_3 b_3 \end{array} \right| - \left| \begin{array}{cc} a_0 b_0 & a_1 b_1 \\ a_1 b_1 & a_2 b_2 \end{array} \right| \right\} \neq 0$$

Библ. 3 назв.

УДК 519.1

Ковалев М. М., Писарук Н. Н. Независимые потоки и полиматроиды.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1984, № 2.

Предлагается метод построения полиматроидов, индуцированных дугowymi потоками в орграфах. Метод позволяет дать новое решение задачи о максимальных независимых потоках, основанное на ее сведении к полиматроидному пересечению.

Библ. 5 назв.

УДК 517.942; 531.44

Гладкова Г. А., Мататов В. И., Солонская К. А. О нагруженности фрикционной муфты при квадратичном законе включения.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1984, № 2.

Исследован вопрос о работе буксования фрикционной муфты и динамических нагрузках ее ведомых элементов при квадратичных законах включения.

Библ. 4 назв., табл. 1.

УДК 517.544.8.544

Зверович Э. И., Чаевский Г. Г. Конформные отображения круговых многоугольников специального вида.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1984, № 2.

Предлагается метод построения аналитических функций, осуществляющих конформные отображения круговых пятиугольников частного вида на полуплоскость. Отображающая функция выписывается через решение вполне регулярной бесконечной системы линейных алгебраических уравнений. Метод не требует вычисления акцессорных параметров.

Библ. 3 назв.

УДК 519.10

Кравцов М. К. К оценке сверху радиуса транспортного многогранника.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1984, № 2.

Доказано, что максимальный радиус в классе невырожденных транспортных многогранников порядка $m \times n$, $2 < m \leq n$, $n \geq 3$, с $(m-1)n + k$ гранями максимальной размерности равен числу $m + k - 1$, если $0 < k \leq n - 2$, и не превосходит числа $m + n - 2$, если $k = n - 1$.

Библ. 7 назв.

УДК 517.926

Наумович Н. Ф. Нестационарные системы с законом площадей.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1984, № 2.

Получен критерий закона площадей для нестационарной системы дифференциальных уравнений посредством введения новой фазовой переменной и переходу к стационарной системе большей размерности.

Библ. 3 назв.

УДК 517.925.12

Касим Мухамед Аль-Хайдер. Об изохронности гамильтоновых дифференциальных систем с полиномами 4-й степени.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1984, № 2.

Доказываются необходимые и достаточные условия изохронности гамильтоновых дифференциальных систем с полиномами 4-й степени.

Библ. 4 назв.

УДК 517.98

Ерофеенко В. Т. Спектральное разложение операторов симметричного дифференцирования и дивергенции.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1984, № 2.

Получена спектральная формула, связывающая операторы симметричного дифференцирования и дивергенции на инвариантных относительно группы $SO(n, R)$ подпространствах симметричных тензоров.

Библ. 5 назв.

УДК 517.544

Жорovina Т. Н. Об одной трехэлементной краевой задаче Римана на торе.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1984, № 2.

Рассматривается однородная трехэлементная краевая задача Римана с постоянными коэффициентами на торе. Решение выписывается в замкнутой форме.

Библ. 2 назв.

УДК 517.925

Ковачев В. X. О приведении некоторых дифференциальных уравнений с рациональной правой частью к «треугольному» виду при помощи билинейного преобразования.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1984, № 2.

Рассматриваются дифференциальные уравнения, правая часть которых рациональна. При выполнении найденных условий из данного уравнения с помощью билинейного преобразования получается дифференциальное уравнение, где правая часть имеет «треугольный» вид и удовлетворяет одному из двух дополнительных условий.

Библ. 1 назв.

УДК 519.62

Бобков В. В. Нелинейные методы численного решения дифференциальных уравнений, основанные на экспоненциальном продолжении решения.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. мех., 1984, № 2.

Для численного решения задач с начальными условиями в случае систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенных относительно производных, предлагаются нелинейные численные методы, явные и неявные, сохраняющие при любом шаге численного интегрирования применительно к частному случаю линейных однородных систем с постоянной симметричной или несимметричной отрицательно определенной матрицей свойство монотонного убывания евклидовой нормы ненулевого решения.

Библ. 3 назв.

УДК 519.24

Труш Н. Н. Уменьшение смещения при оценивании спектральных плотностей.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1984, № 2.

Рассматривается метод уменьшения смещения оценки спектральной плотности стационарного случайного процесса x_t , $t \in Z$. По T наблюдениям строится оценка спектральной плотности, которая является асимптотически несмещенной со смещением, убывающим как T^{-k} , где k — наперед заданное натуральное число.

Библ. 6 назв.

УДК 519.62

Шалима В. Н. Об одном классе численных методов решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений специального вида.— Вестн. Белорусского ун-та. Сер. 1, физ., мат. и мех., 1984, № 2.

Предлагается способ построения численных методов решения задачи Коши в случае систем обыкновенных дифференциальных уравнений специального вида, основанный на обратимости дифференциального оператора и принципа последовательного повышения порядка точности.

Библ. 4 назв.

